

棒からのクーロン力

クーロン力の例として一定の電荷密度の棒の場合を求めます。ただの積分の練習です。
ついでにキャパシタに簡単に触れます。

出てくる積分を先にまとめておくと

$$I_1 = \int ds \frac{1}{\sqrt{s^2 + c^2}} = \log |s + \sqrt{s^2 + c^2}| \quad (\text{I1})$$

$$I_2 = \int ds \frac{1}{(s^2 + c^2)^{3/2}} = \frac{s}{c^2 \sqrt{s^2 + c^2}} \quad (\text{I2})$$

$$I_3 = \int ds \frac{s}{(s^2 + c^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad (\text{I3})$$

$$I_4 = \int ds \frac{1}{s\sqrt{s^2 + c^2}} = \frac{1}{c} \log \left| \frac{s}{(\sqrt{s^2 + c^2} + c)^2} \right| \quad (\text{I4})$$

$$I_5 = \int ds \frac{1}{s\sqrt{s^2 + c^2}} = \frac{1}{c} \log \left| \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2} + c} \right| \quad (\text{I5})$$

$$I_6 = \int ds \frac{1}{s^2 + c^2} = \frac{1}{c} \arctan \frac{s}{c} \quad (\text{I6})$$

c は定数で、積分定数は省いています。導出は下の補足でしてます。

電荷が連続的に分布しているとし、微小な領域での電荷を ΔQ とします。 ΔQ から位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の電荷 Q_0 へのクーロン力は

$$\Delta \mathbf{F} = \alpha Q_0 \Delta Q \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

ΔQ の位置を $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ としています。分布している電荷からの全体の力は各電荷でのクーロン力の重ね合わせなので、分布している領域で積分すれば全体の力になります。電荷の分布が一定密度 σ で与えられているなら、分布している電荷からの全体の力は、微小領域の体積を $\Delta x' \Delta y' \Delta z'$ として

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha Q_0 \sigma \int_V dv' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\Delta Q = \sigma \Delta x' \Delta y' \Delta z', \quad dv' = dx' dy' dz')$$

V は電荷が分布している 3 次元領域です。積分は各成分に分ければ

$$F_x = \alpha Q_0 \sigma \int_V dv' \frac{x - x'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

$$F_y = \alpha Q_0 \sigma \int_V dv' \frac{y - y'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

$$F_z = \alpha Q_0 \sigma \int_V dv' \frac{z - z'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

ここでは電荷が1次元の直線で分布している場合を求めます。これらは電荷を質量に置き換えれば重力と同じです。違うのは重力は引力のみ、クーロン力は引力と斥力がある点です。

1次元として、電荷が一定の線密度 ρ で分布している長さ $2L$ の棒 (幅のない棒) を用意し、棒の中心が原点になるように x 軸上に置きます。棒上の位置 $\mathbf{r}' = (x', 0, 0)$ での微小領域 $\Delta x'$ の電荷は $\rho \Delta x'$ なので、この領域からのクーロン力は

$$\Delta \mathbf{F} = \alpha Q_0 \frac{\rho \Delta x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \alpha Q_0 \frac{\rho \Delta x'}{(x - x')^2 + y^2 + z^2} \frac{(x - x')\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2 + z^2}}$$

x, y, z 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ としています。棒から電荷 Q_0 への全体の力は、 $-L$ から L の範囲で積分すれば求まります。 x 成分は、(I3) から

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{-L}^L dx' \Delta F_x = \alpha Q_0 \rho \int_{-L}^L dx' \frac{x - x'}{((x - x')^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\alpha Q_0 \rho \int_{x+L}^{x-L} ds \frac{s}{(s^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (s = x - x', \quad ds = -dx') \\ &= \alpha Q_0 \rho \left(\frac{1}{\sqrt{(x - L)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + L)^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

F_x は $x = 0$ で0になります。電荷が棒の中心軸上にいるために左右から受ける力が打ち消しあうためです。 y, z 成分の積分は同じで (x, y, z 軸は直交しているため、 y, z 方向は同じに見える) (I2) から

$$\begin{aligned} F_y &= \int_{-L}^L dx' \Delta F_y = \alpha Q_0 \rho y \int_{-L}^L dx' \frac{1}{((x - x')^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\alpha Q_0 \rho y \int_{x+L}^{x-L} ds \frac{1}{(s^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\alpha Q_0 \rho \frac{y}{y^2 + z^2} \left(\frac{x - L}{\sqrt{(x - L)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x + L}{\sqrt{(x + L)^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

同様に

$$F_z = -\alpha Q_0 \rho \frac{z}{y^2 + z^2} \left(\frac{x - L}{\sqrt{(x - L)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x + L}{\sqrt{(x + L)^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

電荷 Q_0 のポテンシャルを求めますが、ポテンシャルは z 方向だけを見ます (x, y 方向には力が作用していない場合)。ポテンシャルは $z = a$ から b で積分することにして、(I4) から

$$\begin{aligned}
U(b, a) &= - \int_a^b dz F_z \\
&= \alpha Q_0 \rho \int_a^b dz \frac{z}{z^2 + y^2} \left(\frac{x - L}{\sqrt{z^2 + (x - L)^2 + y^2}} - \frac{x + L}{\sqrt{z^2 + (x + L)^2 + y^2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \alpha Q_0 \rho \int_{a^2}^{b^2} ds \frac{1}{s + y^2} \left(\frac{x - L}{\sqrt{s + y^2 + (x - L)^2}} - \frac{x + L}{\sqrt{s + y^2 + (x + L)^2}} \right) \quad (s = z^2, \quad ds = 2zdz) \\
&= \frac{1}{2} \alpha Q_0 \rho \int_{a^2 + y^2}^{b^2 + y^2} ds' \left(\frac{x - L}{s' \sqrt{s' + (x - L)^2}} - \frac{x + L}{s' \sqrt{s' + (x + L)^2}} \right) \quad (s' = s + y^2) \\
&= \frac{1}{2} \alpha Q_0 \rho \left(\log \left| \frac{b^2 + y^2}{(\sqrt{b^2 + y^2 + (x - L)^2} + (x - L))^2} \right| - \log \left| \frac{b^2 + y^2}{(\sqrt{b^2 + y^2 + (x + L)^2} + (x + L))^2} \right| \right. \\
&\quad \left. - \log \left| \frac{a^2 + y^2}{(\sqrt{a^2 + y^2 + (x - L)^2} + (x - L))^2} \right| + \log \left| \frac{a^2 + y^2}{(\sqrt{a^2 + y^2 + (x + L)^2} + (x + L))^2} \right| \right) \\
&= \alpha Q_0 \rho \left(\log \left| \frac{\sqrt{b^2 + y^2 + (x - L)^2} + (x + L)}{\sqrt{b^2 + y^2 + (x + L)^2} + (x - L)} \right| - \log \left| \frac{\sqrt{a^2 + y^2 + (x - L)^2} + (x + L)}{\sqrt{a^2 + y^2 + (x + L)^2} + (x - L)} \right| \right) \quad (1)
\end{aligned}$$

となります。

棒の長さを無限大に取ると状況が簡単になります。棒の長さ L を無限大にすると力は

$$F_x \simeq 0, \quad F_y \simeq \alpha Q_0 \rho \frac{2y}{y^2 + z^2}, \quad F_z \simeq \alpha Q_0 \rho \frac{2z}{y^2 + z^2}$$

棒の長さが無限大になるために、 $x = 0$ に電荷がいなくても左右対称に力を受けて $F_x = 0$ になると言えます。このように、棒が無限大に長ければ、棒からのクーロン力は棒に対して垂直です (yz 平面での直線方向)。 z 軸を電荷の位置に取ってしまえば (z 軸を電荷の位置に合わせて決める)、 z 成分だけになり

$$F_z(z; L = \infty) = 2\alpha Q_0 \rho \frac{1}{z}$$

このときのポテンシャルは

$$U(b, a; \infty) = -2\alpha Q_0 \rho \log \frac{b}{a} = 2\alpha Q_0 \rho \log \frac{a}{b}$$

(1) で直接 $x, y = 0$ 、 L を無限大にすれば

$$\begin{aligned}
U(b, a) &= \alpha Q_0 \rho (\log |\frac{\sqrt{b^2 + L^2} + L}{\sqrt{b^2 + L^2} - L}| - \log |\frac{\sqrt{a^2 + L^2} + L}{\sqrt{a^2 + L^2} - L}|) \\
&= \alpha Q_0 \rho \log |\frac{\sqrt{b^2 + L^2} + L}{\sqrt{b^2 + L^2} - L} \frac{\sqrt{a^2 + L^2} - L}{\sqrt{a^2 + L^2} + L}| \\
&= \alpha Q_0 \rho \log |\frac{(\sqrt{b^2 + L^2} + L)^2}{b^2} \frac{a^2}{(\sqrt{a^2 + L^2} + L)^2}| \\
&= 2\alpha Q_0 \rho \log |\frac{a}{b} \frac{\sqrt{b^2 + L^2} + L}{\sqrt{a^2 + L^2} + L}| \\
&\Rightarrow 2\alpha Q_0 \rho \log \frac{a}{b}
\end{aligned} \tag{2}$$

となって、同じになります。最後に L を無限大にしています。もしくは、 F_z を先に $x, y = 0$ とするなら

$$F_z(x, y = 0) = -\alpha Q_0 \rho \frac{1}{z} \left(\frac{-L}{\sqrt{z^2 + L^2}} - \frac{L}{\sqrt{z^2 + L^2}} \right) = 2\alpha Q_0 \rho L \frac{1}{z\sqrt{z^2 + L^2}}$$

この場合のポテンシャルは (15) から

$$\begin{aligned}
U(b, a) &= - \int_a^b dz F_z = - 2\alpha Q_0 \rho L \int_a^b dz \frac{1}{z\sqrt{z^2 + L^2}} \\
&= - 2\alpha Q_0 \rho (\log |\frac{b}{\sqrt{b^2 + L^2} + L}| - \log |\frac{a}{\sqrt{a^2 + L^2} + L}|) \\
&= - 2\alpha Q_0 \rho \log |\frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2 + L^2} + L}{\sqrt{b^2 + L^2} + L}| \\
&= 2\alpha Q_0 \rho \log |\frac{a}{b} \frac{\sqrt{b^2 + L^2} + L}{\sqrt{a^2 + L^2} + L}|
\end{aligned}$$

これは (2) の下から 2 行目と同じです。

また、ポテンシャルの基準点 a を無限大に取れば

$$U_z(b, \infty) = 2\alpha Q_0 \rho \lim_{a \rightarrow \infty} \log |\frac{a}{b} \frac{1}{a} \frac{\sqrt{L^2 + b^2} + L}{\sqrt{1 + L^2/a^2} + L/a}| = 2\alpha Q_0 \rho \log |\frac{\sqrt{L^2 + b^2} + L}{b}|$$

となり、 L が b より十分大きければ

$$U_z(b, \infty) \simeq 2\alpha Q_0 \rho \log \frac{2L}{b} \quad (b \ll L)$$

となります。

ついでに、 ΔF_z から ΔU を求めて、 U にする手順も行ってみます。 ΔF_z は

$$\Delta F_z = \alpha Q_0 \rho \Delta x' \frac{z}{((x-x')^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

このポテンシャルは

$$\Delta U = -\alpha Q_0 \rho \Delta x' \int_a^b dz \frac{z}{(z^2 + (x-x')^2 + y^2)^{3/2}} = \alpha Q_0 \rho \Delta x' \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + (x-x')^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (x-x')^2 + y^2}} \right)$$

この x' 積分は (I1) から

$$\begin{aligned} U &= \alpha Q_0 \rho \int_{-L}^L dx' \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + b^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + a^2 + y^2}} \right) \\ &= -\alpha Q_0 \rho \int_{x+L}^{x-L} ds \left(\frac{1}{\sqrt{s^2 + b^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2 + y^2}} \right) \quad (s = x - x', \, ds = -dx') \\ &= -\alpha Q_0 \rho \left(\log \left| \frac{(x-L) + \sqrt{(x-L)^2 + b^2 + y^2}}{(x+L) + \sqrt{(x+L)^2 + b^2 + y^2}} \right| - \log \left| \frac{(x-L) + \sqrt{(x-L)^2 + a^2 + y^2}}{(x+L) + \sqrt{(x+L)^2 + a^2 + y^2}} \right| \right) \end{aligned}$$

となり、(1) と一致します。

キャパシタンスの定義を与えるために 2 次元も簡単に見ておきます。一定の電荷密度 λ を持つ厚さのない板を xy 平面上に置きます。棒の結果に対して y 軸方向の積分を加えればいいだけですが、一般的に行うととともに積分ができなくなるので、最初から無限大に広い板とします。無限大に広くするので、電荷 Q_0 は z 軸上にいるとして x, y 方向のズレは無視します。そうすると、板の微小部分 $\Delta S' = \Delta x' \Delta y'$ からのクーロン力は

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= \alpha Q_0 \frac{\lambda \Delta S'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^2} \frac{-x' \mathbf{e}_x - y' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z}{|x'^2 + y'^2 + z^2|} \\ \mathbf{F} &= \alpha Q_0 \lambda \int_{-L_2}^{L_2} dy' \int_{-L_1}^{L_1} dx' \frac{-x' \mathbf{e}_x - y' \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

奇関数になるので、 x, y 方向の力は 0 です。 z 方向は、 L_1, L_2 を無限大として、(I6) から

$$\begin{aligned}
F_z &= \alpha Q_0 \lambda z \int_{-L_2}^{L_2} dy' \int_{-L_1}^{L_1} dx' \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} \\
&= \alpha Q_0 \lambda z \int_{-L_2}^{L_2} dy' \frac{1}{y'^2 + z^2} \frac{2L_1}{\sqrt{L_1^2 + y'^2 + z^2}} \\
&\Rightarrow 2\alpha Q_0 \lambda z \int_{-L_2}^{L_2} dy' \frac{1}{y'^2 + z^2} \\
&= 2\alpha Q_0 \lambda z \frac{1}{z} \left(\arctan \frac{L_2}{z} - \arctan \frac{-L_2}{z} \right) \\
&= 2\alpha Q_0 \lambda z \frac{1}{z} \left(\arctan \frac{L_2}{z} + \arctan \frac{L_2}{z} \right) \quad (\arctan x = -\arctan(-x)) \\
&= 4\alpha Q_0 \lambda \frac{\pi}{2} \quad \left(\lim_{\theta \rightarrow \infty} \arctan \theta = \frac{\pi}{2} \right) \\
&= 2\pi\alpha Q_0 \lambda
\end{aligned} \tag{3}$$

矢印で無限大にしています。位置の依存性がなく、板から垂直な方向に一定の力が作用します。このように、無限大に広い板の場合は簡単に求まり、力は板から垂直な方向のみの定数という単純な結果になります。実際の板は有限の大きさですが、板の端付近を除けば（端に近づくほど作用する力の対称性がなくなる）、近似として使えます。このときの電荷 Q_0 のポテンシャルは

$$U(b, a) = - \int_a^b dz F_z = -2\pi\alpha Q_0 \lambda (b - a)$$

となります。

この結果からキャパシタンス（静電容量、capacitance）が定義されます。 x 軸上の板を A とし、 $z = z_0$ の xy 平面上に板 B を置きます。 A の全電荷を $-Q$ ($Q > 0$)、 B の全電荷を Q とします。そうすると、 A, B 間の電荷 $Q_0 > 0$ は A からの引力、 B からの斥力が作用します。無限大に広い板での力は (3) なので、単純に 2 倍され

$$F_z^{(AB)} = -4\pi\alpha Q_0 \lambda = -4\pi\alpha Q_0 \frac{Q}{S}$$

板の面積を形式的に S としています。 $z = 0$ から $z = z_0$ でのポテンシャルは

$$U^{(AB)} = - \int_0^{z_0} dz F_z = 4\pi\alpha Q_0 \frac{Q}{S} z_0$$

Q_0 を省いて電位ポテンシャル

$$V = 4\pi\alpha \frac{Q}{S} z_0$$

として

$$C = \frac{Q}{V}$$

と定義される C をキャパシタンスと呼びます。板の間のポテンシャルから電荷を省いて逆数にしたもので、板の大きさと板の間の距離に依存します。

B にいる電荷のポテンシャルを求めます。 A には $-Q$ の電荷があり、 B には電荷がないとし、 A 側から B の電荷が Q になるまで電荷を運びます。運ぶことで板の全電荷は変化するので、力は Q に依存するとして、 B にいるときの ΔQ のポテンシャルは

$$\Delta U = - \int_0^{z_0} dz F_z(Q) = V(Q) \Delta Q$$

キャパシタンスの関係は維持されているとして、0 から Q まで積分することで B にいる Q のポテンシャルは

$$U = \int_0^Q dQ V(Q) = \int_0^Q dQ \frac{Q}{C} = \frac{Q^2}{2C} \quad (4)$$

となります。

今の状況を利用した装置が作られています。まず、単語を与えます。電子が自由に動ける物質 (電流が流れる物質) を電気伝導体 (conductor)、電子が自由に動けない物質 (電流が流れない物質) を絶縁体 (insulator)、電場をかけたときに電流は流れず電荷分布が変化するだけの物質を誘電体 (dielectric) と言います。誘電体での電荷分布の変化は電気分極と呼ばれます (「物質中のマクスウェル方程式」参照)。絶縁体と誘電体はどちらも電子が自由に動けない物質を指しますが、電気分極が強く起きる物質の意味で誘電体が使われています。

2 枚の電気伝導体の板を、板の大きさに比べて十分小さい距離だけ離して平行に並べます。このようにすれば、無限大に広い板とした場合が近似として使えます。そして、板に何かしらの手段で片方の電荷が Q 、もう片方が $-Q$ になるまで電荷を送り込みます。板が $\pm Q$ の電荷を持った後に、板から板へ電荷が移動できる状況にすれば、板の間のポテンシャルに依存した電流が流れます (高い場所に物を置いて、落下させるような状況)。電流は電荷の時間微分なので

$$\frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

として、キャパシタンスは電流に影響を与えます。

このような装置をキャパシタ (蓄電器、capacitor) と言います。単純なキャパシタは誘電体を電気伝導体の板で挟むことで作られます。電気伝導体の間に誘電体があるので、何かの手段で電気伝導体に電荷を与えても電荷は移動しません (完全な絶縁体は存在しないので実際は少しずつ移動する)。このため、キャパシタは電荷を蓄えられ、(4) はキャパシタに蓄えられているエネルギーと呼ばれます。これに電荷が移動できる状況を与えることで、電流が流れます。

・補足

$$\bullet \quad I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{s^2 + c^2}} ds$$

s を

$$u = s + \sqrt{s^2 + c^2}, \quad du = ds + \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}} ds = \frac{u}{\sqrt{s^2 + c^2}} ds$$

として

$$I_1 = \int \frac{du}{u} = \log |u| = \log |s + \sqrt{s^2 + c^2}|$$

$$\bullet \quad I_2 = \int ds \frac{1}{(s^2 + c^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \int ds \frac{1}{(s^2 + c^2)^{3/2}} &= \int d\theta \frac{c}{\cos^2 \theta} \frac{1}{c^3} \frac{1}{(\tan^2 \theta + 1)^{3/2}} \quad (s = c \tan \theta, \quad ds = \frac{c}{\cos^2 \theta} d\theta) \\ &= \frac{1}{c^2} \int d\theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{c^2} \sin \theta \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad (\tan \theta = \frac{s}{c} \Rightarrow \sin \theta = \frac{s}{\sqrt{s^2 + c^2}}) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad I_3 = \int ds \frac{s}{(s^2 + c^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} \int ds \frac{s}{(s^2 + c^2)^{3/2}} &= \frac{1}{2} \int ds' \frac{1}{(s' + c^2)^{3/2}} \quad (s' = s^2, \quad ds' = 2s ds) \\ &= \frac{1}{2} \int du \frac{1}{u^{3/2}} \quad (u = s' + c^2) \\ &= -2u^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{s^2 + c^2}} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad I_4 = \int ds \frac{1}{s\sqrt{s + c^2}}$$

$$\begin{aligned}
\int ds \frac{1}{s\sqrt{s+c^2}} &= 2 \int du \frac{1}{u^2-c^2} \quad (u = \sqrt{s+c^2}, \quad du = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{s+c^2}} ds) \\
&= \frac{1}{c} \int du \left(\frac{1}{u-c} - \frac{1}{u+c} \right) \\
&= \frac{1}{c} \log \left| \frac{u-c}{u+c} \right| \\
&= \frac{1}{c} \log \left| \frac{\sqrt{s+c^2}-c}{\sqrt{s+c^2}+c} \right| \\
&= \frac{1}{c} \log \left| \frac{s}{(\sqrt{s+c^2}+c)^2} \right| \\
&= \frac{1}{c} \log \left| \frac{(\sqrt{s+c^2}-c)^2}{s} \right|
\end{aligned}$$

対数部分の変形は

$$\begin{aligned}
\log \left| \frac{\sqrt{s+c^2}-c}{\sqrt{s+c^2}+c} \right| &= \log \left| \frac{s+c^2-c^2}{(\sqrt{s+c^2}+c)^2} \right| = \log \left| \frac{s}{(\sqrt{s+c^2}+c)^2} \right| \\
\log \left| \frac{\sqrt{s+c^2}-c}{\sqrt{s+c^2}+c} \right| &= \log \left| \frac{(\sqrt{s+c^2}-c)^2}{s+c^2-c^2} \right| = \log \left| \frac{(\sqrt{s+c^2}-c)^2}{s} \right|
\end{aligned}$$

• $I_5 = \int ds \frac{1}{s\sqrt{s^2+c^2}}$
 s を

$$st = \sqrt{s^2+c^2} - c, \quad s = \frac{2ct}{1-t^2}, \quad ds = \frac{2c(1+t^2)}{(1-t^2)^2} dt$$

と置き換えて

$$s^2 + c^2 = \frac{4c^2t^2 + c^2(1-t^2)^2}{(1-t^2)^2} = c^2 \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}$$

から

$$\begin{aligned}
\int ds \frac{1}{s\sqrt{s^2+c^2}} &= \int dt \frac{2c(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \frac{1-t^2}{2ct} \frac{1}{c} \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{c} \int dt \frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{c} \log t \\
&= \frac{1}{c} \log \left| \frac{\sqrt{s^2+c^2}-c}{s} \right| \\
&= \frac{1}{c} \log \left| \frac{s}{\sqrt{s^2+c^2}+c} \right| \\
&= \frac{1}{2c} \log \left| \frac{\sqrt{s^2+c^2}-c}{\sqrt{s^2+c^2}+c} \right|
\end{aligned}$$

もしくは、 $s^2 = t$ とすれば I_4 になります。対数部分の変形は

$$\log \left| \frac{\sqrt{s^2+c^2}-c}{s} \right| = \log \left| \frac{\sqrt{s^2+c^2}-c}{s} \frac{\sqrt{s^2+c^2}+c}{\sqrt{s^2+c^2}+c} \right| = \log \left| \frac{s}{\sqrt{s^2+c^2}+c} \right|$$

これから

$$\frac{1}{2} (\log \left| \frac{\sqrt{s^2+c^2}-c}{s} \right| + \log \left| \frac{s}{\sqrt{s^2+c^2}+c} \right|) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{s^2+c^2}-c}{\sqrt{s^2+c^2}+c} \right|$$

- $I_6 = \int ds \frac{1}{s^2+c^2}$

$$\begin{aligned}
\int ds \frac{1}{s^2+c^2} &= \frac{1}{c^2} \int ds \frac{1}{s^2/c^2+1} \\
&= \frac{1}{c} \int ds' \frac{1}{s'^2+1} \quad (s' = \frac{s}{c}, \quad ds' = \frac{ds}{c}) \\
&= \frac{1}{c} \int d\theta \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \quad (s' = \tan \theta, \quad ds' = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta) \\
&= \frac{1}{c} \int d\theta \\
&= \frac{1}{c} \theta \\
&= \frac{1}{c} \arctan \frac{s}{c}
\end{aligned}$$