電荷の保存

電流を定義して、電荷の保存を表す連続の方程式を求めます。

電荷の移動によって起こる流れを電流 (current, electrical current) と呼びます。電荷を持った物体が電荷密度 ρ で分布し、それらが速度 v で動いているとき電流密度を

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

と定義します。電流は正の電荷なら v の方向、負の電荷なら $-v$ の方向に流れるので、負の電荷では電荷の動く方向と電流の方向が逆になります。これは煩わしいので、正の電荷として話を進めることが多いです。

点電荷による電流は、点電荷の電荷密度 $\rho(\mathbf{r}) = Q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ から

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = Q\mathbf{v}(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

点電荷は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ にいます。

ある領域内を通過する電荷の量として電流を定義します。速度は位置ベクトルを $\mathbf{x}$ とすれば

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (\mathbf{x} = (x, y, z))$$

$\Delta t \rightarrow 0$ の極限によって $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ と $\mathbf{x}(t)$ の差もなくなっていき、位置 $\mathbf{x}(t)$ の速度となります。なので、近似的に

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t} \quad (\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z))$$

と書けます。 x 軸方向だけを考えて、 x 軸に垂直な面積が $\Delta\sigma$ の微小な面を用意します。この面上に $\mathbf{j} = (j_x, 0, 0)$ がいるとし

$$j_x = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$j_x \Delta\sigma \Delta t = \rho \Delta x \Delta\sigma$$

右辺は微小な直方体 (底面 $\Delta\sigma$ 、高さ Δx) の中にある電荷の量です。これに対応して、左辺の $j_x \Delta\sigma$ は単位時間あたりの直方体の中にある電荷の量とみなせます (時間 Δt をかけると電荷の量になるから)。そして、 $\Delta x / \Delta t$ を $\Delta t \rightarrow 0$ の極限にし速度とします。この極限を取ると Δx も小さくなっていくことから、直方体は潰れていき $\Delta\sigma$ の面だけになります。つまり、 $j_x \Delta\sigma$ は単位時間あたりに $\Delta\sigma$ の面を垂直に通過する電荷の量となり、 j_x は単位時間、単位面積あたりに $\Delta\sigma$ の面を垂直に通過する電荷の量と言えます。

y, z 軸でも同様です。つまり、電流密度 $\mathbf{j}$ がある微小な面 Δs を通過するとき、その面に垂直な電流密度の成分をかけることで、その面を単位時間あたりに通過する電荷の量となります。これが、電流密度を、電流密度に垂直な面の単位面積を単位時間あたりに通過する電荷の量として定義する理由です。

面 Δs に垂直な電流密度の成分は面の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ から $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ で取り出せるので、 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta s$ が微小な面を単位時間あたりに通過する電荷量になります (面に平行な成分は面を通過できない)。例えば、 Δs が yz 平面上の

面とすれば $(j_x, j_y, j_z) \cdot (1, 0, 0) = j_x$ となります。これを任意の曲面 S を構成する全ての微小な面に対して足しあげて、面積分の極限に持っていけば

$$\sum_i \mathbf{j}(\mathbf{x}_i, t) \cdot \mathbf{n}_i \Delta s_i \Rightarrow I = \int_S ds \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$$

となり、これが任意の曲面 S を単位時間あたりに通過する電荷の量になります。この I を電流と定義します。この定義から、時間 Δt で通過する電荷の量が ΔQ なら電流は

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \Rightarrow I = \frac{dQ}{dt}$$

と与えられます。時間に対して一定の電流 (時間に依存しない電流) を定常電流と言い、 $\partial \mathbf{j} / \partial t = 0$ です。言葉の区別ですが、静止 (static) は時間に対して動いていない場合、定常 (steady) は時間に対して状態が一定 (状態が変化しない) の場合です。定常では状態が一定であれば運動が起きていてもいいです。電流が時間依存せずに一定に流れるので定常電流です。また、電荷がどこかに貯まったり飛び出したりすると定常電流ではなくなります。

電荷と電流密度の関係を作ります。ある閉曲面 S で囲まれた領域 $\mathcal{V}$ があり、そこに電荷密度 $\rho(\mathbf{x}, t)$ が分布しているとします。この領域での全電荷は

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} d\tau \rho(\mathbf{x}, t)$$

と与えられます。ここで、領域 $\mathcal{V}$ 内の電荷が減っているとします。どれだけ減っているかは時間微分から分かります。そうすると、電流密度を使って

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_S ds \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (ds = \mathbf{n} ds)$$

$\mathbf{n}$ は $\mathcal{V}$ の外側を向く単位法線ベクトルです。電荷は減るので左辺でマイナスをつけています。

左辺は全電荷の時間変化、右辺は閉曲面 S を通過する電荷の量を表します。右辺は $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ によって曲面の法線方向 (外向き) に向くので、積分結果が正の値を持つなら閉曲面から出て行く電荷の量になります。正の値だと出て行く量になるのは、 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta S = |\mathbf{j}| \cos \theta \Delta S$ を足し上げるときに (ΔS は面積で正)、法線ベクトルとの角度 θ が $\theta < \pi/2$ なら正、 $\theta > \pi/2$ なら負なので、90度以下となる外向きの $\mathbf{j}$ を足し上げた結果の方が大きければ出て行く量になるからです。そして、左辺は電荷が減ると正になります。つまり、領域から出て行く電荷の量は電荷の減少量と等しいと言っています。

同じ意味を表す微分による形にします。左辺は領域 $\mathcal{V}$ は時間で変化しないとして

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d\tau \rho(\mathbf{x}, t) = -\int_{\mathcal{V}} d\tau \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t)$$

τ 積分 (3次元積分) の範囲 $\mathcal{V}$ は時間と無関係なので偏微分にしています。右辺はガウスの発散定理から

$$\oint_S ds \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{V}} d\tau \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$$

なので

$$-\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$$

これを連続の方程式 (equation of continuity) と呼び、領域 $\mathcal{V}$ 内の電荷が減る量は、 $\mathcal{V}$ から出ていく電荷の量と等しいことを表します。つまり、連続の方程式が満たされるなら、電荷は勝手に増えたり減ったりしません。ある現象において電荷の量が変わらないことを電荷の保存 (charge conservation) と呼び、電荷の保存は物理での基本的な原理の 1 つです (否定的な実験結果は今のところない)。

連続の方程式の意味を別の視点から見ていきます。何かの物質が集まって流れていて、その流れの密度を J とします (電流密度にするなら J を j にすればいい)。まずは、簡単な状況で行います。底面が x 軸に垂直になるように円筒を置き、時間 t のときに円筒の底面に物質が単位時間あたりに $(J\sigma)_{in}$ 入ってきているとします。 J は単位時間、単位面積あたりの物質質量で、 $\sigma > 0$ は円筒の断面積です。 $(J\sigma)_{in}$ で流入してくる量になるとして、 J は y, z には依存せず x にのみ依存しています (底面のどこでも J)。そして、同じ時間 t で上面から $(J\sigma)_{out}$ が流出しているとして、そうすると、円筒内に物質は単位時間あたりに

$$(J\sigma)_{out} - (J\sigma)_{in}$$

だけたまります。円筒の長さを縮めていき、高さが微小な Δx になったとき、 J は位置に依存しているので底面上の点 x によって、 $(J\sigma)_{in}$ を $J(x)\sigma$ とすれば $(J\sigma)_{out}$ は $J(x + \Delta x)\sigma$ と書けるので

$$(J\sigma)_{out} - (J\sigma)_{in} = J(x + \Delta x, t)\sigma - J(x, t)\sigma \simeq \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \sigma \Delta x$$

と書き換えられます。底面上で J は等しいとしているので、 $\partial J / \partial x$ は底面上の点から単位時間、単位体積あたりに出ている物質質量です。そして、 $J\sigma$ は単位時間あたりの量なので、微小時間 Δt 経過すると物質は

$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \sigma \Delta t \Delta x$$

だけたまります。円筒内に物質が増えていくとすれば $(J\sigma)_{in} > (J\sigma)_{out}$ なので

$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \sigma \Delta t \Delta x < 0$$

これにともなって円筒内の物質の密度 $\rho(x, t) > 0$ も変化するので微小時間 Δt の後に密度は

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \Delta t > 0$$

となります (増加するので正)。そして、これに体積 $\sigma \Delta x$ をかけることで、円筒内の物質質量と物質の流入、流出の量とのつり合いから

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \sigma \Delta t \Delta x &= - \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} \sigma \Delta t \Delta x \\ \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

という式が出てきます。このように、つり合いを表す式 (物質は勝手に消えないことを表す式) のことを連続の方程式と呼びます。

$(J\sigma)_{in}$ と $(J\sigma)_{out}$ の関係を円筒内に物質がたまるようにしましたが、減る場合では $(J\sigma)_{in} < (J\sigma)_{out}$ なので

$$-\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}\sigma\Delta t\Delta x == \frac{\partial J(x)}{\partial x}\sigma\Delta t\Delta x$$

$(J\sigma)_{in}, (J\sigma)_{out}$ の両方が円筒から出ていく場合では、 $(J\sigma)_{in}$ の符号を反転させればいいので $((J\sigma)_{in}$ は物質をためる量、 $(J\sigma)_{out}$ は減らす量として定義しているから)、円筒内にたまる量 (出て行く量) は

$$-(J(x,t)\sigma)_{in} + (J(x+\Delta x,t)\sigma)_{out} = \frac{\partial J(x,t)}{\partial x}\sigma\Delta x < 0$$

よって

$$-\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}\sigma\Delta t\Delta x == \frac{\partial J(x,t)}{\partial x}\sigma\Delta t\Delta x$$

入ってきている場合は

$$(J(x,t)\sigma)_{in} - (J(x+\Delta x,t)\sigma)_{out} = -\frac{\partial J(x,t)}{\partial x}\sigma\Delta x > 0$$

なので

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}\sigma\Delta t\Delta x == -\frac{\partial J(x,t)}{\partial x}\sigma\Delta t\Delta x$$

となって、全ての場合で同じ連続の方程式になります。

J の位置依存性を x にのみにしましたが、 $J(x,t)$ に依存するとして 3 次元へ拡張しても同様にできます。この場合は、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の直方体とします。 x 軸に垂直な $\Delta y\Delta z$ の面には $\mathbf{J}(x,t) = (J_x(x,t), J_y(x,t), J_z(x,t))$ の $J_x(x,t)$ を使うことで $(J\sigma)_{in}$ を $J_x\Delta y\Delta z$ と書けます。、 $\Delta x\Delta z, \Delta x\Delta y$ の面でも $J_y\Delta x\Delta z, J_z\Delta x\Delta y$ となるので ($\Delta\mathbf{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$)、物質の流入と流出は

$$(J\sigma)_{in} \Rightarrow J_x(x,t)\Delta y\Delta z + J_y(x,t)\Delta x\Delta z + J_z(x,t)\Delta x\Delta y$$

$$(J\sigma)_{out} \Rightarrow J_x(x+\Delta x, y, z, t)\Delta y\Delta z + J_y(x, y+\Delta y, z, t)\Delta x\Delta z + J_z(x, y, \Delta z, t)\Delta x\Delta y$$

この微小な領域での物質の流入と流出のつり合いから

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(x,t) \end{aligned}$$

となり、3次元での連続の方程式となります。例えば ρ が質量密度なら、第一項の次元は $MT^{-1}L^{-3}$ なので (L は長さ、 M は質量、 T は時間の次元)、 $\mathbf{J}$ の次元は $MT^{-1}L^{-2}$ になります。なので、 $\mathbf{J}$ は物質の速度 $\mathbf{v}$ と密度 ρ によって $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ と書けます。 ρ を電荷密度とすれば、 $\mathbf{J}$ は電流密度となります。

また、単位時間あたりに微小領域に増えていく (もしくは減っていく) 量を F とすれば

$$F = \frac{J_x(x + \Delta x, y, z, t) - J_x(x, t)}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z + \dots$$

$$\frac{F}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{J_x(x + \Delta x, y, z, t) - J_x(x, t)}{\Delta x} + \frac{J_y(x, y + \Delta y, z, t) - J_y(x, t)}{\Delta y} + \frac{J_z(x, y, z + \Delta z, t) - J_z(x, t)}{\Delta z}$$

と書けるので、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が 0 の極限で位置 x の点において

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{F}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial J_x(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(x, t)}{\partial y} + \frac{\partial J_z(x, t)}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{j}(x, t)$$

これから、 $\nabla \cdot \mathbf{j}(x, t)$ は点 x での単位時間、単位体積あたりの物質の流入量もしくは流出量とみなせます。そして、連続の方程式は点 x での物質のつりあいの式と言えます。 $\partial \rho / \partial t = 0$ のとき $\nabla \cdot \mathbf{J}(x, t) = 0$ となり、その点での物質の流入、流出が 0 になります (少しその点から引いて見ればその点付近で流入量と流出量が打ち消しあっている)。これは先に見た閉曲面全体を通過するとした話を、ある点という局所的な場合で見た話です。このことを感覚的に言うておきます。

簡単にするために、閉曲面は立方体、 $\mathbf{J}$ は x 軸方向のみとし ($\mathbf{J} = (J, 0, 0)$)、物質は x 軸に垂直な 2 つの面からのみ出入りするとします。 x 軸に垂直な面上の点 P には外向きに $J_{out}(P)$ がいて物質量 $Q_{out}(P)$ が流出していますが、 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ のとき、点 P だけを局所的にみると点 P での物質量の変化はないです。ここから、点 P を少し引いて見るために、立方体内に点 P を含む面を流出口とする微小領域を作ります。そうすると、この微小領域に $J_{in}(P)$ によって物質量 $Q_{in}(P)$ が流入しているなら、 $Q_{out}(P) = Q_{in}(P)$ とすることで物質量の変化はないと見れます。一方で、微小領域に物質が流入するためには、さらに引いて見れば立方体内に $Q_{in}(P)$ の物質が補給されている必要があります。これは、立方体の外部から入ってくる量によって補給されるので、逆の面での点 P' から入ってきている量のはずです。なので、立方体全体から見ると、 $Q_{out}(P) = Q_{in}(P) = Q_{in}(P')$ となっているはず。これが他の面上の点でも成立しているなら面積分によって、立方体での物質の出入りの量が 0 というのに対応します。このように局所的な状況から引いていき全体的に見ることで積分での結果に対応します。これは、微分は運動の瞬間的な様子を記述するのに対して、積分は運動の全体的な様子を記述するというのと同じです。

ちなみに、領域 $\mathcal{V}$ の全物質量の時間微分が 0 のとき

$$\oint_S ds \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \int_{\mathcal{V}} d\tau \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

となり、今の話 (物質が入ってくる量と出て行く量の和が 0) と合わせることで、これがベクトル $\mathbf{A}$ の発散が $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ なら湧き出しがないとか表現される理由となります。