

ヘルツダイポールアンテナ

マクスウェル方程式から出てくる非同次の波動方程式の解き方を見ます。その結果からヘルツダイポールアンテナの計算を行います。ヘルツダイポールアンテナについての詳しい説明はしていません。

前半はグリーン関数を使った解法、後半はベクトル計算の練習です。

入門的な電磁気では省かれる話ですが、波動方程式の扱いの典型的な例なので、量子論とかを勉強する前に一度触れておくと後々便利です。

フーリエ変換と複素積分は知っているとしています。

B は $\beta_b^{-1} B$ としています。

真空のマクスウェル方程式は電場 $E(x, t)$ 、磁場 $B(x, t)$ 、電荷密度 $\rho(x, t)$ 、電流密度 $j(x, t)$ によって

$$\nabla \cdot E = 4\pi\alpha\rho \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B'}{\partial t} \quad (1c)$$

$$\nabla \times B' - \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi\beta_m j \quad (1d)$$

$B' = \beta_b^{-1} B$ していますが、 B' を B としていきます。これから解きたい方程式を出します。ベクトルポテンシャル $A(x, t)$ (A も $\beta_b^{-1} A$) は磁場 B から

$$B = \nabla \times A \quad (2)$$

これを (1c) に入れば

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times A)$$

$$\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

そして、ベクトルの関係 $\nabla \times \nabla V = 0$ から

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\phi \quad (3)$$

としてスカラーポテンシャル ϕ が与えられます。(2),(3) を (1d) に入れて

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &= 4\pi\beta_m \mathbf{j} + \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= 4\pi\beta_m \mathbf{j} + \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\beta_m}{\alpha} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 4\pi\beta_m \mathbf{j} \\
\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 4\pi\beta_m \mathbf{j}
\end{aligned}$$

ローレンツゲージ

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

を使うことにすれば、ベクトルポテンシャルに対する

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -4\pi\beta_m \mathbf{j} \quad (4)$$

という非同次の微分方程式になります。これを解きます。

このような形をした微分方程式はグリーン関数を使って解けます。グリーン関数 $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ を

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -4\pi\beta_m \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \mathbf{j}(\mathbf{x}', t') \quad (5a)$$

$$(\nabla^2 - \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (5b)$$

と定義します。グリーン関数による (5a) は特解を与えます。解になっていることは

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 - \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= -4\pi\beta_m (\nabla^2 - \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \mathbf{j}(\mathbf{x}', t') \\
&= -4\pi\beta_m \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}', t') (\nabla^2 - \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \\
&= -4\pi\beta_m \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}', t') \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= -4\pi\beta_m \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

から確かめられます。なので、グリーン関数を求めて、同次での一般解を足せば (4) の一般解になります。グリーン関数は時間の差 $\tau = t - t'$ 、位置の差 $X = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ にのみ依存しているとします (平行移動で変わらない)。

グリーン関数を求めるために、 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t), \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ をフーリエ変換します。フーリエ変換と逆フーリエ変換は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t}$$

と定義します。 $j(\mathbf{x}, t)$ でも同様です。フーリエ変換前後で同じ A, j を使うことにし、変数で区別します ($A(\mathbf{x}, \omega)$ は $A(\mathbf{x}, t)$ の t を ω に書き換えただけのものではない)。これから微分は

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\nabla^2 A(\mathbf{x}, \omega)) e^{i\omega t} \\ \frac{\partial^2 A(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\mathbf{x}, \omega) \omega^2 e^{i\omega t}\end{aligned}$$

となるので、(4) は

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\nabla^2 A(\mathbf{x}, \omega)) e^{i\omega t} + \frac{\beta_m}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\mathbf{x}, \omega) \omega^2 e^{i\omega t} &= -4\pi\beta_m \int_{-\infty}^{\infty} d\omega j(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} \\ (\nabla^2 + \frac{\beta_m}{\alpha} \omega^2) A(\mathbf{x}, \omega) &= -4\pi\beta_m j(\mathbf{x}, \omega)\end{aligned}\tag{6}$$

これに対するグリーン関数は単純に

$$A(\mathbf{x}, \omega) = -4\pi\beta_m \int d^3x' G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}') j(\mathbf{x}', \omega)\tag{7a}$$

$$(\nabla^2 + \frac{\beta_m}{\alpha} \omega^2) G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\tag{7b}$$

ω に依存することを添え字で表しています。 $G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ は $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ をフーリエ変換したものです。実際に、 $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ は $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau = t - t'$ に依存するとしているために $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$ から

$$\begin{aligned}A(\mathbf{x}, \omega) &= -4\pi\beta_m \int d^3x' G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}') j(\mathbf{x}', \omega) \\ &= -4\pi\beta_m \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G(\mathbf{X}, \tau) e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dt' j(\mathbf{x}', t') e^{-i\omega t'} \quad (G(\mathbf{X}, \tau) = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} &= \frac{-4\pi\beta_m}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau dt G(\mathbf{X}, \tau) j(\mathbf{x}', t) e^{-i\omega(\tau+t')} e^{i\omega t} \\ A(\mathbf{x}, t) &= \frac{-4\pi\beta_m}{2\pi} \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau dt G(\mathbf{X}, \tau) j(\mathbf{x}', t) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t'-\tau)} \\ &= \frac{-4\pi\beta_m}{2\pi} \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau dt G(\mathbf{X}, \tau) j(\mathbf{x}', t) 2\pi\delta(t - t' - \tau) \\ &= -4\pi\beta_m \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt G(\mathbf{X}, t - t') j(\mathbf{x}', t) \\ &= -4\pi\beta_m \int d^3x' \int_{-\infty}^{\infty} dt G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}, t') j(\mathbf{x}', t)\end{aligned}$$

となって (5a) に戻ります。途中でデルタ関数のフーリエ変換による性質 (定義)

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}\tag{8}$$

を使っています。また、

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 + \frac{\beta_m}{\alpha}\omega^2)\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) &= -4\pi\beta_m(\nabla^2 + \frac{\beta_m}{\alpha}\omega^2) \int d^3x' G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega) \\
&= -4\pi\beta_m \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega) (\nabla^2 + \frac{\beta_m}{\alpha}\omega^2) G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \\
&= -4\pi\beta_m \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= -4\pi\beta_m \mathbf{j}(\mathbf{x}, \omega)
\end{aligned}$$

となっています。

グリーン関数 $G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ は位置の差 $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ に依存しているために、座標の逆フーリエ変換は

$$G_\omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k G_\omega(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$

と書けるので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^3} (\nabla^2 + \frac{\beta_m}{\alpha}\omega^2) \int d^3k G_\omega(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (-|\mathbf{k}|^2 + \frac{\beta_m}{\alpha}\omega^2) G_\omega(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')
\end{aligned}$$

デルタ関数は (8) の 3 次元では

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}$$

となるので

$$(-|\mathbf{k}|^2 + \frac{\beta_m}{\alpha}\omega^2) G_\omega(\mathbf{k}) = 1$$

であればいいことから、グリーン関数 $G_\omega(\mathbf{k})$ は

$$G_\omega(\mathbf{k}) = -\frac{1}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} \quad (\kappa = \frac{\beta_m}{\alpha} = \frac{1}{c^2})$$

c は光速です。これがフーリエ変換されたグリーン関数となります。これを $G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}')$ に戻します。そのためには逆フーリエ変換すればいいので

$$\begin{aligned}
G_\omega(\mathbf{X}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{-1}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}} \quad (G_\omega(\mathbf{X}) = G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}')) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{-1}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{-1}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} \exp[i|\mathbf{k}||\mathbf{X}| \cos\theta] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \int_{|\mathbf{k}||\mathbf{x}|}^{-|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} ds \frac{-|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} \frac{-1}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} \exp[is] \quad (s = |\mathbf{k}||\mathbf{X}| \cos\theta, ds = -|\mathbf{k}||\mathbf{X}| \sin\theta d\theta) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{X}|} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} \frac{1}{i} (\exp[-i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|] - \exp[i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|]) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \left(\int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \left(- \int_0^{-\infty} d|\mathbf{k}| \frac{-|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \left(- \int_{-\infty}^0 d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} - \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \right) \\
&= - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \kappa\omega^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \\
&= - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \quad (k_0^2 = \kappa\omega^2)
\end{aligned}$$

残っている $|\mathbf{k}|$ 積分は複素積分で実行します。

積分の形から積分経路に複素平面での上半円をつけることができます (ジョルダンの補題。数学の「複素積分」参照)。なので、積分は

$$\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} = \int_C d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|}$$

C は閉じた経路 (図 1) で、複素平面上で $-R$ から $+R$ にいき、 $+R$ から半径 R の上半円を通して $-R$ に行く経路です ($R \rightarrow \infty$)。これで閉じた経路を作れましたが、積分は経路上の $|\mathbf{k}| = \pm k_0$ ($k_0 = \sqrt{\kappa\omega^2}$) で極を持っています。このため、この極の処理をしないとイケません。

ここがグリーン関数の特徴的な部分で、極の避け方で結果が変わります。これはグリーン関数の微分方程式に対して境界条件を決めていないことから出てくる任意性です。この与えていない境界条件が何かをはっきりさせるために、2 つの極の避け方を使って計算します。

まず、 $-\infty$ から $+\infty$ の経路において、 $|\mathbf{k}| = +k_0$ では極の下側、 $|\mathbf{k}| = -k_0$ では極の上側を通るようにして極を避けます (図 2 の左側)。つまり、この極の避け方によって修正された閉じた経路 C_+ の中にいる極は $|\mathbf{k}| = +k_0$ だけになります。もしくは、計算の最後に 0 に持っていく微小量 η を分母の k_0 に加えて

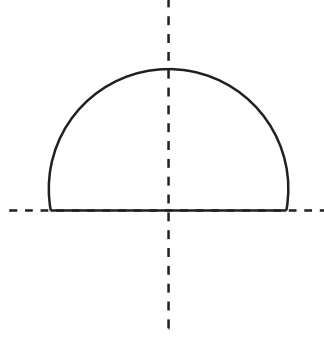


図 1: 経路 C

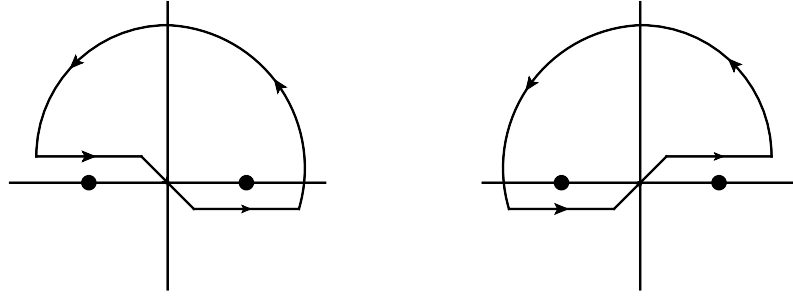


図 2: 経路 C_+ (左側) と C_- (右側)

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow 0} (|\mathbf{k}|^2 - (k_0 + i\eta)^2) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (|\mathbf{k}|^2 - k_0^2 - 2ik_0\eta + \eta^2) \\
 &= \lim_{\eta' \rightarrow 0} (|\mathbf{k}|^2 - k_0^2 - i\eta') \quad (\eta' = 2k_0\eta) \\
 &= \lim_{\eta' \rightarrow 0} (|\mathbf{k}| - \sqrt{k_0^2 + i\eta'}) (|\mathbf{k}|^2 + \sqrt{k_0^2 + i\eta'}) \\
 &= \lim_{\eta'' \rightarrow 0} (|\mathbf{k}| - k_0 - i\eta'') (|\mathbf{k}| + k_0 + i\eta'')
 \end{aligned}$$

2 行目で η^2 を 0 にしているのは虚数を含まないために極の避け方に影響しないからです。ルートの展開 $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + \dots$ から、 η を係数に持つものがルートの外に出てくるので、それを η'' としています。こうすれば極の位置が

$$|\mathbf{k}| = +k_0 + i\eta'', \quad -k_0 - i\eta''$$

となるので、 $|\mathbf{k}| = +k_0$ だった極だけをもとの閉じた経路 C の中を含むようになります。というわけで、積分は

$$\begin{aligned}
 G_\omega(\mathbf{X}) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \int_{C_+} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_C d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - (k_0 + i\eta)^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|}
 \end{aligned}$$

どちらでも留数定理を使えば計算できます。これは

$$F(|\mathbf{k}|) = \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} = \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}| - k_0} \frac{1}{|\mathbf{k}| + k_0} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|}$$

に対する積分で、 $F(|\mathbf{k}|)$ は 1 位の極を持っています。そして、今は反時計周りの経路 C なので、留数定理は

$$2\pi i \text{Res}(F, k_0) = \int_{C_+} d|\mathbf{k}| F(|\mathbf{k}|)$$

Res は留数です。今は 1 位の極での留数なので

$$\begin{aligned} \text{Res}(F, +k_0) &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow k_0} (|\mathbf{k}| - k_0) \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}| - k_0} \frac{1}{|\mathbf{k}| + k_0} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{k_0}{2k_0} e^{ik_0|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{1}{2} e^{ik_0|\mathbf{x}|} \end{aligned}$$

と求まり、これによって積分は

$$\int_{C_+} d|\mathbf{k}| F(|\mathbf{k}|) = \int_{C_+} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} = 2\pi i \text{Res}(F, k_0) = i\pi e^{ik_0|\mathbf{x}|} \quad (9)$$

となります。

η を加えたものでも

$$F^{(+)}(|\mathbf{k}|) = \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - (k_0 + i\eta)^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}| - (k_0 + i\eta)} \frac{1}{|\mathbf{k}| + (k_0 + i\eta)} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|}$$

から

$$\begin{aligned} \text{Res}(F^{(+)}, +k_0) &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow k_0 + i\eta} (|\mathbf{k}| - (k_0 + i\eta)) \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}| - (k_0 + i\eta)} \frac{1}{|\mathbf{k}| + (k_0 + i\eta)} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} \\ &= \frac{k_0 + i\eta}{2(k_0 + i\eta)} e^{i(k_0 + i\eta)|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{1}{2} e^{ik_0|\mathbf{x}|} e^{-\eta|\mathbf{x}|} \end{aligned}$$

となるので、 η を 0 にすれば一致します。

というわけで、(9) から

$$\begin{aligned}
G_\omega(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \int_{C_+} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \int_{C_+} d|\mathbf{k}| F(|\mathbf{k}|) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} 2\pi i \text{Res}(F, k_0) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} i\pi e^{ik_0|\mathbf{X}|} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{X}|} e^{ik_0|\mathbf{X}|}
\end{aligned}$$

これは極の避け方を C_+ ($k_0 \rightarrow k_0 + i\eta$) と選んだ場合なので

$$G_\omega^{(+)}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{ik_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

とします。

次に極の避け方を逆にします。 $|\mathbf{k}| = +k_0$ では極の上側、 $|\mathbf{k}| = -k_0$ では極の下側を通して極を避けます (図 2 の右側)。この極の避け方での閉じた経路 C_- の中にいる極は $|\mathbf{k}| = -k_0$ だけになります。この場合では $k_0 - i\eta$ となります ($|\mathbf{k}| = -k_0$ の極を経路 C の内側に入れるので、 η の符号を反転させればいい)。よって、今度の積分は

$$G_\omega(\mathbf{X}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \int_{C_-} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \int_C d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - (k_0 - i\eta)} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|}$$

これも留数定理を使えばよく、極が $|\mathbf{k}| = -k_0$ になったことから留数は

$$\begin{aligned}
\text{Res}(F, -k_0) &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow -k_0} (|\mathbf{k}| + k_0) \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}| - k_0} \frac{1}{|\mathbf{k}| + k_0} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \\
&= \frac{-k_0}{-2k_0} e^{-ik_0|\mathbf{X}|} \\
&= \frac{1}{2} e^{-ik_0|\mathbf{X}|}
\end{aligned}$$

$k_0 - i\eta$ とした場合でも

$$\begin{aligned}
\text{Res}(F^{(-)}, -k_0) &= \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow -k_0} (|\mathbf{k}| + (k_0 - i\eta)) \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}| - (k_0 - i\eta)} \frac{1}{|\mathbf{k}| + (k_0 - i\eta)} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \\
&= \frac{-(k_0 - i\eta)}{-2(k_0 - i\eta)} e^{-i(k_0 - i\eta)|\mathbf{X}|} \\
&= \frac{1}{2} e^{-ik_0|\mathbf{x}|} e^{-\eta|\mathbf{X}|}
\end{aligned}$$

となり、 η を 0 にすれば同じです。

よって、今度は

$$\begin{aligned}
G_\omega(\mathbf{x}; \mathbf{x}') &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} \int_{C_-} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - k_0^2} e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{X}|} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} 2\pi i \text{Res}(F, -k_0) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{i|\mathbf{X}|} i\pi e^{-ik_0|\mathbf{X}|} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{X}|} e^{-ik_0|\mathbf{X}|}
\end{aligned}$$

これは経路が C_- なので

$$G_\omega^{(-)}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{X}|} e^{-ik_0|\mathbf{X}|}$$

$G_\omega^{(\pm)}$ と比べてみると、 $e^{\pm ik_0|\mathbf{x}|}$ 部分が異なります。なので、極の避け方によって異なる結果が出てきています。この意味を見ます。

そのために、逆フーリエ変換で ω を時間に戻します。変換は

$$\begin{aligned}
G^{(\pm)}(\mathbf{X}, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_\omega^{(\pm)}(\mathbf{X}) e^{i\omega\tau} \\
&= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{|\mathbf{X}|} e^{\pm ik_0|\mathbf{X}|} e^{i\omega\tau} \\
&= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{X}|} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\omega\tau \pm i\sqrt{\kappa}\omega|\mathbf{X}|] \\
&= -\frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{X}|} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i(\tau \pm \sqrt{\kappa}|\mathbf{X}|)\omega] \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{X}|} \delta(\tau \pm \sqrt{\kappa}|\mathbf{x}|)
\end{aligned} \tag{10}$$

デルタ関数の (8) を使っています。 $\tau = t - t'$ 、 $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ なので

$$\begin{aligned}
G^{(\pm)}(\mathbf{X}, \tau) &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{X}|} \delta(\tau \pm \sqrt{\kappa}|\mathbf{X}|) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{X}|} \delta(t - t' \pm \sqrt{\kappa}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{X}|} \delta(t - (t' \mp \sqrt{\kappa}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|))
\end{aligned}$$

これとグリーン関数の定義

$$A(x, t) = -4\pi\beta_m \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G(x, t; x', t') j(x', t')$$

から意味を拾います。 j は電磁場 (ベクトルポテンシャル) の発生源なので、それによって A が作られます。そして、これは $j(x', t')$ から $A(x, t)$ を作る式と見えます。そうすると、位置 x' 、時間 t' での発生源 j から位置 x 、時間 t でのベクトルポテンシャル A が作られたと考えられます。このとき時間の順序を考えれば、まず発生源 j があって、そこからベクトルポテンシャル A が発生したはずで $(t > t')$ 。ここでデルタ関数を見ると、デルタ関数が 0 にならないときは

$$G^{(+)} : \delta(t - (t' - \sqrt{\kappa}|x - x'|)) \Rightarrow t = t' - \sqrt{\kappa}|x - x'| = t' - \frac{|x - x'|}{c}$$

$$G^{(-)} : \delta(t - (t' + \sqrt{\kappa}|x - x'|)) \Rightarrow t = t' + \sqrt{\kappa}|x - x'| = t' + \frac{|x - x'|}{c}$$

となっています。 $G^{(+)}$ では t の方が t' より小さく、 $G^{(-)}$ では t の方が t' より大きいです。 t が A の時間、 t' が j の時間なので、 $G^{(-)}$ が時間の順序通りに発生源から広がっていくようになっていて $(t > t')$ 、 $G^{(+)}$ では反対向き (ベクトルポテンシャルから発生源に向かっている) に進んでいます $(t < t')$ 。そして、時間の差は電磁場が伝わる速度である光速 c で与えられています。

球面波のことを知っていればもっと単純に分かります。球面波は

$$\frac{1}{x} e^{i(p_1 t \pm p_2 x)}$$

のように表されます (x は位置、 t は時間、 p_1, p_2 は扱う対象が何かによる量)。マイナスが発生源から外側に広がっていく波、プラスが外側から発生源に向かっていく波を表します。(10) の途中の形から $G^{(\pm)}$ は球面波になっているのが分かり、 $G^{(-)}$ では発生源から外側に広がる波、 $G^{(+)}$ では外側から発生源に向かう波となります。これはデルタ関数から見た場合と同じ結論です。

このように極の避け方によって、時間に対する進み方が異なったグリーン関数が求まります。というわけで、グリーン関数を決めるのに足りなかった条件 (境界条件) は時間に対してどう進むのかです。今のように極を避けて求められた $G^{(+)}$ を先進グリーン関数 (advanced Green function)、 $G^{(-)}$ を遅延グリーン関数 (retarded Green function) と言い、極の避け方が時間に対する境界条件を与えています。境界条件は $x', t' = 0$ とすれば、先進では $G(x, t) = 0$ ($t > 0$)、遅延では $G(x, t) = 0$ ($t < 0$) となります。そして、時間の進みの話から、通常の時間通りに進むように選ぶなら遅延グリーン関数です。

ここでは位置のフーリエ変換での極の避け方に対して先進、遅延グリーン関数を与えたことに注意してください。先進、遅延グリーン関数は時間のフーリエ変換による積分からも定義できて、そのときは極の避け方が今の場合と異なります。

今見ている電磁場では、発生源があり、そこから電磁場が作られるはずなので、遅延グリーン関数 $G_{\omega}^{(-)}$ を選びます。これで一般解を求められます。

(6) での一般解の形を求めます。(6) は非同次方程式なので、一般解は特解と同次での一般解を足したものです。特解は (7a) なので $G_{\omega}^{(-)}$ を使い、同次での一般解を $A_0(x, t)$ とすれば、一般解は

$$A(x, \omega) = A_0(x, \omega) - 4\pi\beta_m \int d^3x' G_{\omega}^{(-)}(x, ; x') j(x', \omega)$$

同次では

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla^2 + k_0^2) \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \omega) \quad (k_0^2 = \kappa \omega^2) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \omega)
\end{aligned}$$

なので、

$$\mathbf{A}_0(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{C} e^{ip_1 x} e^{ip_2 y} e^{ip_3 z} \quad (k_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$$

が解になります ($\mathbf{C}$ は定数のベクトル)。単純に言えば、同次の波動方程式なので解は平面波というだけです。ここで電磁場でのよくある条件、 $\mathbf{x}$ が無限大で $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = 0$ を入れるなら、 $\mathbf{A}_0$ は 0 になるので、一般解は

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) &= -4\pi\beta_m \int d^3x' G_{\omega}^{(-)}(\mathbf{x}; \mathbf{x}') \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega) \\
&= \beta \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{-ik_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{j}(\mathbf{x}', \omega)
\end{aligned}$$

と求められます。

ベクトルポテンシャルが求まったところで、具体的な状況を考えてみます。 $\mathbf{A}$ を $\beta_b^{-1} \mathbf{A}$ に戻します。 z 軸上に正負の電荷を配置し、電気双極子を作ります。 $-dz/2$ の位置に電荷 $-q$ 、 $+dz/2$ の位置に電荷 $+q$ を置けば (dz は微小な長さ)、電荷の時間変化によって $-q$ から $+q$ に向かって電流 I が流れます (電流は $I = dq(t)/dt$)。言い換えれば、振動数 ω を持っている電荷です。今は微小な間隔 dz なので電流 I は均一とします。この電流は xy 平面上に磁場を作ります。

ベクトルポテンシャルは $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ なので

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = (B_x, B_y, 0)$$

から、 A_z だけが 0 でないです (電流の成分は z 成分しかないから)。そして、電流 I は幅のない微小な長さ dz 上にいるとして、電流密度 $\mathbf{j}$ は

$$\mathbf{j} d^3x' \Rightarrow I dz'$$

と置き換えます。よって、

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) = \beta \int_{-dz/2}^{dz/2} dz' \frac{1}{|\mathbf{x} - z' \mathbf{e}_z|} e^{-ik_0|\mathbf{x} - z' \mathbf{e}_z|} \mathbf{I}$$

$\mathbf{A}$ を $\beta_b^{-1} \mathbf{A}$ にしているので、右辺の β_m は $\beta = \beta_b \beta_m$ になります。 $\mathbf{e}_z$ は z 軸方向の基底ベクトルです。 dz は微小なので $|\mathbf{x} - z' \mathbf{e}_z|$ は $|\mathbf{x}|$ と近似します。さらに電流は一定なので、ベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}, \omega) &= \beta \int_{-dz/2}^{dz/2} dz' \frac{1}{|\mathbf{x} - z' \mathbf{e}_z|} e^{-ik_0|\mathbf{x} - z' \mathbf{e}_z|} \mathbf{I} \\
&\simeq \beta \frac{1}{|\mathbf{x}|} e^{-ik_0|\mathbf{x}|} \mathbf{I} \int_{-dz/2}^{dz/2} dz' \\
&= \frac{\beta \mathbf{I}}{|\mathbf{x}|} e^{-ik_0|\mathbf{x}|} dz
\end{aligned}$$

と計算できます。

次に極座標 (r, θ, φ) に書き換えます。 $r = |\mathbf{x}|$ なので

$$A_z(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\beta I}{r} e^{-ik_0 r} dz$$

電流は I としています。 θ は z 軸とベクトル $\mathbf{x}$ の間の角度なので (z 軸から離れる方向を正)、極座標での $\mathbf{A}$ の成分 A_r, A_θ, A_φ は A_z から (z 軸は xy 平面に垂直なので A_φ は 0)

$$A_r = A_z \cos \theta, \quad A_\theta = -A_z \sin \theta, \quad A_\varphi = 0$$

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ を極座標 (r, θ, φ) でのそれぞれの方向の基底ベクトルとし

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

とすれば、磁場は

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\
&= \mathbf{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} A_\varphi \right) + \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} A_\varphi \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_\theta \right)
\end{aligned}$$

これの導出は数学の「極座標の関係」を見てください。 $A_\varphi = 0$ なので

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_\theta \right)$$

さらに A_r, A_θ には φ の依存性がないので

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} A_\theta \right)$$

r 微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_\theta}{\partial r} &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \sin \theta \\
&= -dz\beta I \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} e^{-ik_0 r} \\
&= dz\beta I \frac{1}{r^2} e^{-ik_0 r} \sin \theta + ik_0 dz\beta I \frac{1}{r} e^{-ik_0 r} \sin \theta \\
&= \beta I \left(\frac{1}{r} + ik_0 \right) \frac{1}{r} e^{-ik_0 r} \sin \theta dz
\end{aligned}$$

θ 微分は

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} A_z \cos \theta = -A_z \sin \theta = -\beta I \frac{1}{r} e^{-ik_0 r} \sin \theta dz$$

なので

$$\begin{aligned}
B_\varphi &= \left(\left(\frac{1}{r} + ik_0 \right) \beta I \frac{1}{r} e^{-ik_0 r} dz \sin \theta + \frac{1}{r} A_z \sin \theta - \frac{1}{r} A_z \sin \theta \right) \\
&= \beta I \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta
\end{aligned} \tag{11}$$

これが時間依存のある電気双極子での磁場となります。

電気双極子の電場はマクスウェル方程式 (1d) から求められます。このとき、電流密度は無視できるとして

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

時間はフーリエ変換して

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} &= \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} \\
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)) e^{i\omega t} &= i\omega \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \\
\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) &= i\kappa\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)
\end{aligned}$$

これに (11) を入れることで (基底ベクトルの関係は下の補足を見てください)

$$\begin{aligned}
i\kappa\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \\
&= (\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}) \times \mathbf{e}_\varphi \beta I \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta \\
&= \beta I (\mathbf{e}_r \times \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \times \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} \frac{1}{r} + \mathbf{e}_\varphi \times \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \frac{1}{r \sin \theta}) \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta \\
&\quad + \beta I \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} \right) dz \sin \theta \\
&\quad + \beta I \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \\
&= \beta I \left(-\mathbf{e}_\varphi \times (\mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_\theta \cos \theta) \frac{1}{r \sin \theta} \right) \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta \\
&\quad - \beta I \mathbf{e}_\theta \left(-\frac{2}{r^3} - i \frac{k_0}{r^2} - ik_0 \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta \\
&\quad + \beta I \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \cos \theta \\
&= \beta I (-\mathbf{e}_\theta \sin \theta + \mathbf{e}_r \cos \theta) \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \\
&\quad - \beta I \mathbf{e}_\theta \left(-\frac{2}{r^3} - i \frac{k_0}{r^2} - ik_0 \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta \\
&\quad + \beta I \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \cos \theta \\
&= \beta I \mathbf{e}_r \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \cos \theta \\
&\quad - \beta I \mathbf{e}_\theta \left[\frac{1}{r^3} + i \frac{k_0}{r^2} - \frac{2}{r^3} - i \frac{k_0}{r^2} - ik_0 \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) \right] e^{-ik_0 r} dz \sin \theta \\
&= \mathbf{e}_r \beta I \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \cos \theta \\
&\quad - \mathbf{e}_\theta \beta I \left(-\frac{1}{r^3} - i \frac{k_0}{r^2} + \frac{k_0^2}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta \\
&= \mathbf{e}_r \beta I \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \beta I \left(\frac{1}{r^3} + i \frac{k_0}{r^2} - \frac{k_0^2}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta
\end{aligned}$$

というわけで、電場と磁場は ($k_0 = \beta\omega^2/\alpha$)

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{2\alpha I}{i\omega} \left(\frac{1}{r^3} + i \frac{k_0}{r^2} \right) e^{-ik_0 r} dz \cos \theta \\
E_\theta &= \frac{\alpha I}{i\omega} \left(\frac{1}{r^3} + i \frac{k_0}{r^2} - \frac{k_0^2}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta \\
B_\varphi &= \beta I \left(\frac{1}{r^2} + i \frac{k_0}{r} \right) e^{-ik_0 r} dz \sin \theta
\end{aligned}$$

と求まり (他の成分は 0)、微小な間隔での $-q$ と $+q$ のダイポールがいるとき電磁場がこのように生成されます。これがヘルツダイポールアンテナ (Hertzian dipole antenna) と呼ばれるもので、微小な電気双極子 (ダイポール) を発生源とするアンテナのことです。 r^3, r^2, r に反比例する項が存在し、最も減衰の遅い (遠くまで到達できる) $1/r$

の項が放射場 (radiation field)、 $1/r^2$ の項は induction field、 $1/r^3$ の項は electrostatic field と呼ばれます。放射場は遠くでも消えない電磁場のエネルギーを与える部分です。これについては「放射」をご覧ください。

ちなみに、 $k_0 = 0$ (振動数 $\omega = 0$) の磁場は

$$B_\varphi = \frac{\beta I}{r^2} dz \sin \theta$$

となり、今の状況設定でのビオ・サバールの法則の問題でよく出てくる静磁場の結果になります ($\omega = 0$ なら時間変化がないから)。

・補足

3次元極座標 (r, θ, φ) での基底ベクトル e_r, e_θ, e_φ は

$$e_r \cdot e_r = e_\theta \cdot e_\theta = e_\varphi \cdot e_\varphi = 1, \quad e_r \cdot e_\theta = e_r \cdot e_\varphi = e_\theta \cdot e_\varphi = 0$$

$$e_r \times e_\theta = e_\varphi, \quad e_\varphi \times e_r = e_\theta, \quad e_\theta \times e_\varphi = e_r$$

微分は

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial e_\varphi}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = e_\theta, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -e_r, \quad \frac{\partial e_\varphi}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \varphi} = e_\varphi \sin \theta, \quad \frac{\partial e_\theta}{\partial \varphi} = e_\varphi \cos \theta, \quad \frac{\partial e_\varphi}{\partial \varphi} = -e_r \sin \theta - e_\theta \cos \theta$$

となっています。