

双極子

正負の電荷があるときの電気双極子と、磁場での磁気双極子を見ていきます。
ここでの電場、磁場は静電場、静磁場です。

原点を中心に z 軸上に 2 つの電荷 q_1, q_2 を配置し、 $q = q_1 = -q_2$, $q_1 + q_2 = 0$ とします。 q_1, q_2 の間の距離は d とし、原点からの距離はそれぞれ $\pm d/2$ です。このように同じ大きさの正負の電荷を置いたものを電気双極子 (electric dipole) と呼びます。位置 $\mathbf{r}$ の電位ポテンシャルは、 q_1 からの距離を r_+ 、 q_2 からの距離を r_- とすれば、重ね合わせによって

$$V(\mathbf{r}) = \alpha \left(\frac{q_1}{r_+} + \frac{q_2}{r_-} \right)$$

z 軸方向のベクトル (q_2 から q_1 へのベクトル) と $\mathbf{r}$ による角度を θ として

$$r_+^2 = \left(\frac{d}{2} - r \cos \theta \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta = r^2 + \frac{d^2}{4} - dr \cos \theta \quad (r = |\mathbf{r}|)$$

$$r_-^2 = \left(\frac{d}{2} + r \cos(\pi - \theta) \right)^2 + r^2 \sin^2(\pi - \theta) = r^2 + \frac{d^2}{4} + dr \cos \theta \quad (\cos \theta = -\cos(\pi - \theta))$$

d は r に比べて十分小さいとすれば

$$r_{\pm}^2 = r^2 \left(1 + \frac{d^2}{4r^2} \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right) \simeq r^2 \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)$$

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{d}{r} \cos \theta \right)$$

よって、電気双極子から十分遠い位置 (2 つの電荷の距離に比べて遠い位置) の電位ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &\simeq \alpha \left(q_1 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2} \frac{d}{r^2} \cos \theta \right) + q_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{d}{r^2} \cos \theta \right) \right) \\ &= \alpha \frac{1}{2} \frac{d}{r^2} (q_1 - q_2) \cos \theta \\ &= \alpha \frac{qd}{r^2} \cos \theta \end{aligned} \tag{1}$$

と求まります。 $p = qd$ を電気双極子モーメント (electric dipole moment) と呼びます。

z 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_z$ 、 $\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$ とすれば、 $\mathbf{p} = qd\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r = \cos \theta$ から

$$V(\mathbf{r}) = \alpha \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} = \alpha \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \tag{2}$$

極座標 (r, θ, φ) での ∇ は

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

なので、電場は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla V = -\alpha(\mathbf{e}_r qd \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} + \mathbf{e}_\theta \frac{qd}{r^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta) \\ &= \alpha \frac{qd}{r^3} (2\mathbf{e}_r \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta) \end{aligned}$$

もしくは

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta$$

から

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \alpha \frac{qd}{r^3} (3\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_z) = \alpha \frac{1}{r^3} (3\mathbf{e}_r (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{p}) = \alpha \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{p}}{r^5} \quad (3)$$

$\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ が直交しているなら ($\theta = \pm\pi/2$)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\alpha \frac{r^2 \mathbf{p}}{r^5} = -\alpha \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

となります。

原点を挟むように配置しましたが、電荷 q_1, q_2 の位置を $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \Delta \mathbf{d}$, $\mathbf{r}_2$ としても同様です。位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ の電位ポテンシャルは

$$V(\mathbf{r}) = \alpha \left(\frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right) = \alpha q \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} \right)$$

第一項を展開すれば

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 - \Delta \mathbf{d}|} &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \Delta d_x \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \Delta d_y \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \Delta d_z \frac{\partial}{\partial z_2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} - \Delta \mathbf{d} \cdot \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} + \dots \end{aligned}$$

∇_2 は $\mathbf{r}_2$ でのナブラです。微分は

$$\nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}$$

なので

$$V(\mathbf{r}) \simeq -\alpha q \Delta \mathbf{d} \cdot \nabla_2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} = \alpha \frac{q \Delta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} = \alpha \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3}$$

$\mathbf{r}_2$ は $\mathbf{r}$ に比べて小さいとすれば、(1) と一致します。

電荷密度による電位ポテンシャルに同じ近似を使ってみます。電荷密度を $\rho(\mathbf{r})$ として、位置 $\mathbf{r}$ での電位ポテンシャルは

$$V(\mathbf{r}) = \alpha \int_{\mathcal{V}} d\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$d\tau'$ は $\mathbf{r}'$ の 3 次元積分、 $\mathcal{V}$ は 3 次元領域です。 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ の間の角度を ϕ として

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 &= (|\mathbf{r}| \cos \phi - |\mathbf{r}'|)^2 + |\mathbf{r}|^2 \sin^2 \phi = |\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{r}'|^2 - 2|\mathbf{r}||\mathbf{r}'| \cos \phi \\ &= |\mathbf{r}|^2 \left(1 - 2 \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} \cos \phi + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2}\right) \quad (\cos \phi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}||\mathbf{r}'|}) \end{aligned}$$

$|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ とすれば、括弧内の第二項以降は微小なので

$$(1 + \epsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \dots \quad (\epsilon = -2 \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} \cos \phi + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2})$$

と展開でき

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} (1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \frac{3}{8}\epsilon^2 - \dots\right) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 - \frac{1}{2} \left(-2 \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} \cos \phi + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2}\right) + \frac{3}{8} \left(-2 \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} \cos \phi + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2}\right)^2 - \dots\right) \\ &\simeq \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|^2} \cos \phi \end{aligned}$$

これによって

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &\simeq \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|} \int_{\mathcal{V}} d\tau' \rho(\mathbf{r}') + \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|^2} \int_{\mathcal{V}} d\tau' |\mathbf{r}'| \rho(\mathbf{r}') \cos \phi \\ &= \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|} \int_{\mathcal{V}} d\tau' \rho(\mathbf{r}') + \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|^3} \int_{\mathcal{V}} d\tau' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4)$$

これが $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ となる場合、つまり電荷密度が分布する場所から十分遠い位置の電位ポテンシャル (電場) に対する近似です。第一項は $\mathbf{r}' = 0$ に電荷が集まっているときの電位ポテンシャルと同じで、全体の電荷が 0 なら消えます。第二項は、(1) から電気双極子の寄与に見えます。実際に、後で見るように第二項から (1) が出てきます。

このように、 $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$ として $1/|\mathbf{r}|$ で展開していくことを多重極展開 (multipole expansion) と呼びます。 $\cos \phi$ を使った形で言えば、 $1/|\mathbf{r}|^3$ の項は 4 重極 (quadrupole) と呼ばれ 4 個の電荷 (正負が各 2 個) によって構成され、 $1/|\mathbf{r}|^4$ の項は 8 重極 (octopole) と呼ばれ 8 個の電荷 (正負が各 4 個) で構成されます。このような名前の付け方に

従って、点電荷 (1 個の電荷) を単極子 (モノポール、monopole) と呼びます。ただし、単極子と言ったときは大抵は磁場での磁気単極子 (magnetic monopole) を指します。これは電場では単極子は点電荷なのでわざわざ言い換える必要がないのに対して、磁気単極子は発見されていないからです。

(4) の第二項を

$$V_{\text{dip}} = \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \int_V d\tau' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') = \frac{\alpha}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$$

とすれば、(2) との対応から $\mathbf{p}$ は電気双極子モーメントに見えます。点電荷の分布とすれば

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^N q_i \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)$$

$\mathbf{r}_i$ は点電荷の位置です。これによって

$$\mathbf{p} = \int_V d\tau' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^N q_i \int_V d\tau' \mathbf{r}' \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i$$

$N = 2$ で、 $q = q_1 = -q_2$ とすれば

$$\mathbf{p} = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2 = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = q\mathbf{d}$$

これを V_{dip} に入れると

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{\alpha q}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{r}|} = \frac{\alpha q}{|\mathbf{r}|^2} \frac{|\mathbf{r}| |\mathbf{d}| \cos \theta}{|\mathbf{r}|} = \alpha \frac{q |\mathbf{d}| \cos \theta}{|\mathbf{r}|^2}$$

$\mathbf{d}$ は q_2 から q_1 へのベクトルなので、(1) と一致します。というわけで、電荷密度に対する電気双極子モーメントは

$$\mathbf{p} = \int_V d\tau' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')$$

となります。

電気双極子モーメントはトルクと関係しています。 xy 平面とし、 y 軸上で原点から $\pm d/2$ の位置に $\pm q$ の電荷がいるとします。これを長さ d の棒の両端に電荷がいるように見て、 y 軸から x 軸方向に角度 θ だけ回転させます。そして、 $-y$ から $+y$ 方向への定数の電場 E があるとします。そうすると、 y 軸方向に対して $+q$ の電荷は qE の力、 $-q$ の電荷は $-qE$ の力を受けます。トルクは力が作用する位置 (今の場合は原点と電荷の距離) と作用している力のベクトル積なので、このときのトルクの大きさは

$$N = qdE \sin \theta$$

このため、トルク N は双極子モーメント $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ ($\mathbf{d}$ は $-q$ から $+q$ への方向) を使って

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

と書けます。

磁場でも同様のことを考えます。しかし、電荷に対応する磁荷の存在は確かめられていないので、ベクトルポテンシャルの多重極展開から双極子に対応する項を取り出します。ベクトルポテンシャル A は

$$A(\mathbf{r}) = \beta \int_V d\tau' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\beta = \beta_m \beta_b)$$

$\mathbf{j}$ は電流密度です。遠い地点での A とするために、 $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ として

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 - \frac{1}{2} \left(-2 \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} \cos \phi + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2} \right) + \frac{3}{8} \left(-2 \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|} \cos \phi + \frac{|\mathbf{r}'|^2}{|\mathbf{r}|^2} \right)^2 - \dots \right) \\ &\simeq \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{|\mathbf{r}'|}{|\mathbf{r}|^2} \cos \phi \end{aligned}$$

を使えば

$$A(\mathbf{r}) \simeq \beta \frac{1}{|\mathbf{r}|} \int_V d\tau' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \beta \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \int_V d\tau' |\mathbf{r}'| \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cos \phi \quad (5)$$

と展開されます。電位ポテンシャルと同じように考えれば、第一項は単極子、第二項は双極子の項です。磁場の双極子は磁気双極子 (magnetic dipole) と呼ばれます。双極子と言っていますが後で見るように、円状に流れる電流によって発生する磁場に対応します。

第一項は

$$\nabla \cdot (x \mathbf{j}(\mathbf{r})) = x \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \nabla x = x \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + j_x \quad (\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z))$$

$$\nabla \cdot (y \mathbf{j}(\mathbf{r})) = y \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + j_y$$

$$\nabla \cdot (z \mathbf{j}(\mathbf{r})) = z \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + j_z$$

から

$$\int_V d\tau' \nabla \cdot (x \mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int_V d\tau' x \nabla \cdot \mathbf{j} + \int_V d\tau' j_x$$

左辺はガウスの発散定理によって

$$\int_V d\tau' \nabla \cdot (x \mathbf{j}(\mathbf{r})) = \int_S d\mathbf{S} \cdot x \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$$

S は V の表面です。3次元積分の領域は電流密度を囲っているなので、領域の表面では電流密度は0です。そして、電荷密度が時間依存していないときの電荷の保存 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ から

$$\int_V d\tau' j_x = 0, \quad \int_V d\tau' j_y = 0, \quad \int_V d\tau' j_z = 0 \quad (6)$$

となるので、(5)での第一項は0です。このため単極子(磁荷)の項が出てきません。これは、磁場は電場と違い

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

となっているために密度の項がないことと、単極子が発見されていないことを反映しています。というわけで、(5)は第二項だけが残る、ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \beta \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \int_V d\tau' |\mathbf{r}'| \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cos \phi = \beta \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \int_V d\tau' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') \quad (7)$$

となります。

(7)をさらに見ていきます。そのための関係を出します。まず、 $\nabla \cdot (x\mathbf{j}(\mathbf{r}))$ は

$$\nabla \cdot (x\mathbf{j}(\mathbf{r})) = j_x \quad (\nabla' = (\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}))$$

$$\nabla \cdot (x\mathbf{j}(\mathbf{r}))\mathbf{r} = j_x \mathbf{r}$$

$$\int_V d\tau \nabla \cdot (x\mathbf{j}(\mathbf{r}))\mathbf{r} = \int_V d\tau j_x \mathbf{r}$$

これの左辺は

$$\int_V d\tau \nabla \cdot (x\mathbf{j}(\mathbf{r}))x = \int_V d\tau \nabla \cdot (xx\mathbf{j}(\mathbf{r})) - \int_V d\tau x\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \nabla x = - \int_V d\tau x j_x$$

$$\int_V d\tau \nabla \cdot (x\mathbf{j}(\mathbf{r}))y = \int_V d\tau \nabla \cdot (xy\mathbf{j}(\mathbf{r})) - \int_V d\tau x\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \nabla y = - \int_V d\tau x j_y$$

$$\int_V d\tau \nabla \cdot (x\mathbf{j}(\mathbf{r}))z = - \int_V d\tau x j_z$$

$\nabla \cdot (y\mathbf{j}(\mathbf{r}))$, $\nabla \cdot (z\mathbf{j}(\mathbf{r}))$ でも同様なので

$$\int_V d\tau' x'_i j_k(\mathbf{r}') = - \int_V d\tau' j_i(\mathbf{r}') x'_k$$

ローマ文字の添え字は 1, 2, 3 ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) です。 $\mathbf{r}$ の内積を作用させれば

$$\int_V d\tau' \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' j_k(\mathbf{r}') = - \int_V d\tau' \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}') x'_k$$

ベクトル3重積

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbf{Z} = \mathbf{Y}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Z}) - \mathbf{Z}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})$$

と合わせると

$$\begin{aligned}
\int_V d\tau' \mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) &= \int_V d\tau' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \mathbf{r}' - \int_V d\tau' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\
&= -2 \int_V d\tau' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}')
\end{aligned} \tag{8}$$

これを (7) に使えば

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\text{dip}} &= \beta \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \int_V d\tau' (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') \\
&= -\frac{\beta}{2|\mathbf{r}|^3} \int_V d\tau' \mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}) \\
&= \beta \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}
\end{aligned}$$

$\mathbf{m}$ は磁気双極子モーメント (magnetic dipole moment) と呼ばれ

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V d\tau' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})$$

と定義されています。ただし、 β を含めて定義される場合もあるので注意してください。

定常電流 I は電流密度と電流が流れる微小な曲線 $d\mathbf{l}$ によって

$$j d^3x = I d\mathbf{l}$$

と書けるので、磁気双極子モーメントは

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \int \mathbf{r}' \times d\mathbf{l}'$$

$d\mathbf{l}'$ は $\mathbf{r}'$ の変化のことなので $d\mathbf{r}'$ です。 $|\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'|/2$ は電流が流れている部分を縁とする微小な三角形の面積なので、その積分結果を a として

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \int \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' = I \mathbf{a}$$

$\mathbf{a}$ は $d\mathbf{r}'$ と $\mathbf{r}'$ による面に対する法線方向です。

$\mathbf{A}_{\text{dip}}$ での磁場を求めます。ベクトル公式

$$\nabla \times (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \nabla \cdot \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \nabla \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{Y} \cdot \nabla) \mathbf{X} - (\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{Y} \tag{9}$$

から

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}_{\text{dip}} = \beta \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) = \beta \mathbf{m} \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \beta \mathbf{m} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \\
&= \beta \mathbf{m} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \right) - \beta \mathbf{m} \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}
\end{aligned}$$

第一項は $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ と

$$\begin{aligned}
\left(x \frac{\partial}{\partial x} + \dots \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} &= \left(x \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial |\mathbf{r}|} + \dots \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} = x \frac{\partial |\mathbf{r}|}{\partial \mathbf{r}} \frac{-3}{|\mathbf{r}|^4} + \dots \\
&= \frac{x^2}{|\mathbf{r}|} \frac{-3}{|\mathbf{r}|^4} + \frac{y^2}{|\mathbf{r}|} \frac{-3}{|\mathbf{r}|^4} + \frac{z^2}{|\mathbf{r}|} \frac{-3}{|\mathbf{r}|^4} \dots \\
&= \frac{-3}{|\mathbf{r}|^3}
\end{aligned}$$

から、消えます。第二項は

$$\begin{aligned}
\nabla_x \frac{x}{|\mathbf{r}|^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \frac{\partial}{\partial x} x + x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3x^2}{|\mathbf{r}|^5} \\
\nabla_x \frac{y}{|\mathbf{r}|^3} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \frac{\partial}{\partial x} y + y \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{3xy}{|\mathbf{r}|^5}
\end{aligned}$$

のようになっているので

$$\nabla_i \frac{x_j}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \nabla_i x_j + x_j \nabla_i \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3x_i x_j}{|\mathbf{r}|^5}$$

δ_{ij} はクロネッカーデルタです。まとめると、磁場は磁気双極子モーメントによって

$$\mathbf{B}_j(\mathbf{r}) = (\nabla \times \mathbf{A}_{\text{dip}})_j = -\beta \sum_{i=1}^3 m_i \left(\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{3x_i x_j}{|\mathbf{r}|^5} \right) = \beta \frac{3x_j (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - |\mathbf{r}|^2 m_j}{|\mathbf{r}|^5} \quad (10)$$

これは電気双極子での (3) と同じ形です。そして、円状の電流によって発生する磁場はこの形になります (下の補足参照)。

磁気双極子モーメントもトルクと関係します。磁場が定常電流 I に作用する力はビオ・サバールの法則から

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\beta_b} I \int_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') = \frac{1}{\beta_b} \int_V d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')$$

簡単のために磁場は定数とします。トルクは力が作用する部分への位置ベクトルと作用する力 $\Delta \mathbf{F}$ のベクトル積なので、全体のトルクは

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\beta_b} \int_V d^3x' \mathbf{r}' \times (\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\beta_b} \int_V d^3x' ((\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) \mathbf{j} - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}) \mathbf{B})$$

括弧内の第二項は、 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ から

$$\nabla \cdot (|\mathbf{r}|^2 \mathbf{j}) = 2|\mathbf{r}| \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{j} + |\mathbf{r}|^2 \nabla \cdot \mathbf{j} = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{j} + |\mathbf{r}|^2 \nabla \cdot \mathbf{j} = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}$$

となっているので

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{j}) = \int_{\mathcal{V}} d^3x' \nabla' \cdot (|\mathbf{r}'|^2 \mathbf{j}) = 0$$

となり、トルクは

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d^3x' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) \mathbf{j}(\mathbf{r}') = -\mathbf{B} \times \frac{1}{2\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d^3x' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = \frac{1}{\beta_b} \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

このように磁気双極子モーメントが現れます。

ついでに、力が磁気モーメントを含んでいることも見ておきます。磁場は $\mathbf{r}' = 0$ 付近で寄与しているとして

$$\begin{aligned} B_i(\mathbf{r}') &\simeq B_i(0) + \frac{\partial B_i(\mathbf{r})}{\partial x} \Big|_{x=0} x' + \frac{\partial B_i(\mathbf{r})}{\partial y} \Big|_{y=0} y' + \frac{\partial B_i(\mathbf{r})}{\partial z} \Big|_{z=0} z' \\ &= B_i(0) + (\mathbf{r}' \cdot \nabla) B_i(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} \end{aligned}$$

とすれば

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(0) + \frac{1}{\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} \\ &= \frac{1}{\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{B}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} \end{aligned}$$

第一項は (6) から消えます。 $\mathbf{B}$ を作る電流は $\mathcal{V}$ の外側にいるので、 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ です。そうすると

$$\nabla(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}) = (\mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{Y} + (\mathbf{Y} \cdot \nabla) \mathbf{X} + \mathbf{X} \times (\nabla \times \mathbf{Y}) + \mathbf{Y} \times (\nabla \times \mathbf{X})$$

から

$$\nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) \Big|_{\mathbf{r}=0} = (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{B} \Big|_{\mathbf{r}=0} + \mathbf{r}' \times (\nabla \times \mathbf{B}) \Big|_{\mathbf{r}=0} = (\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{B} \Big|_{\mathbf{r}=0}$$

なので

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\beta_b} \int_{\mathcal{V}} d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) \Big|_{\mathbf{r}=0}$$

これは

$$\nabla \times (f(\mathbf{r})\mathbf{X}) = f(\mathbf{r})(\nabla \times \mathbf{X}) - \mathbf{X} \times \nabla f(\mathbf{r})$$

から

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B}) = -\nabla \times ((\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{j}(\mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}=0}$$

となるので

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{\beta_b} \nabla \times \int_V d^3x' (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{j}(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}=0}$$

(8) での $\mathbf{r}$ を $\mathbf{B}$ にすれば

$$\int d^3x' \mathbf{B} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) = -2 \int d^3x' (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}')$$

これを使えば

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2\beta_b} \nabla \times (\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \int_V d^3x' (\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}'))|_{\mathbf{r}=0} = \frac{1}{\beta_b} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m})|_{\mathbf{r}=0}$$

と書けます。また、(9) を使えば

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\beta_b} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{m})|_{\mathbf{r}=0} = \frac{1}{\beta_b} (-\mathbf{m} \nabla \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B})|_{\mathbf{r}=0} \\ &= \frac{1}{\beta_b} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}|_{\mathbf{r}=0} \quad (\nabla \cdot \mathbf{B} = 0) \\ &= \frac{1}{\beta_b} \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})|_{\mathbf{r}=0} \end{aligned}$$

と変形できます。

磁気双極子モーメントは円運動している荷電粒子 (電荷を持った粒子) の角運動量とも関係します。中心力によって質量 m_c の荷電粒子が位置 $\mathbf{r}$ 、速度 $\mathbf{v}$ で円運動しているとします。質量と磁気双極子モーメントで同じ m を使いますが混乱はしないと思います。時間 t での $\mathbf{r}(t)$ と Δt 経過した $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ による微小面積 Δa は (力学の「中心力での運動」の補足参照)

$$\Delta a = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \Delta t$$

円の面積 a は角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m_c \mathbf{v}$ を使って

$$a = \int dt \frac{|\mathbf{r} \times m_c \mathbf{v}|}{2m_c} = \int dt \frac{|\mathbf{L}|}{2m_c}$$

中心力では角運動量は保存量なので

$$a = \frac{|L|}{2m_c} \int dt = \frac{|L|}{2m_c} T$$

T は 1 周する時間です。 L は円の面に対して法線方向を向きます。今は点電荷 Q が T で 1 周するので電流は $I = Q/T$ です。そして、磁気双極子モーメントは角運動量と同じ向きを持つので

$$m = I a = I a \frac{L}{|L|} = I \frac{|L| T}{2m_c} \frac{L}{|L|} = \frac{Q}{2m_c} L$$

となります。これは荷電粒子が円運動していると磁気双極子モーメントが発生すると言えます。また、量子論においては粒子固有の性質であるスピン角運動量によっても磁気双極子モーメントが発生します (量子力学の「スピン」参照)。

・補足

円状に電流が流れているときの磁場をビオ・サバールの法則から求めます。円は xy 平面上にあり (原点が中心)、定常電流 I が流れているとします。 x 軸から y 軸へ向かう角度を φ とすれば、円上の位置 $\mathbf{r}'$ と φ 方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_\varphi$ は

$$\mathbf{r}' = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, 0), \quad \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

ビオ・サバールの法則から、円周上の微小部分 $a\Delta\varphi$ による磁場は

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \beta \frac{I a \Delta\varphi \mathbf{e}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - a \cos \varphi, y - a \sin \varphi, z)$ なので

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\varphi \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= (z \cos \varphi, z \sin \varphi, -y \sin \varphi + a \sin^2 \varphi - x \cos \varphi + a \cos^2 \varphi) \\ &= (z \cos \varphi, z \sin \varphi, a - x \cos \varphi - y \sin \varphi) \end{aligned}$$

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ は

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2a(x \cos \varphi + y \sin \varphi))^{1/2} \\ &= (r^2 + a^2 - 2a(x \cos \varphi + y \sin \varphi))^{1/2} \quad (r = |\mathbf{r}|) \end{aligned}$$

$r \gg a$ とすれば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} &\simeq (r^2 - 2a(x \cos \varphi + y \sin \varphi))^{-3/2} \\
&= \frac{1}{r^3} (1 - \frac{2a}{r^2} (x \cos \varphi + y \sin \varphi))^{-3/2} \\
&\simeq \frac{1}{r^3} (1 + \frac{3}{2} \frac{2a}{r^2} (x \cos \varphi + y \sin \varphi)) \\
&= \frac{1}{r^3} (1 + \frac{3a}{r^2} (x \cos \varphi + y \sin \varphi))
\end{aligned}$$

これらを入れれば

$$\begin{aligned}
\Delta B_x(\mathbf{r}) &\simeq \beta \frac{Iaz}{r^3} (\cos \varphi + \frac{3a}{r^2} (x \cos^2 \varphi + y \sin \varphi \cos \varphi)) \Delta \varphi \\
\Delta B_y(\mathbf{r}) &\simeq \beta \frac{Iaz}{r^3} (\sin \varphi + \frac{3a}{r^2} (x \sin \varphi \cos \varphi + y \sin^2 \varphi)) \Delta \varphi \\
\Delta B_z(\mathbf{r}) &\simeq \beta \frac{Ia}{r^3} (a - x \cos \varphi - y \sin \varphi) (1 + \frac{3a}{r^2} (x \cos \varphi + y \sin \varphi)) \Delta \varphi \\
&\simeq \beta \frac{Ia}{r^3} (a - x \cos \varphi - y \sin \varphi - \frac{3a}{r^2} (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2) \Delta \varphi
\end{aligned}$$

円上なので 0 から 2π で積分して

$$\begin{aligned}
B_x(\mathbf{r}) &= \beta \frac{Iaz}{r^3} \int_0^{2\pi} d\varphi (\cos \varphi + \frac{3a}{r^2} (x \cos^2 \varphi + y \sin \varphi \cos \varphi)) = \beta \frac{Ia^2\pi}{r^3} \frac{3xz}{r^2} \\
B_y(\mathbf{r}) &= \beta \frac{Ia^2\pi}{r^3} \frac{yz}{r^2} \\
B_z(\mathbf{r}) &= \beta \frac{Ia}{r^3} \int_0^{2\pi} d\varphi (a - \frac{3a}{r^2} (x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2) \Delta \varphi = \beta \frac{Ia^2\pi}{r^3} (2 - \frac{3}{r^2} (x^2 + y^2))
\end{aligned}$$

三角関数の積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta &= 0, \quad \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta \cos \theta = 0 \\
\int_0^{2\pi} d\theta \sin^2 \theta &= \pi, \quad \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta = \pi
\end{aligned}$$

を使っています。まとめると

$$\mathbf{B} = \beta \frac{Ia^2\pi}{r^3} \frac{1}{r^2} (3xz, 3yz, 2r^2 - 3(x^2 + y^2))$$

磁気双極子モーメントは円の面積から $\mathbf{m} = Ia^2\pi \mathbf{e}_z = (0, 0, \pi a^2 I)$ なので

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = \pi a^2 I z, \quad \mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) = Ia^2\pi (xz, yz, z^2)$$

これらによって

$$\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2\mathbf{m}}{r^2} = \frac{Ia^2\pi}{r^2}(3xz, 3yz, 3z^2 - r^2)$$

z 成分は

$$3z^2 - r^2 = 3z^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -3(x^2 + y^2) + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2r^2 - 3(x^2 + y^2)$$

と書けるので

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \beta \frac{Ia^2\pi}{r^3} \frac{1}{r^2}(3xz, 3yz, 2r^2 - 3(x^2 + y^2)) = \beta \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2\mathbf{m}}{r^5}$$

となり、(10) と対応します。