静電場

クーロンの法則からガウスの法則を導出します。

絹でガラス棒を擦ったり、毛布でエボナイト棒を擦るなどの実験から、直接接触させなくてもお互いに引き合ったり (引力)、反発しあう (斥力) という現象が確認されます。この現象を説明するために、電荷 (charge, electric charge) という量が導入され、そのような現象を起こす物体は電荷を持つとされます。

そして、電荷は、正の電荷、負の電荷の 2 つが導入されます (摩擦による電気は、電荷の生成によるものではなく、正負の電荷を分離させることで起きる)。正同士、負同士の電荷は反発し、正負では引き合うとされます。例えば、電荷を持ついろいろな物体を用意し、それらから 3 個取り出すと、全て反発する場合、全て引き合う場合はない、１個は他の 2 個と引き合いその 2 個同士は反発する場合となるので、2 個の異なる量で説明できるからです。

電荷が導入されたので、次に電荷間に作用する法則を実験から見つける必要があります。そのために、質点のように物体の大きさを無視します。物体の大きさを無視して、空間上の点に電荷を与えたものを点電荷 (point charge) と言います（電荷を持つ物体間の距離に比べて物体の大きさが十分小さい)。ここから電荷を持った物体を点電荷とし、単に電荷と言っていきます。

電荷には実験から、2 つの電荷間に作用する力は他の電荷の影響を受けないという特徴が示されます。例えば、電荷 A, B, C があるとき、A に作用する力は、A, B 間と A, C 間でそれぞれ個別に与えられた力を足したものとなります (A, B 間の力に C は影響を与えない)。これは電荷での重ね合わせの原理です。なので、電荷 Q があり、周りに n 個の電荷 Q_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ があったとき、Q が受ける力は Q と Q_i 間の力 $\boldsymbol{F}_i$ を全て足した

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

となります。

空間に静止している電荷間に作用している力の性質は実験から

(i) 力は電荷を結ぶ直線上で作用し、同じ符号の電荷同士では斥力、反対の符号では引力となる。

(ii) 作用・反作用の法則に従う。

(iii) 2 つの電荷 Q_1, Q_2 間に作用する力は、Q_1Q_2 に比例し距離の逆 2 乗に比例する。

これをクーロン (Coulomb) の法則と呼び、その力はクーロン力と呼ばれます (クーロンは磁気の力も距離の逆 2 乗に比例することを示している)。(iii) を式にすれば、力を F、2 つの電荷間の距離を r、比例定数を α として

$$F = \alpha \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

作用・反作用の法則に従うので、電荷 Q_1 に作用する力と電荷 Q_2 に作用する力は方向が逆で同じ大きさを持ちます。そして、３次元空間に置かれた 2 つの電荷 Q_1, Q_t の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}$ として、(i) と (iii) から、Q_1 から Q_t に作用する力のベクトル $\boldsymbol{F}_1$ は

$$\boldsymbol{F}_1 = \alpha \frac{Q_1 Q_t}{|\boldsymbol{R}_1|^2} \frac{\boldsymbol{R}_1}{|\boldsymbol{R}_1|} \quad (\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$$

$\boldsymbol{R}_1/|\boldsymbol{R}_1|$ は Q_1 から Q_t に向かう単位ベクトルです。これがクーロンの法則を式にしたものです。Q_t から Q_1 への力は符号を反転させたものです ($\boldsymbol{F}_t = -\boldsymbol{F}_1$)。重ね合わせの原理を加えれば、$n$ 個の $\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ にいる電荷 Q_i から $\boldsymbol{r}$ にいる電荷 Q_t が受ける力は

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\alpha\frac{Q_tQ_1}{|\boldsymbol{R}_1|^2}\boldsymbol{e}_1+\alpha\frac{Q_tQ_2}{|\boldsymbol{R}_2|^2}\boldsymbol{e}_2+\cdots+\alpha\frac{Q_tQ_n}{|\boldsymbol{R}_n|^2}\boldsymbol{e}_n=\alpha Q_t\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{|\boldsymbol{R}_i|^2}\boldsymbol{e}_i$$

$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i$ は Q_t, Q_i 間を結ぶベクトル、$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{R}_i/|\boldsymbol{R}_i|$ はその単位ベクトルです。

比例定数 α には任意性があり、ここで具体的に決める必要性もないのでこのままにしておきます。α については「電磁気の単位系」を見てください。

電荷を離散的な点でなく、連続的に分布している場合にもできます。連続的にするので電荷の密度 ρ を与えればいいだけです。例えば、1 次元の線上に分布しているなら電荷の線密度 $\lambda(\boldsymbol{r})$ によって、微小な線 Δl での電荷は $\lambda\Delta l$ となります。同様に、面密度を $\sigma(\boldsymbol{r})$、微小な面積を Δs とすれば $\sigma\Delta s$、体積密度を $\rho(\boldsymbol{r})$、3 次元体積を $\Delta\tau$ とすれば $\rho\Delta\tau$ となります。これらによって、電荷を置き換えて和の連続極限を取れば、その電荷分布による電荷から位置 $\boldsymbol{r}$ の電荷 Q_t が受ける力は

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\alpha Q_t\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda(\boldsymbol{r}_i)\Delta l}{|\boldsymbol{R}_i|^2}\boldsymbol{e}_i\ \Rightarrow\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\alpha Q_t\int_{\mathcal{L}}dl'\frac{\lambda(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\alpha Q_t\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}_i)\Delta s}{|\boldsymbol{R}_i|^2}\boldsymbol{e}_i\ \Rightarrow\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\alpha Q_t\int_{\mathcal{S}}ds'\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\alpha Q_t\sum_{i=1}^{n}\frac{\rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta\tau}{|\boldsymbol{R}_i|^2}\boldsymbol{e}_i\ \Rightarrow\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=\alpha Q_t\int_{\mathcal{V}}d\tau'\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

$dl', ds', d\tau'$ はそれぞれ $1,2,3$ 次元積分で、$\boldsymbol{r}'$ が積分変数なので「$'$」を付けています。$\mathcal{L},\mathcal{S},\mathcal{V}$ は電荷が分布している領域です。電磁気でのクーロン力の問題はこれらの積分を実行することです。例えば、x 軸上に定数密度 λ で分布する電荷から z 軸上の位置 z の電荷 Q に作用する力では

$$\boldsymbol{F}=\alpha Q\int_{\mathcal{L}}dx\frac{\lambda}{|z\boldsymbol{e}_z-x\boldsymbol{e}_x|^2}\frac{z\boldsymbol{e}_z-x\boldsymbol{e}_x}{|z\boldsymbol{e}_z-x\boldsymbol{e}_x|}=\alpha\lambda Q\int_{\mathcal{L}}dx\frac{1}{z^2+x^2}\frac{z\boldsymbol{e}_z-x\boldsymbol{e}_x}{\sqrt{z^2+x^2}}$$

辺の長さ L, L' の 2 次元平面上に定数密度 σ で分布している電荷が z 軸上の位置 z の電荷 Q に作用する力では

$$\boldsymbol{F}=\alpha Q\int_0^L dx\int_0^{L'}dy\frac{\sigma}{|z\boldsymbol{e}_z-x\boldsymbol{e}_x-y\boldsymbol{e}_y|^2}\frac{z\boldsymbol{e}_z-x\boldsymbol{e}_x-y\boldsymbol{e}_y}{|z\boldsymbol{e}_z-x\boldsymbol{e}_x-y\boldsymbol{e}_y|}=\alpha\sigma Q\int_0^L dx\int_0^{L'}dy\frac{z\boldsymbol{e}_z-x\boldsymbol{e}_x-y\boldsymbol{e}_y}{(z^2+x^2+y^2)^{3/2}}$$

これらは三角関数の変数変換で実行できますが (「静磁場」で行っています)、状況を変えればすぐに面倒な積分が出てきます。

これで、電荷によるクーロン力の話は終わりです。後は、状況に合わせた計算ができるかどうかだけです。しかし、現れる計算がほとんどの場合で複雑になるので、それを回避する手段が作られています。それを見ていきます。

力の作用の見方を変えます。電荷間の力は直接接触していなくても発生するために、力を及ぼす何かが空間的に広がっていると見ます。つまり、電荷は空間的な広がりを持つ影響を発生させ、それによって他の電荷は力を受けていると考えます。その発生させているものを電場 (electric field, electric filed intensity) と呼びます。

電場は電荷 Q が発生させるものとするので、力を受ける電荷 Q_t を力からなくしたものを電場 $\boldsymbol{E}$ と定義し

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{\boldsymbol{F}}{Q_t}$$

また、実際は Q_t も電場を発生させるので、その影響が消える極限とすれば

$$\boldsymbol{E} = \lim_{Q_t \to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{Q_t}$$

位置 $\boldsymbol{r}_1$ の電荷 Q_1 によるクーロン力を入れれば、位置 $\boldsymbol{r}$ の電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}}{Q_t} = \alpha \frac{Q_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

静止した電荷による電場を静電場 (static electric field) と呼びます。ここでは静電場しか出てこないのでこのまま電場と言っていきます。Q_t を省いただけなので、重ね合わせの原理もそのまま成立し、n 個の電荷 Q_i による位置 $\boldsymbol{r}$ の電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}$$

例えば、3 次元で連続的に分布しているなら

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \alpha \int_{\mathcal{V}} d\tau' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

となります。

源となる電荷 Q から出ている曲線として電場を表したものを電気力線 (electrical flux line) と呼びます。曲線の向きで電場の方向、曲線の数で電場の強さを表します。他にも規則がありますが省きます。

電気力線は現実に存在する対象ではなく、状況を視覚的に分かりやすくするものです。なので、それに対応する量が与えられ、電束 (electric flux) と呼ばれます。電束 Φ はある曲面 $\mathcal{S}$ 上での電場の積分として

$$\Phi = \int_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E}$$

と定義されます。ds は曲面 $\mathcal{S}$ 上の微小面積で、$d\boldsymbol{s}$ は曲面 $\mathcal{S}$ の法線方向を向いています ($d\boldsymbol{s} = ds\boldsymbol{n}$ の $\boldsymbol{n}$ は単位法線ベクトル)。$d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E}$ は、$d\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{E}$ の間の角度を θ とすれば、$d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E} = |d\boldsymbol{s}||\boldsymbol{E}|\cos\theta = ds|\boldsymbol{E}|\cos\theta$ なので、$\boldsymbol{E}$ を $d\boldsymbol{s}$ 方向へ向けた成分 ($d\boldsymbol{s}$ 方向への射影) の積分です。このため、Φ は曲面 $\mathcal{S}$ を通過する線の数と言えるような量で、電場は電束密度と言えます。一般的な定義では電束密度と電場の単位は異なっていますが、真空中のみを扱うここでは影響がないので無視します。

原点に置かれた電荷 Q から出てくる半径 r の球面全体を通る電束は、球面の外側を向く単位法線ベクトルは $\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$、微小面積は極座標 (r, θ, ϕ) で $r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ なので

$$\Phi = \alpha Q \oint_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{r} \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^3} = \alpha Q \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; r^2 \sin\theta \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^3} = \alpha Q \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; \sin\theta = 4\pi\alpha Q$$

$\oint$ は閉曲面 (球のように閉じている曲面) での積分を表します。これから Φ は電荷に対応するのが分かります。これをガウス (Gauss) の法則と呼び、ある閉曲面を外向きに通過する電束は、その閉曲面によって囲まれた全電荷に比例します。式にすれば

$$\oint_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\alpha Q_{in}$$

左辺は閉曲面 $\mathcal{S}$ 上での $\boldsymbol{E}$ の積分、Q_{in} は閉曲面内にいる全電荷です。閉曲面内に電荷がいなければ右辺は 0 です。また、積分なのでガウスの法則の積分形と呼ばれます。
閉曲面内の全電荷に比例するのは電場に重ね合わせの原理が使えるために、閉曲面内の電荷を全て足せるというだけです (閉曲面の外の電荷は寄与しない)。このため、ガウスの法則は、クーロンの法則と重ね合わせの原理を言い換えただけです。しかし、実際に問題を解くと分かりますが、ガウスの法則によって格段に楽になります。

任意の閉曲面で成立するのは立体角を使うと分かりやすいです (力学の「ラザフォード散乱」の補足参照)。ある閉曲面上の面積 $\Delta\boldsymbol{s}$ の領域を通過する電束は

$$\Delta\Phi = \boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{s} = \alpha\frac{Q}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\Delta s = \alpha\frac{Q}{r^2}\Delta s\cos\theta \quad (r = |\boldsymbol{r}|)$$

閉曲面上の法線ベクトルは外側を向いているとします。これは面積 $\Delta s\cos\theta$ の面を通る電束です。その面に対応する微小な立体角 $d\Omega$ は

$$d\Omega = \frac{\Delta s\cos\theta}{r^2}$$

なので

$$\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{s} = \alpha Q d\Omega$$

これを立体角で積分すれば、閉曲面全体の立体角は 4π なので

$$\oint_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\alpha Q$$

となります。

閉曲面の外に電荷がいる場合では 0 になります。それを見るために、電荷を原点にして閉曲面に対する立体角を考えます。閉曲面なので、原点から伸ばした直線は必ず閉曲面の内側に入ってから外に出ていきます。なので、立体角 $d\Omega$ に対応する面積は、閉曲面に入るときの Δs_1 と外に出るときの Δs_2 があります。そうすると、原点と $\Delta s_1, \Delta s_2$ を結ぶ単位ベクトルを $\boldsymbol{e}$、距離を r_1, r_2、それぞれの面の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ とすれば

$$\frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}_1\Delta s_1}{r_1^2} = \frac{\Delta s_1\cos\theta_1}{r_1^2}\ ,\ \frac{\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}_2\Delta s_2}{r_2^2} = \frac{\Delta s_2\cos\theta_2}{r_2^2}$$

閉曲面上の法線ベクトルの向きは外側としているので、どちらかは $\boldsymbol{e}$ に対して 90 度以上の角度を持つ必要があります。このため、曲面 $\mathcal{S}$ 上の積分において、$d\Omega$ の面に対して符号が反転した $-d\Omega$ となる面が常に現れるので、打ち消し合って 0 になります。よって、電荷が閉曲面の外にいるとき

$$\oint_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E} = 0$$

となります。

積分形を微分形にします。閉曲面の積分に対して、ガウスの発散定理

$$\oint_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A} = \int_{\mathcal{V}} d\tau\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

を使います。$\mathcal{V}$ は閉曲面で囲まれた 3 次元領域です。$\mathcal{V}$ 内にいる電荷を Q_{in} として、ガウスの法則を単純に書き換えれば

$$\oint_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A} = \int_{\mathcal{V}} d\tau\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\alpha Q_{in}$$

$\mathcal{V}$ 内で電荷密度 ρ_{in} で分布しているなら

$$\int_{\mathcal{V}} dv\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\alpha\int_{\mathcal{V}} d\tau\ \rho_{in}$$

同じ 3 次元積分なので、積分を外すことで

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\alpha\rho$$

これがガウスの法則の微分形です。

ここでは計算を楽にする手段として、電場とガウスの法則を導入するという流れになっていますが、電場を使うことで電磁気の現象は統一的に記述されます。実際に、電磁気の法則であるマクスウェル方程式は電場と磁場の連立方程式です。そのとき、電場は静電場でなく時間依存する $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ になりますが、ある時間 t として同じ導出ができるのでガウスの法則は変更されません。なので、時間依存する電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ によって

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\alpha\rho(\boldsymbol{r},t)\quad\ (\int_{\mathcal{V}} d\tau\ \rho(\boldsymbol{r},t) = q(t))$$

$q(t)$ は時間 t での領域内の全電荷です。これがマクスウェル方程式の 1 つとなります。

電場を使うと計算が楽になりますが、ベクトルなのは煩わしいです。なので、電場と関係するスカラーを導入します。そのために、電場の回転を求めます。必要になるので

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

を求めておきます。これは、ただの偏微分なので

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{1/2}} = -\frac{x-x_1}{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)^{3/2}}$$

他も同様に求まり

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|} = -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3} \tag{1}$$

これを使えば

$$\boldsymbol{E} = \alpha\int d\tau'\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\alpha\int d\tau'\ \rho(\boldsymbol{r}')\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\alpha\nabla\int d\tau'\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

∇ は $\boldsymbol{r}$ に作用するので積分の外に出せます。これの回転を取れば $\nabla\times\nabla\boldsymbol{A} = 0$ から

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

となり、電場の回転は 0 です。ここで、

$$V = \alpha \int d\tau' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

と定義すれば

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

となり、これは力学での保存力とポテンシャルの関係と同じです。このため、クーロン力が保存力です。V を電位ポテンシャル (electric potential)、もしくはスカラーポテンシャルと呼びます。

ポテンシャルと同じ式なので、電位ポテンシャルは線積分において始点と終点のみに依存し

$$V(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E}$$

と書けます。実際に、ある曲線 $\mathcal{C}$ 上として積分を行うと

$$\int_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = \alpha Q \int_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{r}' \frac{1}{r'^3} = \alpha Q \int_b^a dr' \frac{1}{r'^2} = -\alpha Q(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})$$

となり、r' は原点と曲線との距離なので、曲線の始点と終点との距離 a, b のみに依存します。$d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{r}'$ は

$$d\boldsymbol{l} = dx\boldsymbol{e}_x + dy\boldsymbol{e}_y + dz\boldsymbol{e}_z = dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\boldsymbol{e}_\phi$$

から、$d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{r}' = rdr$ となります。ポテンシャルと同じように b は適当な基準に取られますが、ほとんどの場合で無限遠を基準にし $V(b \to \infty) = 0$ とします。始点と終点のみに依存するので閉じた曲線 $\mathcal{C}$ に対して

$$V(\boldsymbol{r}) = -\oint_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

となり、これはストークスの定理

$$\oint_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{E} = \int_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E})$$

から、$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ となります。$\mathcal{S}$ は $\mathcal{C}$ による曲面です。これらは力学のポテンシャルと同じ話です。

微分形でのガウスの法則から

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla \cdot \nabla V = 4\pi\alpha\rho$$

なので

$$\nabla^2 V = -4\pi\alpha\rho$$

という微分方程式が現れます。これをポアソン (Poisson) 方程式、右辺を 0 とした

$$\nabla^2 V = 0$$

では、ラプラス方程式と呼びます。これらから電位ポテンシャルを求められます。電位ポテンシャルはベクトルでなくスカラーなので、ベクトルである電場より煩わしさが減ります。

ポアソン方程式を利用して、よく出てくる微分を求めておきます。まず、点電荷の電荷密度を作ります。点電荷 Q に対する電荷密度 ρ_0 は

$$\int_{\mathcal{V}} d\tau\ \rho_0(\boldsymbol{r}) = Q$$

ここでの $\mathcal{V}$ は全空間に取れます。点電荷が $\boldsymbol{r}_0$ にいるとして積分が成立させるには、ρ_0 にデルタ関数を使えばいいです。位置 $\boldsymbol{r}_0$ に点電荷がいるなら、その点を含む領域 $\mathcal{V}$ で

$$\int_{\mathcal{V}} d\tau\ \delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \int_{\mathcal{V}} dxdydz\ \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') = 1$$

なので、$\rho_0(\boldsymbol{r}) = Q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ となります。これをポアソン方程式に入れると

$$\nabla^2 V(\boldsymbol{r}) = -4\pi\alpha Q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$\boldsymbol{r}_0$ の点電荷が作る $V(\boldsymbol{r})$ は (1) から

$$\nabla V = -\boldsymbol{E} = -\alpha Q\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\ \Rightarrow\ V = \frac{\alpha Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

これを入れることで

$$\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) \tag{2}$$

となります (下の補足も参照)。

最後に電場のエネルギーを求めます。Q_t に作用する力 $\boldsymbol{F} = Q_t\boldsymbol{E}$ に逆らって $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ まで動かすとして

$$U = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{F} = -Q_t\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{E} = Q_t(V(\boldsymbol{r}) - V(\boldsymbol{r}_0))$$

これは力学のポテンシャルと同じなので、これを電場のエネルギーとします。次に、n 個の電荷 Q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を点 $\boldsymbol{r}_i$ に持っていくとします。3 個とすれば、最初の 1 個目の電荷 Q_1 はまだどこにも電荷がないので、$U_1 = 0$ です。次の電荷 Q_2 は Q_1 の影響を受けるので $U_2 = Q_2V_{21}$ です。V_{ij} は j での電荷による $\boldsymbol{r}_i$ の電位ポテンシャルです。電荷 Q_3 は Q_1, Q_2 の両方から受けるので、$U_3 = Q_3(V_{31} + V_{32})$ です。よって、全体のエネルギーは

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = Q_2 V_{21} + Q_3 V_{31} + Q_3 V_{32}$$

これを $i = 1, 2, \ldots, n$ とすると

$$U = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i>j}^{n} Q_i V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \neq j}^{n} Q_i V_{ij}$$

と書けます。1/2 が出てくるのは、同じ項が 2 回出てくるからです。もしくは、電荷を運ぶ順番を変えても全体のエネルギーは変わらないことから、Q_3, Q_2, Q_1 の順に運ぶと

$$U = Q_2 V_{23} + Q_1 (V_{12} + V_{13})$$

なので

$$2U = Q_1 (V_{12} + V_{13}) + Q_2 (V_{21} + V_{23}) + Q_3 (V_{31} + V_{32})$$

となるからです。
そして、V_{ij} は $\boldsymbol{r}_i$ が他の $\boldsymbol{r}_j$ $(i \neq j)$ から受ける電位ポテンシャルなので

$$\sum_{i \neq j}^{n} V_{ij} = V(\boldsymbol{r}_i)$$

として

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} Q_i V(\boldsymbol{r}_i)$$

これは点電荷ですが電荷密度とすれば

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d\tau \ \rho(\boldsymbol{r}) V(\boldsymbol{r})$$

$\mathcal{V}$ は全ての電荷を囲んでいるとして、ガウスの法則を使えば

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\mathcal{V}} d\tau \ (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) V &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\mathcal{V}} d\tau \ (\nabla \cdot (\boldsymbol{E} V) - \boldsymbol{E} \cdot \nabla V) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha} \Big(\oint_{\mathcal{S}} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E} V + \int_{\mathcal{V}} d\tau |\boldsymbol{E}|^2 \Big) \quad (\nabla V = -\boldsymbol{E}) \end{aligned}$$

$\mathcal{V}$ を空間全てにわたるように取ると、その表面は無限遠の位置になります。そうすると、第一項は無限遠での電場 $(\propto 1/r^2)$ と電位ポテンシャル $(\propto 1/r)$ なので、消えます。よって、$\mathcal{V}$ を全空間として

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\mathcal{V}} d\tau |\boldsymbol{E}|^2$$

となります。

・補足

(2) はデルタ関数がいるために不思議な式です。こうなるのは、簡単にいえば 0 付近で発散しているからです。素直に微分を行うと

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}|} &= \nabla^2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \qquad (|\boldsymbol{r}| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2})\\
&= -\frac{1}{2}\nabla\cdot\bigl(2x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}, 2y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}, 2z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\bigr)\\
&= -\nabla\cdot\bigl(x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}, y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}, z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\bigr)\\
&= -((x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - \cdots)\\
&= -(3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2})\\
&= -(3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-3/2})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

もしくは極座標にして

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial^2\phi}$$

とすれば $(r = |\boldsymbol{r}|)$、角度の微分は引っかからないので

$$\nabla^2\frac{1}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}) = 0$$

というわけで

$$\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} = 0 \tag{3}$$

となり、0 です。しかし、これは不完全です。不完全と分かる簡単な方法は、電磁場のポアソン方程式

$$\nabla^2 V = -4\pi\alpha\rho$$

を見ることです。原点に点電荷 Q がいるとすればスカラーポテンシャルは

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha Q}{|\boldsymbol{r}|}$$

これをポアソン方程式の左辺に入れて、(3) を使うと

$$\nabla^2 V = \alpha Q \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = 0$$

となり、電荷がいるのにポアソン方程式でなく、$\rho = 0$ でのラプラス方程式になってしまいます。というわけで、電場の法則が成立していません。しかし、$|\boldsymbol{r}| \neq 0$ では $\nabla^2(1/|\boldsymbol{r}|) = 0$ は成立しているので、$|\boldsymbol{r}| = 0$ でおかしなことになっていると予想できます。

ポアソン方程式になるように手を加えます。まず、点電荷での密度は

$$\rho(\boldsymbol{r}) = Q\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

として与えます ($\boldsymbol{r}_0$ が点電荷の位置)。これは空間の 1 点に電荷が置かれるために、通常の密度の定義では電荷密度が発散してしまうからです (両辺を $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = 0$ を含む範囲で積分すれば一致する)。これをポアソン方程式にいれると (点電荷の位置を原点 $\boldsymbol{r}_0 = 0$ にします)

$$\begin{aligned} \alpha Q \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} =& -4\pi\alpha Q \delta^3(\boldsymbol{r}) \\ \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} =& -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

実際に、$\boldsymbol{r} = 0$ の地点を含む無限大の領域 $\mathcal{V}$ で積分すれば

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -4\pi \int_{\mathcal{V}} d^3x \delta^3(\boldsymbol{r})$$

なので

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -4\pi$$

これから、左辺が原点を含むように積分したら -4π になるようにすればいいので、

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -4\pi \int_{\mathcal{V}} d^3x \delta^3(\boldsymbol{r}) = -4\pi$$

よって、結局

$$\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$$

でいいことになります。デルタ関数は $\boldsymbol{x} = 0$ 以外では 0 なので、$|\boldsymbol{x}| \neq 0$ の場合も含んでいます。

電磁気の法則から求めましたが、電磁気の法則とは無関係に求めることもできます。やることは同じで

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}$$

がどうなっているのかを見ます。$\mathcal{V}$ が原点を含んでいなければ、$|\boldsymbol{r}|=0$ を考えなくていいので、$|\boldsymbol{r}| \neq 0$ での ∇^2 から 0 です。なので、$\mathcal{V}$ の範囲を一般的に考えたとしても、結局は $\mathcal{V}$ が原点を含んでいる場合だけを考えればいいです。というわけで、$\mathcal{V}$ を原点を含む半径 R の球としても一般性はなくなりません。そうすると、ガウスの発散定理から

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = \int_{\mathcal{V}} d^3x \nabla \cdot (\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}) = \int_{\mathcal{S}} dS\ \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|})$$

$\mathcal{S}$ は半径 R の球による面で、$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ は動径方向の単位ベクトルです。半径一定の球面なので、dS は

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

これから積分は

$$\int_{\mathcal{S}} dS\ \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}|}) = \int_{\mathcal{S}} dS \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \cdot (-\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}) = -\int_{\mathcal{S}} dS \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2} = -R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2} = -4\pi \frac{R^2}{|\boldsymbol{r}|^2}$$

球面上での面積分なので、$|\boldsymbol{r}|^2 = R^2$ より

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -4\pi$$

よって、$\mathcal{V}$ は原点を含んでさえいればよく、デルタ関数を使うことで

$$\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r})$$

原点からずらしても

$$\nabla^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = -4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

となるだけです。