オイラー・ラグランジュ方程式の例

オイラー・ラグランジュ方程式と作用の具体的な例をいくつか示します。
「·」は時間微分です。

- 直線運動

  1次元とし、運動エネルギーの項しかないときのラグランジアンは

$$L(\dot{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

オイラー・ラグランジュ方程式に入れれば

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

として、力の作用していない運動方程式になります。これを解くと

$$\frac{dx}{dt} = A$$

$$x(t) = At + B$$

A, B は定数です。これは変分問題の視点から言えば、2点間を結ぶ最短の曲線は直線であるということを言っています。

簡単に求まるので、作用を求めてみます。作用は

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(\dot{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2)$$

これの両端での条件 $x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2$ を入れれば

$$x_1 = At_1 + B\ ,\ x_2 = At_2 + B$$

これらから

$$A = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

と求まります。そうすると、$\dot{x}$ は

$$\dot{x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

よって、運動方程式に従う軌道 (直線)$x_c(t)$ での作用は

$$
\begin{aligned}
S[x_c] = & \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2} m (\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1})^2 \\
& = \frac{1}{2} m (\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1})^2 (t_2 - t_1) \\
& = \frac{1}{2} m \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}
\end{aligned}
$$

となります。

- 単振り子

  x 軸を横、y 軸を縦にとり (上方向を正)、糸の長さ l、重りの質量 m の振り子が y 軸で静止しているとし、静止している振り子の位置 ($\theta = 0$) を原点とします。重りには重力加速度 $-g$ が作用し、原点の位置から角度 θ で振動しているとします。そうすると、運動エネルギーは

$$
T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)
$$

x と y は θ を使えば

$$
x = l \sin\theta \ , \ y = l(1 - \cos\theta)
$$

$$
\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta \ , \ \dot{y} = l\dot{\theta}\sin\theta
$$

これはデカルト座標から極座標への座標変換です。なので、新しい座標 θ によってオイラー・ラグランジュ方程式は書けます (自由度が 1)。

T を θ で書くと

$$
T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2
$$

原点を基準にしたポテンシャルは、重力加速度によるポテンシャルから

$$
U = mgl(1 - \cos\theta)
$$

なので、ラグランジアン L は

$$
L(\theta, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)
$$

このラグランジアンでの U は基準の位置や y 軸の方向で変わりますが、結果には影響しません。これを角度 θ に対するオイラー・ラグランジュ方程式に入れて

$$
\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -mgl\sin\theta - ml^2\ddot{\theta} = 0
$$

よって

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

となって、単振り子の運動方程式が出てきます。このように、オイラー・ラグランジュ方程式では座標を変えるだけですむという利点があります。

θ を微小と思えば

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

なので、A, C を定数として

$$\theta = A\cos(\omega t + C) \quad (\omega = \sqrt{\frac{g}{l}})$$

という単振動での一般解が出てきます。

- 単振動

1 次元での単振動でのラグランジアンは

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

と与えられます。オイラー・ラグランジュ方程式に入れれば

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega^2 x = 0$$

として、単振動の運動方程式が求まります。

作用を求めます。単振動の一般解は、A, B を定数として

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

時間に対して $x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2$ とすれば

$$x_1 = A\cos(\omega t_1) + B\sin(\omega t_1)$$

$$x_2 = A\cos(\omega t_2) + B\sin(\omega t_2)$$

A は

$$x_1\sin(\omega t_2) = A\cos(\omega t_1)\sin(\omega t_2) + B\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)$$

$$x_2\sin(\omega t_1) = A\cos(\omega t_2)\sin(\omega t_1) + B\sin(\omega t_2)\sin(\omega t_1)$$

として

$$A = \frac{x_1 \sin(\omega t_2) - x_2 \sin(\omega t_1)}{\sin(\omega t_2)\cos(\omega t_1) - \cos(\omega t_2)\sin(\omega t_1)} = \frac{x_1 \sin(\omega t_2) - x_2 \sin(\omega t_1)}{\sin(\omega(t_2 - t_1))}$$

B も同様に

$$B = \frac{x_1 \cos(\omega t_2) - x_2 \cos(\omega t_1)}{\sin(\omega(t_1 - t_2))}$$

と求まるので

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{x_1 \sin(\omega t_2) - x_2 \sin(\omega t_1)}{\sin(\omega(t_2 - t_1))}\cos(\omega t) + \frac{x_1 \cos(\omega t_2) - x_2 \cos(\omega t_1)}{\sin(\omega(t_1 - t_2))}\sin(\omega t) \\
&= \frac{1}{\sin(\omega(t_2 - t_1))}\big(x_1 \sin(\omega t_2)\cos(\omega t) - x_1 \cos(\omega t_2)\sin(\omega t) - x_2 \sin(\omega t_1)\cos(\omega t) + x_2 \cos(\omega t_1)\sin(\omega t)\big) \\
&= \frac{1}{\sin(\omega(t_2 - t_1))}\big(x_1\big(\sin(\omega t_2)\cos(\omega t) - \cos(\omega t_2)\sin(\omega t)\big) - x_2\big(\sin(\omega t_1)\cos(\omega t) - \cos(\omega t_1)\sin(\omega t)\big)\big) \\
&= \frac{1}{\sin(\omega(t_2 - t_1))}\big(x_1 \sin(\omega(t_2 - t)) - x_2 \sin(\omega(t_1 - t))\big)
\end{aligned}$$

時間微分すると

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{\sin(\omega(t_2 - t_1))}\big(-x_1 \cos(\omega(t_2 - t)) + x_2 \cos(\omega(t_1 - t))\big)$$

となります。

作用は部分積分によって (x は時間依存していることに注意)

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\ (\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 q^2) \\
&= [\frac{1}{2}mx\dot{x}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{1}{2}mx\frac{d^2x}{dt^2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \\
&= [\frac{1}{2}mx\dot{x}]_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{2}m\int_{t_0}^{t_f} dt(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x)x
\end{aligned}$$

第 2 項は運動方程式から 0 なので

$$S = \frac{1}{2}m(x(t_2)\dot{x}(t_2) - x(t_1)\dot{x}(t_1))$$

これに ($\tau = t_2 - t_1,\ C = \dfrac{1}{\sin(\omega\tau)}$)

$$x(t_1) = -C(x_1 \sin(\omega(t_1 - t_2)) - x_2 \sin(\omega(t_1 - t_1))) = Cx_1 \sin(\omega\tau)$$

$$x(t_2) = Cx_2 \sin(\omega\tau)$$

$$\dot{x}(t_1) = -C\omega(x_1 \cos(\omega(t_1 - t_2)) - x_2) = -C\omega(x_1 \cos(\omega\tau) - x_2)$$

$$\dot{x}(t_2) = -C\omega(x_1 \cos(\omega(t_2 - t_2)) - x_2 \cos(\omega(t_2 - t_1))) = -C\omega(x_1 - x_2 \cos(\omega\tau))$$

これらを入れて

$$
\begin{aligned}
&x(t_2)\dot{x}(t_2)-x(t_1)\dot{x}(t_1)\\
&=-C^2\omega x_2(x_1-x_2\cos(\omega\tau))\sin(\omega\tau)+C^2\omega x_1(x_1\cos(\omega\tau)-x_2)\sin(\omega\tau)\\
&=-C^2\omega\big(x_1x_2\sin(\omega\tau)-x_2^2\cos(\omega\tau)\sin(\omega\tau)-x_1^2\cos(\omega\tau)\sin(\omega\tau)+x_1x_2\sin(\omega\tau)\big)\\
&=-C^2\omega\big(2x_1x_2\sin(\omega\tau)-(x_2^2+x_1^2)\cos(\omega\tau)\sin(\omega\tau)\big)\\
&=-\frac{\omega}{\sin(\omega\tau)}\big(2x_1x_2-(x_2^2+x_1^2)\cos(\omega\tau)\big)
\end{aligned}
$$

となるので、作用は

$$
S=\frac{m}{2}\frac{\omega}{\sin(\omega\tau)}\big((x_2^2+x_1^2)\cos(\omega\tau)-2x_1x_2\big)=\frac{m\omega}{2\sin\omega\tau}\big((x_2^2+x_1^2)\cos(\omega\tau)-2x_1x_2\big)
$$

と求まります。

- カテナリー曲線

  工学系でよく使われるものを計算してみます。微分方程式のちょっとした解法例にもなっています。2 次元の xy 平面とし、点 $P=(a,0)$ と点 $Q=(b,0)$ で両端が固定されている紐を用意します。y 軸方向には重力がかかっているので、紐自身の重さによって垂れ下がっています。このとき紐の微小な領域でのポテンシャル ΔU は紐の断面積 A、紐の質量密度 σ、垂れ下がった紐の微小な長さ Δs、重力加速度 g によって

$$
\Delta U=gyA\sigma\Delta s
$$

紐の微小な長さ Δs は直線と近似して $\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ です。ここで紐の y 座標は x に依存していると考えて (xy 平面で U 字型の線になっているので、紐の y 座標は x の関数になっている)、$y(x)$ とします。そうすると Δy は x 座標を x から $x+\Delta x$ に動かしたときの y の変化 $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$ です。全ポテンシャルは x 軸の範囲 a から b で微小領域を足し合わせればいいので

$$
U=\sum_i\Delta U_i
$$

これだと x の微小領域 x_i で区切られているので、$\Delta x\to 0$ 極限を取ります。そうすると

$$
\begin{aligned}
U&=gA\sigma\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i y(x_i)\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}\\
&=gA\sigma\lim_{\Delta x\to 0}\sum_i y(x_i)\sqrt{1+(\frac{\Delta y_i}{\Delta x})^2}\Delta x
\end{aligned}
$$

$\Delta x\to 0$ でルートの中の第 2 項は微分になり、和は積分になるので

$$
U=gA\sigma\int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx
$$

紐は動いていないので運動エネルギーは 0 となり、ラグランジアンは U で与えられます。このポテンシャルをオイラー・ラグランジュ方程式 (ラグランジアンの変数は y と $y' = dy/dx$)

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial U}{\partial y'} = 0$$

に入れると

$$\begin{aligned}
0 &= (1+y'^2)^{1/2} - \frac{d}{dx}(yy'(1+y'^2)^{-1/2}) \\
(1+y'^2)^{1/2} &= y'^2(1+y'^2)^{-1/2} + yy''(1+y'^2)^{-1/2} - yy'^2y''(1+y'^2)^{-3/2} \\
1+y'^2 &= y'^2 + yy'' - yy'^2y''(1+y'^2)^{-1} \\
1 &= yy'' - yy'^2y''(1+y'^2)^{-1} \\
1+y'^2 &= yy''(1+y'^2) - yy'^2y'' \\
1+y'^2 &= yy'' + yy'^2y'' - yy'^2y'' \\
1+y'^2 &= yy''
\end{aligned}$$

という微分方程式なります。これは

$$y' = p(x)\ ,\ y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy}$$

として

$$\begin{aligned}
\frac{1+p^2}{y} &= p\frac{dp}{dy} \\
\int\frac{dy}{y} &= \int\frac{pdp}{1+p^2} \\
\int\frac{dy}{y} &= \frac{1}{2}\int\frac{dp^2}{1+p^2} \\
\log y &= \frac{1}{2}\log(1+p^2) + C
\end{aligned}$$

積分定数 C を $\log C$ と取り直して

$$
\begin{aligned}
\log y =& \frac{1}{2}\log(1+p^2) + \log C \\
\log y =& \frac{1}{2}\log[C(1+p^2)] \\
y =& \sqrt{C(1+p^2)} \\
p =& \pm\sqrt{\frac{y^2}{C^2}-1} \\
\frac{dy}{dx} =& \pm\sqrt{\frac{y^2}{C^2}-1} \\
\int\frac{dy}{\sqrt{y^2/C^2-1}} =& \pm\int dx \\
C\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} =& \pm\int dx \quad (z = y/C) \\
C\cosh^{-1} z =& \pm(x+D) \\
y =& C\cosh(\pm\frac{x+D}{C})
\end{aligned}
$$

D は積分定数、$\cosh^{-1}$ は cosh の逆双曲線関数です。積分は

$$
\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+a}} = \cosh^{-1}\frac{z}{\sqrt{|a|}} \qquad (a<0)
$$

を使っています。cosh の性質

$$
\cosh\theta = \cosh(-\theta)
$$

から

$$
\cosh(+\frac{x+D}{C}) = \cosh(-\frac{x+D}{C})
$$

なので

$$
y = C\cosh(\frac{x+D}{C})
$$

が解になります。よって、オイラー・ラグランジュ方程式を満たす紐の y 座標 $y(x)$ はこのようになります。最初の U の積分から、U を作用 S と見れるので、最小作用の原理からポテンシャルが最小になっていると言えます。このようにポテンシャルを最小にする曲線 (今の場合では紐が作る線) をカテナリー曲線 (catenary)、もしくは懸垂線と言います。

話は逸れますが、カテナリー曲線は他の方法でも定義されています。まず、任意の曲線を用意します。その曲線を z 軸周りで回転させます。このときできる面の表面積を考えます。回転して出来た面上の微小な帯の面積 ΔA は半径 $y(x)$ の円にその厚さ $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta(y)^2}$ (曲線の微小な長さ) をかければいいので

$$\Delta A = 2\pi y\sqrt{(\Delta x)^2 + \Delta(y)^2}$$

なので、面の表面積は上のポテンシャルのときと同じように考えて

$$A = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

となります。この式はポテンシャルの式と同じ形をしています。このため、曲線を回転させて出来た面の表面積を最小にするものがカテナリー曲線と定義することもできます。

さらについでの話として力学っぽく求めた場合も示しておきます。今の状況は、重力と紐の張力のつりあいを見ているだけなので、つりあいの式は張力を T として

$$Ty''\Delta x = gA\sigma\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

と書けます。左辺が張力部分で右辺が重力部分です (力学の「弦の振動」で弦の微小な長さを δx と近似していない場合)。微小部分は微分に変えて変形していくと

$$\begin{aligned} Ty'' &= gA\sigma\sqrt{1 + y'^2} \\ y'' &= a\sqrt{1 + y'^2} \quad (a = gA\sigma/T) \end{aligned}$$

$y' = p(x)$ として $y'' = dp/dx$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= a\sqrt{1 + p^2} \\ \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} &= a(x + C) \\ \sinh^{-1} p &= ax + C \\ p &= \sinh(a(x + C)) \\ \frac{dy}{dx} &= \sinh(a(x + C)) \\ y &= \frac{1}{a}\cosh(a(x + C)) + D \end{aligned}$$

C, D は積分定数です。途中の積分で

$$\int \frac{dp}{\sqrt{p^2 + a}} = \sinh^{-1}\frac{p}{\sqrt{a}} \quad (a > 0)$$

を使っています ($\sinh^{-1}$ は sinh の逆双曲線関数)。というわけで、運動方程式の一般解は

$$y = \frac{T}{gA\sigma}\cosh(\frac{gA\sigma}{T}(x + C)) + D$$

C, D は紐の位置を与えることで決まります。紐の長さとかを決めることで張力の値を求めたりもできます。例えば、紐が原点を中心に対称だとすれば紐の端 $(x_0, y(x_0))$ と $(-x_0, y(-x_0))$ において $y(x_0) = y(-x_0)$ なので

$$\frac{T}{gA\sigma}\cosh(\frac{gA\sigma}{T}(x_0 + C)) + D = \frac{T}{gA\sigma}\cosh(\frac{gA\sigma}{T}(-x_0 + C)) + D$$

D はなんでもいいので $D = 0$ として、$\cosh\theta = \cosh(-\theta)$ から $C = 0$ となるので

$$y = \frac{T}{gA\sigma}\cosh(\frac{gA\sigma}{T}x)$$

これに紐の長さや質量を入れることで張力が求まります。また、オイラー・ラグランジュ方程式から求めた場合でも同じように対称だとすると

$$y = C\cosh(\frac{x}{C})$$

となって同じになります。このように両端を固定した物体の重力とのつりあいによる情報をカテナリー曲線は持っているので工学系ではよく使われます。