

マクスウェル方程式とローレンツ変換

あらゆる慣性系で電磁気の法則が成立するとしたとき、座標変換がどう与えられるかを見ます。座標変換の仕方を決めて、ダラダラと式変形を行っていただくだけです。
ガリレイ変換については知っているとしています。

真空でのマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\alpha\rho(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 4\pi\beta\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

点電荷 q は観測者に対して速度 $\mathbf{v}$ で動いているとし、電荷密度 ρ は空間の 1 点 $\mathbf{v}t$ にいる 1 個の点電荷とし、デルタ関数によって

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= q\delta(x - v_x t)\delta(y - v_y t)\delta(z - v_z t) = q\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \\ \int d^3x \rho(\mathbf{x}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho(\mathbf{x}, t) = q \end{aligned}$$

と与えます ($\mathbf{x} = \mathbf{v}t$ の地点以外は 0)。これらが成立している座標系を系 O とし、その座標を $\mathbf{x}$ 、時間を t としています。

マクスウェル方程式のガリレイ変換から見ていきます。系 O に対して x 方向に速度 V_x で動いている座標系を O' とします。 O' の座標 $\mathbf{x}'$ と時間 t はガリレイ変換

$$x' = x - V_x t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

によって与えられます。ニュートン力学では運動方程式はガリレイ変換で式の形を変えないことが要求されるので、ある点でのローレンツ力 $\mathbf{f}$ はガリレイ変換に対して同じ値を持つとし (ローレンツ力は運動方程式に現れる)

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \beta_b^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') + \beta_b^{-1}\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t')) = \mathbf{f}'$$

「 $'$ 」がついているのがガリレイ変換後です。電荷 q 、比例定数 α, β_m, β_b ($\beta = \beta_m \beta_b$) は変換を受けないとし、電荷が変わらないのは実験で確認され、 O, O' で電磁気の法則が変わらないなら比例定数を同じと考えるからです (「動く点電荷による電磁場」で求めたように静止している電荷と動いている電荷が作る電磁場で同じ比例定数が使われている)。そうすると

$$\mathbf{E} + \beta_b^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}' + \beta_b^{-1} \mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$$

$$\mathbf{E} + \beta_b^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}' + \beta_b^{-1} (\mathbf{v} - \mathbf{V}) \times \mathbf{B}' \quad (\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \mathbf{V} = (V_x, 0, 0))$$

$$\mathbf{E} + \beta_b^{-1} \mathbf{V} \times \mathbf{B}' = \mathbf{E}' + \beta_b^{-1} \mathbf{v} \times (\mathbf{B}' - \mathbf{B})$$

これから、電場と磁場の変換は

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{V} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$$

これは電磁誘導の結果と同じです。

この変換を磁場の波動方程式の形

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

に対して行ってみると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \cdots = \frac{\partial}{\partial t} + V_x \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial t'} - V_x \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 \mathbf{B} = \left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} + V_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2V_x \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x'} \right) \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') \\ \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t')}{\partial x'^2} \end{aligned}$$

となるので、もとの波動方程式の形から変わります。このため、マクスウェル方程式はガリレイ変換に対して形を変えます。また、少し計算すれば分かるように (2), (3) は不変です。ここで言っている不変は、 O と O' で式の形が同じになることで、共変 (covariant) と呼ばれます。

ガリレイ変換に対して式が不変でないために、力学の考えに従えば、異なる慣性系では電磁気の法則が異なります (このため (1)~(4) の形になる地球上の系は特別視され、エーテルの存在が仮定された)。なので、電磁気の法則を変えない新しい慣性系の変換を作ります。

状況をはっきりさせます。ある現象を見ている観測者がいる座標系を系 O とし、座標と時間を $\mathbf{x}, t$ とします。系 O に対して x 軸方向に一定の速度 $\mathbf{V} = (V_x, 0, 0)$ で動いている座標系 (観測者) を系 O' とし、座標と時間を $\mathbf{x}', t'$ とします。一般的な変換を作るために時間も変換を受けるとして、基準となる座標系を系 $O(\mathbf{x}, t)$ とし、 $t = 0$ では、系 O と系 O' の原点は一致し、時間 t にともなって系 O' は x 軸に沿って $V_x t$ 動く (ガリレイ変換と同じ)。このように、座標系 O とそれに対して動いている座標系 O' を用意し、どちらも慣性系です。

2つの系を用意したので、これらの間をつなげることを考えます。空間のある点で何かしらの現象が起きているとき、 O, O' のどちらの系で見ようとある点で何かが起きていることには変わらないです。このため、2つの座標系間には何かしらの関係があるとします。つまり、2つの座標系の座標と時間は何かしらの関数 A によって

$$x' = A_x(\mathbf{x}, t), \quad y' = A_y(\mathbf{x}, t), \quad z' = A_z(\mathbf{x}, t), \quad t' = A_t(\mathbf{x}, t)$$

と書けるとします。これは $O(\mathbf{x}, t)$ から $O'(\mathbf{x}', t')$ への座標変換で、 O での点 $(\mathbf{x}, t)$ は O' から見たら $(\mathbf{x}', t')$ になるという意味です。

もし、 O で粒子が直線運動していれば、 O' でも直線運動として見えるはずです。なので、変換後に x^2 のようなものが出てくると直線運動ではなくなるので、変換で 1 次までしか出てこないとします。なので、変換 A は線形変換とします (ガリレイ変換との対応を取るためにも線形変換)。変換 A の形を決めていきます。

構造が一緒なので、時間と空間座標をひとまとめにして

$$x'_i = A_i(\mathbf{x}, t)$$

と書き、添え字 i で x, y, z, t を区別します。 $\mathbf{x}', t'$ から別の点 $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}$ を引いたものを

$$x'_i - \tilde{x}'_i = A_i(\mathbf{x}, t) - \tilde{A}_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t}) = X_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t - \tilde{t})$$

最右辺が差にだけ依存しているのは時間と空間は一樣としているからです (平行移動させても変わらない)。

これを x_a で微分すると

$$\frac{\partial A_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_a} = \frac{\partial X_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t - \tilde{t})}{\partial x_a}$$

さらに $\tilde{x}_b$ で微分すると、変換後は $\mathbf{x}, t$ の 1 次になると仮定しているので左辺は 0 になり

$$0 = \frac{\partial^2 X_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t - \tilde{t})}{\partial \tilde{x}_b \partial x_a}$$

例えば、 x_b を x とすれば

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial X_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t - \tilde{t})}{\partial \tilde{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial(x - \tilde{x})}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial X_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t - \tilde{t})}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial(x - \tilde{x})}{\partial x} \frac{\partial}{\partial(x - \tilde{x})} = \frac{\partial}{\partial(x - \tilde{x})} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial X_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t - \tilde{t})}{\partial x} \end{aligned}$$

他の成分も同じなので

$$\frac{\partial^2 X_i(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}, t - \tilde{t})}{\partial x_a \partial x_b} = 0$$

x_a で2回微分すると0になるので、 X_i でも x_a の1次までしかいないです。

次に、 O' は x 軸に沿って動くことから制限を与えます。 O' は x 軸方向に動いているだけなので、 x と x' の間の変換には y, z 座標は無関係です。言い換えれば、 O におけるある点 (x_1, y_1, z_1) が $(x_1, y_1 + y_0, z_1 + z_0)$ と動いたとしても、 x_1 から x'_1 への変換の形は変わらないです。一方で、 O' は速度 V_x と時間 t で動いているので、 O でのある地点の x が x_0 動いたとき x' は x だけでなく時間 t による影響も受けている可能性があります。時間も、 O' が速度 $V_x t$ で動くために時間が t から $t + t_0$ に動いたとき、 t と t' の変換には t だけでなく x がいる可能性があります。

まとめると、 x', t' には x, t の1次までが含まれており、 y と z は含まれていないです。そうすると、 O と O' に対して速度 V_x で動く O' を結ぶ座標変換の形は

$$x' = a_1 x + a_2 t \quad (5a)$$

$$y' = y \quad (5b)$$

$$z' = z \quad (5c)$$

$$t' = b_1 x + b_2 t \quad (5d)$$

と書け、ガリレイ変換を拡張した形になります ($t' = t$, $x' = x - Vt$ でガリレイ変換)。 $a_{1,2}, b_{1,2}$ は定数で、 a_1 と b_2 は無次元、 a_2 は速度、 b_1 は速度の逆の次元です。4つの任意パラメータがありますが、関係性があるので落としていきます。

O' の原点を O から見たとすると、 O' は速度 $\mathbf{V} = (V_x, 0, 0)$ で O から離れているので、 O' の原点は O の x 軸において $V_x t$ だけ離れています。なので、 O' の原点となる $x' = 0$ は (5d) において、 $x' = 0, x = V_x t$ とした

$$0 = a_1 V_x t + a_2 t$$

なので

$$a_1 = -\frac{1}{V_x} a_2$$

逆に O の原点 $x = 0$ は O' から見て $-V_x t'$ 離れているので (5a) と (5d) は

$$-V_x t' = a_2 t$$

$$t' = b_2 t$$

となるので

$$b_2 = -\frac{1}{V_x} a_2$$

よって

$$a_1 = b_2$$

なので、 $a_1 = b_2 = \gamma$, $a_2 = -V_x \gamma$ として

$$x' = \gamma(x - V_x t) \quad (6a)$$

$$t' = \gamma\left(\frac{b_1}{\gamma}x + t\right) \quad (6b)$$

となります。 γ は無次元です。

逆の変換は単に変形すればよく、 x では

$$\begin{aligned} \left(\frac{\gamma}{\gamma V_x} + \frac{b_1}{\gamma}\right)x &= \frac{1}{\gamma V_x}x' + \frac{1}{\gamma}t' \\ x &= \frac{V_x \gamma}{\gamma + V_x b_1} \frac{1}{V_x \gamma}x' + \frac{V_x \gamma}{\gamma + V_x b_1} \frac{1}{\gamma}t' \\ &= \frac{1}{\gamma + V_x b_1}x' + \frac{V_x}{\gamma + V_x b_1}t' \\ &= \lambda(x' + V_x t') \end{aligned}$$

t では

$$\begin{aligned} (V_x + \frac{\gamma}{b_1})t &= -\frac{1}{\gamma}x' + \frac{1}{b_1}t' \\ t &= \frac{b_1}{V_x b_1 + \gamma}(-\frac{1}{\gamma}x' + \frac{1}{b_1}t') \\ &= \frac{1}{V_x b_1 + \gamma}(-\frac{b_1}{\gamma}x' + t') \end{aligned}$$

というわけで、逆変換は

$$x = \frac{1}{\gamma + V_x b_1}(x' + V_x t') \quad (7a)$$

$$t = \frac{1}{\gamma + V_x b_1}(-\frac{b_1}{\gamma}x' + t') \quad (7b)$$

逆変換は O と O' を逆側から見る事なので、速度 V_x を反転させたら一致しなければいけません。 x の変換を (7a) の V_x の符号を反転させて比べてみると

$$\gamma(x - V_x t) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma + V_x b_1}(x' + V_x t') \Rightarrow \gamma(x - V_x t) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma - V_x b_1}(x' - V_x t')$$

t では

$$\gamma\left(\frac{b_1}{\gamma}x + t\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma + V_x b_1}(-\frac{b_1}{\gamma}x' + t') \Rightarrow \gamma\left(\frac{b_1}{\gamma}x + t\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma - V_x b_1}(-\frac{b_1}{\gamma}x' + t')$$

これから、 b_1 は V_x の反転で符号が変わる必要があります。そうすると

$$\begin{aligned}\gamma(x - V_x t) &\Leftrightarrow \frac{1}{\gamma + V_x b_1}(x' + V_x t') \Rightarrow \gamma(x - V_x t) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma + V_x b_1}(x' - V_x t') \\ \gamma\left(\frac{b_1}{\gamma}x + t\right) &\Leftrightarrow \frac{1}{\gamma + V_x b_1}\left(-\frac{b_1}{\gamma}x' + t'\right) \Rightarrow \gamma\left(\frac{b_1}{\gamma}x + t\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma + V_x b_1}\left(\frac{b_1}{\gamma}x' + t'\right)\end{aligned}$$

よって

$$\gamma = \frac{1}{\gamma + V_x b_1}$$

である必要があります。ここで記号として

$$\gamma = \frac{1}{\gamma + V_x b_1} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + V_x b_1 / \gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + V_x \lambda} \quad (8)$$

というように $\lambda = b_1 / \gamma$ を定義しておきます。 λ の次元は $\{v^{-1}\}$ です。

まとめると、変換 A は

$$x' = \gamma(x - V_x t) \quad (9a)$$

$$t' = \gamma(\lambda x + t) \quad (9b)$$

$$x = \gamma(x' + V_x t') \quad (9c)$$

$$t = \gamma(-\lambda x' + t') \quad (9d)$$

という時間も含めた座標変換になります。 y と z は $y' = y$ と $z' = z$ です。しかし、まだ決定しきれてない λ (γ と b_1) がいます。

O と O' の座標変換の形が分かったので、現象が起きている位置の速度を求めておきます。その現象 (例えば粒子) は O から見て速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているとします。速度は位置の時間微分なので

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

同様に O' では

$$\boldsymbol{v}' = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$$

そうすると、例えば x 方向の速度は

$$\begin{aligned}v'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dx'}{dt} = \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} \frac{dx'}{dt} \\ &= \gamma \gamma^{-1} \left(1 + \lambda \frac{dx}{dt}\right)^{-1} \left(\frac{dx}{dt} - V_x\right) \\ &= (1 + \lambda v_x)^{-1} (v_x - V_x)\end{aligned} \quad (10a)$$

y, z 方向は

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} \frac{dy'}{dt} = \frac{1}{\gamma} (1 + \lambda v_x)^{-1} v_y \quad (10b)$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1} \frac{dz'}{dt} = \frac{1}{\gamma} (1 + \lambda v_x)^{-1} v_z \quad (10c)$$

逆変換は

$$v'_x = (1 + \lambda v_x)^{-1} (v_x - V_x)$$

$$(1 - \lambda v'_x) v_x = v'_x + V_x$$

$$v_x = \frac{1}{1 - \lambda v'_x} (v'_x + V_x)$$

y, z では

$$1 + \lambda v_x = 1 + \lambda \frac{1}{1 - \lambda v'_x} (v'_x + V_x) = \frac{1 - \lambda v'_x + \lambda (v'_x + V_x)}{1 - \lambda v'_x} = \frac{1 + \lambda V_x}{1 - \lambda v'_x} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{1 - \lambda v'_x}$$

を入れればいいです。(8) を最後に使っています。よって、逆変換は

$$v_x = \frac{1}{1 - \lambda v'_x} (v'_x + V_x) \quad (11a)$$

$$v_y = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \lambda v'_x} v'_y \quad (11b)$$

$$v_z = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \lambda v'_x} v'_z \quad (11c)$$

となります。

今欲しいのは、 O と O' で電磁気が同じ法則になる変換です。ここまでは、ガリレイ変換はマクスウェル方程式の式を変えるので、動いている系との間のより一般的な変換の形を作ってきました。なので、後はマクスウェル方程式を不変にするように、残っている γ_b を決めればいいです。

O でのある点 $(\mathbf{x}, t)$ での電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ はマクスウェル方程式 (1)~(4) で与えられているとします。なので、 O' から見た同じ点 $(\mathbf{x}', t')$ での電場 $\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t')$ と磁場 $\mathbf{B}'(\mathbf{x}', t')$ がマクスウェル方程式 (1)~(4) に従うとき、 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ との関係がどうなるかです。ガリレイ変換と同じように、電荷 q , 比例定数 α, β は変換を受けないとします。

座標と時間の変換によって、電場と磁場もある変換を受けるとして

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = \mathbf{F}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))$$

$$\mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') = \mathbf{G}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))$$

$\mathbf{F}, \mathbf{G}$ は変換の関数で、 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ の 1 次までの変換とします。 $\mathbf{x}, t$ と $\mathbf{x}', t'$ は (9a)～(9d) の変換に従います。ここから、座標と言ったときは時間も含めます。また、 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ の次元は $\{ \}$ でその次元を表すことにすれば

$$\{B\} = \frac{\{\beta\}}{\{\alpha\}} \{v\} \{E\} = \{\beta_b\} \{v^{-1}\} \{E\}$$

となっています。

電荷密度は点電荷で与えて、 O 系において

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$$

これに O' 系への座標と速度の変換を入れます。 x 成分では (9c), (9d) と (10a) から

$$\begin{aligned} x - v_x t &= \gamma(x' + V_x t') - \gamma v_x (-\lambda x' + t') \\ &= \gamma x' + \gamma V_x t' + \gamma v_x \lambda x' - \gamma v_x t' \\ &= \gamma(1 + \lambda v_x) x' - \gamma(v_x - V_x) t' \\ &= \gamma(1 + \lambda v_x) x' - \gamma(1 + \lambda v_x) v'_x t' \\ &= \gamma(1 + \lambda v_x) (x' - v'_x t') \end{aligned}$$

なので、デルタ関数の性質

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

から、 O' でのデルタ関数は

$$\delta(x - v_x t) = \delta(\gamma(1 + \lambda v_x)(x' - v'_x t')) = \frac{1}{|\gamma(1 + \lambda v_x)|} \delta(x' - v'_x t')$$

y は

$$y - v_y t = y' - \gamma v_y (-\lambda x' + t')$$

このとき、 x のデルタ関数の存在のために $x' = v'_x t'$ が要求され

$$\begin{aligned}
y - v_y t &= y' - \gamma v_y (-\lambda v'_x t' + t') \\
&= y' - \gamma v_y \left(-\lambda \frac{v_x - V_x}{1 + \lambda v_x} + 1 \right) t' \\
&= y' - \gamma v_y \frac{-\lambda v_x + \lambda V_x + 1 + \lambda v_x}{1 + \lambda v_x} t' \\
&= y' - \gamma v_y \frac{1 + \lambda V_x}{1 + \lambda v_x} t' \\
&= y' - (1 + \lambda V_x) \gamma^2 v'_y t' \\
&= y' - v'_y t'
\end{aligned}$$

となり

$$\delta(y - v_y t) = \delta(y' - v'_y t')$$

z でも同様に

$$\delta(z - v_z t) = \delta(z' - v'_z t')$$

というわけで、電荷 q はそのままなので O' へ変換した電荷密度は、

$$\rho'(\mathbf{x}', t') = \frac{1}{|\gamma(1 + v_x \lambda)|} q \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{v}' t')$$

となります。

偏微分の変換を先にしておきます。今は x と t しか変換されないので

$$x = x(x', t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t(x', t')$$

とすれば、偏微分の連鎖則から

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x}$$

座標変換 (9c) と (9d) から

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma, \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = -\gamma \lambda, \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma, \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = \gamma V_x$$

なので、 x は

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} - \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma V_x \frac{\partial}{\partial x}$$

y, z は

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

となります。

偏微分の変換を入れてマクスウェル方程式を変換します。まず、(1) で電荷密度がない場合

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (12)$$

をみます。 O' でも同じ形になることを要求しているので

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = 0$$

これを O に直せば

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = \gamma \frac{\partial}{\partial x} F_x - \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z = 0$$

これには $\nabla \cdot \mathbf{F}$ があるので、ここから $\nabla \cdot \mathbf{E}$ が出てくれば (12) で消せます。なので、 $\mathbf{F}$ は $\mathbf{E}$ の 1 次までしか含んでいないとして

$$F_x(\mathbf{x}, t) = e_x E_x(\mathbf{x}, t) + f_x(\mathbf{x}, t)$$

のように分解して (e_i は無次元の定数)

$$e_x \gamma \frac{\partial}{\partial x} E_x + e_y \frac{\partial}{\partial y} E_y + e_z \frac{\partial}{\partial z} E_z - e_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} E_x + \gamma \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z - \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} f_x$$

とします。第三項までは、(12) で消します。なので、残った項には

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z - e_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} E_x - \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} f_x &= 0 \\ \gamma \frac{\partial}{\partial x} f_x + \frac{\partial}{\partial y} f_y + \frac{\partial}{\partial z} f_z &= e_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} E_x + \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} f_x \end{aligned}$$

を要求します。これは右辺に時間微分があるので、電荷密度が 0 のときの (4) での

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} E_x$$

になると予想します。つまり、 $f_x = 0$ で

$$f_y = f_0 B_z, \quad f_z = -f_0 B_y \quad (13)$$

なら

$$f_0 \frac{\partial}{\partial y} B_z - f_0 \frac{\partial}{\partial z} B_y = f_0 (\nabla \times \mathbf{B})_x = e_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} E_x$$

とでき、 $f_0 = \alpha e_x \gamma \lambda / \beta$ でマクスウェル方程式 (4) になります。というわけで、この段階で変換の形は

$$\begin{aligned} E'_x(\mathbf{x}', t') &= e_x E_x(\mathbf{x}, t) \\ E'_y(\mathbf{x}', t') &= e_y E_y(\mathbf{x}, t) + f_0 B_z(\mathbf{x}, t) \\ E'_z(\mathbf{x}', t') &= e_z E_z(\mathbf{x}, t) - f_0 B_y(\mathbf{x}, t) \\ f_0 &= \frac{\alpha}{\beta} e_x \gamma \lambda \end{aligned}$$

f_0 は β_b の次元を $\{\beta_b\}$ 、速度の次元を $\{v\}$ とすれば、 $\{\beta_b^{-1}\}\{v\}$ の次元です。

次に、(3) を考えて、変換後の x 成分を

$$(\nabla' \times \mathbf{E}')_x = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t'} B'_x$$

とします。 O 系にすれば左辺は

$$(\nabla' \times \mathbf{E}')_x = \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y = e_z \frac{\partial}{\partial y} E_z - e_y \frac{\partial}{\partial z} E_y + \frac{\partial}{\partial y} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_y$$

右辺では電場と同じように、 $G_x = b_x B_x + g_x(\mathbf{x}, t)$ (b_x は無次元の定数) と分解できるとして

$$-\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t'} B'_x = -\frac{b_x}{\beta_b} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma V_x \frac{\partial}{\partial x} \right) B_x - \frac{1}{\beta_b} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma V_x \frac{\partial}{\partial x} \right) g_x$$

なので

$$e_z \frac{\partial}{\partial y} E_z - e_y \frac{\partial}{\partial z} E_y + \frac{\partial}{\partial y} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_y = -\frac{b_x}{\beta_b} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma V_x \frac{\partial}{\partial x} \right) B_x - \frac{1}{\beta_b} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma V_x \frac{\partial}{\partial x} \right) g_x$$

これからマクスウェル方程式が作れそうな形にして取り出すと

$$\begin{aligned} e_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - e_y \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{b_x}{\beta_b} \gamma \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} + \frac{b_x}{\beta_b} \gamma V_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{1}{\beta_b} \gamma V_x \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{1}{\beta_b} \gamma \frac{\partial g_x}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

上の式は係数 $e_z = e_y = b_x \gamma$ とすれば、 $(\nabla \times \mathbf{E})_x = -\beta_b^{-1} \partial B_x / \partial t$ に対応させられます。下の式にはうまいこと x, y, z 微分があるので、これらは発散になると考え

$$\gamma V_x \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial x} (b_x B_x + g_x) - \frac{\partial}{\partial z} f_y + \frac{\partial}{\partial y} f_z = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

と予想します。第一項から $g_x = 0$ です。時間微分だけで 0 になる方程式は存在していないことから $g_x = 0$ です。なので

$$G_x = b_x B_x, \quad f_y = -\frac{b_x \gamma V_x}{\beta_b} B_z, \quad f_z = \frac{b_x \gamma V_x}{\beta_b} B_y$$

(13) から

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} e_x \gamma \lambda &= -\frac{b_x \gamma V_x}{\beta_b} \\ \lambda &= -\frac{\beta_m}{\alpha} \frac{b_x V_x}{e_x} \end{aligned} \tag{14}$$

となり、 e_x と b_x が分かれば残ってるパラメータ λ が決まります。

今の段階での電場の変換は

$$\begin{aligned} E'_x(\mathbf{x}', t') &= e_x E_x(\mathbf{x}, t) \\ E'_y(\mathbf{x}', t') &= e_y E_y(\mathbf{x}, t) + f_0 B_z(\mathbf{x}, t) \\ E'_z(\mathbf{x}', t') &= e_z E_z(\mathbf{x}, t) - f_0 B_y(\mathbf{x}, t) \\ f_0 &= \frac{\alpha}{\beta} e_x \gamma \lambda = -\frac{b_x \gamma V_x}{\beta_b} \\ \lambda &= -\frac{\beta_m}{\alpha} \frac{b_x V_x}{e_x} \end{aligned}$$

となっています。 f_0 の次元は $\{\beta_b^{-1}\}\{v\}$ なので γ は無次元、 λ は $\beta_m/\alpha = 1/c^2$ (c は光速) から $\{v^{-1}\}$ の次元になっています。

電荷があるときの (1) は O' で

$$\nabla' \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') = 4\pi\alpha\rho'(\mathbf{x}', t')$$

O' 系での電荷密度は

$$\rho'(\mathbf{x}', t') = q\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t') \tag{15}$$

とします。左辺は電場の変換を入れることで

$$\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') &= (\gamma \frac{\partial}{\partial x} - \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t}) F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z \\
&= e_x (\gamma \frac{\partial}{\partial x} - \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t}) E_x + e_y \frac{\partial}{\partial y} E_y + e_z \frac{\partial}{\partial z} E_z + f_0 \frac{\partial}{\partial y} B_z - f_0 \frac{\partial}{\partial z} B_y \\
&= e_x \gamma \frac{\partial}{\partial x} E_x + e_y \frac{\partial}{\partial y} E_y + e_z \frac{\partial}{\partial z} E_z - e_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} E_x + f_0 (\nabla \times \mathbf{B})_x
\end{aligned}$$

$(\nabla \times \mathbf{B})_x$ はマクスウェル方程式から

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = 4\pi\beta j_x + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad j_x = v_x \rho(\mathbf{x}, t)$$

$e_y = e_z = b_x \gamma$ と $\lambda = -\beta_m b_x V_x / \alpha e_x$ を使って

$$\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') &= e_x \gamma \frac{\partial}{\partial x} E_x + e_y \frac{\partial}{\partial y} E_y + e_z \frac{\partial}{\partial z} E_z - e_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} E_x - \frac{b_x \gamma V_x}{\beta_b} (4\pi\beta v_x \rho + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial E_x}{\partial t}) \\
&= e_x \gamma \frac{\partial}{\partial x} E_x + e_y \frac{\partial}{\partial y} E_y + e_z \frac{\partial}{\partial z} E_z - e_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} E_x - \frac{b_x \gamma V_x}{\beta_b} \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial E_x}{\partial t} - 4\pi\beta \frac{b_x \gamma V_x}{\beta_b} v_x \rho \\
&= e_x \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x} + b_x \gamma \frac{\partial E_y}{\partial y} + b_x \gamma \frac{\partial E_z}{\partial z} + b_x \gamma V_x \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial E_x}{\partial t} - b_x \gamma V_x \frac{\beta_m}{\alpha} \frac{\partial E_x}{\partial t} - 4\pi\beta_m b_x \gamma V_x v_x \rho \\
&= e_x \gamma \frac{\partial E_x}{\partial x} + b_x \gamma \frac{\partial E_y}{\partial y} + b_x \gamma \frac{\partial E_z}{\partial z} - 4\pi\beta_m b_x \gamma V_x v_x \rho
\end{aligned}$$

第三項までは電場の発散になっているので

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 4\pi\alpha\rho(\mathbf{x}, t)$$

によって変形します。なので、 $e_x = 1$, $b_x = 1$ として

$$e_y = e_z = \gamma, \quad f_0 = -\frac{b_x \gamma V_x}{\beta_b} = -\frac{\gamma V_x}{\beta_b}, \quad \lambda = -\frac{\beta_m}{\alpha} \frac{b_x V_x}{e_x} = -\frac{\beta_m}{\alpha} \quad (16)$$

そうすると、(15) から

$$\begin{aligned}
\nabla' \cdot \mathbf{E}'(\mathbf{x}', t') &= \gamma \nabla \cdot \mathbf{E} - 4\pi\beta_m \gamma v_x V_x \rho \\
&= 4\pi\alpha\gamma\rho - 4\pi\beta_m \gamma v_x V_x \rho \\
&= 4\pi\alpha\gamma(1 - \frac{\beta_m}{\alpha} v_x V_x) \rho \\
&= 4\pi\alpha\gamma(1 + \lambda v_x) q \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) \\
&= 4\pi\alpha \frac{\gamma(1 + \lambda v_x)}{|\gamma(1 + \lambda v_x)|} q \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{v}'t') \\
&= 4\pi\alpha\rho'(\mathbf{x}', t') \quad (17)
\end{aligned}$$

$\gamma(1 + \lambda v_x)$ は正としています。

というわけで、(16) から電場の変換は

$$E'_x(\mathbf{x}', t') = E_x(\mathbf{x}, t)$$

$$E'_y(\mathbf{x}', t') = \gamma(E_y(\mathbf{x}, t) - \frac{V_x}{\beta_b} B_z(\mathbf{x}, t))$$

$$E'_z(\mathbf{x}', t') = \gamma(E_z(\mathbf{x}, t) + \frac{V_x}{\beta_b} B_y(\mathbf{x}, t))$$

$$\lambda = -\frac{\beta_m}{\alpha} V_x$$

となります。

磁場も同じようにします。まず、(2) から

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t') = 0$$

とし、 O に直せば

$$\gamma \frac{\partial}{\partial x} G_x - \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} G_x + \frac{\partial}{\partial y} G_y + \frac{\partial}{\partial z} G_z = 0$$

$G_x = b_x B_x + g_x$ と分解して

$$b_x \gamma \frac{\partial}{\partial x} B_x + b_y \frac{\partial}{\partial y} B_y + b_z \frac{\partial}{\partial z} B_z - b_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} B_x + \frac{\partial}{\partial y} g_y + \frac{\partial}{\partial z} g_z = 0$$

上での結果から $b_x = 1, g_x = 0$ です。そして、残った項は

$$-\gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} B_x + \frac{\partial}{\partial y} g_y + \frac{\partial}{\partial z} g_z = 0$$

なので、(3) の x 成分

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} B_x$$

に対応させるために、 $g_y = k E_z, g_z = k E_y$ (k は定数で次元は $\{\beta_b\}\{v^{-1}\}$) とすれば

$$-\gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} B_x + k \frac{\partial}{\partial y} E_z - k \frac{\partial}{\partial z} E_y = -b_x \gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} B_x + k (\nabla \times \mathbf{E})_x = -\gamma \lambda \frac{\partial}{\partial t} B_x - \frac{k}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} B_x = 0$$

から、 $k = -\beta_b \gamma \lambda$ となります。これで、磁場の変換は

$$B'_x(\mathbf{x}', t') = B_x(\mathbf{x}, t)$$

$$B'_y(\mathbf{x}', t') = b_y B_y(\mathbf{x}, t) + k E_z(\mathbf{x}, t)$$

$$B'_z(\mathbf{x}', t') = b_z B_z(\mathbf{x}, t) - k E_y(\mathbf{x}, t) - \beta_b \gamma \lambda$$

$$k = -\beta_b \gamma \lambda$$

となります。

次に (4) の

$$(\nabla' \times \mathbf{B}'(\mathbf{x}', t'))_x = 4\pi\beta j'_x(\mathbf{x}', t') + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t'} E'_x(\mathbf{x}', t')$$

を考えます。この左辺は

$$\frac{\partial}{\partial y} G_z - \frac{\partial}{\partial z} G_y = b_z \frac{\partial}{\partial y} B_z - k \frac{\partial}{\partial y} E_y - b_y \frac{\partial}{\partial z} B_y - k \frac{\partial}{\partial z} E_z$$

右辺は

$$4\pi\beta j'_x(\mathbf{x}', t') + \frac{\beta}{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma V_x \frac{\partial}{\partial x} \right) E_x = 4\pi\beta v'_x \rho'(\mathbf{x}', t') + \frac{\beta}{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma V_x \frac{\partial}{\partial x} \right) E_x$$

電荷密度が 0 なら

$$b_z \frac{\partial B_z}{\partial y} - b_y \frac{\partial B_y}{\partial z} - k \frac{\partial E_y}{\partial y} - k \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\beta}{\alpha} \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \gamma V_x \frac{\partial}{\partial x} \right) E_x$$

なので、マクスウェル方程式 (1) と (4) が出てくるように分けて

$$\gamma V_x \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial E_x}{\partial x} + k \frac{\partial E_y}{\partial y} + k \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$b_z \frac{\partial B_z}{\partial y} - b_y \frac{\partial B_y}{\partial z} = \gamma \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

上の式から $k = \beta \gamma V_x / \alpha$ 、下の式から $b_y = b_z = \gamma$ です。この k は

$$k = -b_x \gamma \lambda = \frac{\beta_m \beta_b}{\alpha} \gamma V_x = \frac{\beta}{\alpha} \gamma V_x$$

と一致します。

よって、磁場の変換は

$$\begin{aligned}
B'_x(\mathbf{x}', t') &= B_x(\mathbf{x}, t) \\
B'_y(\mathbf{x}', t') &= \gamma(B_y(\mathbf{x}, t) + \frac{\beta}{\alpha} V_x E_z(\mathbf{x}, t)) \\
B'_z(\mathbf{x}', t') &= \gamma(B_z(\mathbf{x}, t) - \frac{\beta}{\alpha} V_x E_y(\mathbf{x}, t))
\end{aligned}$$

となります。

まとめると、電場と磁場の変換を

$$\begin{aligned}
E'_x(\mathbf{x}', t') &= E_x(\mathbf{x}, t) \\
E'_y(\mathbf{x}', t') &= \gamma(E_y(\mathbf{x}, t) - \frac{V_x}{\beta_b} B_z(\mathbf{x}, t)) \\
E'_z(\mathbf{x}', t') &= \gamma(E_z(\mathbf{x}, t) + \frac{V_x}{\beta_b} B_y(\mathbf{x}, t)) \\
B'_x(\mathbf{x}', t') &= B_x(\mathbf{x}, t) \\
B'_y(\mathbf{x}', t') &= \gamma(B_y(\mathbf{x}, t) + \frac{\beta}{\alpha} V_x E_z(\mathbf{x}, t)) \\
B'_z(\mathbf{x}', t') &= \gamma(B_z(\mathbf{x}, t) - \frac{\beta}{\alpha} V_x E_y(\mathbf{x}, t)) \\
\lambda &= -\frac{\beta_m}{\alpha} V_x = -\frac{V_x}{c^2}
\end{aligned} \tag{18}$$

とすれば、 O と O' で同じマクスウェル方程式になります。ただし、(3),(4) は成分を抜き出せば同じですが

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}, \quad \nabla' \times \mathbf{B}' - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'} = 4\pi\beta \mathbf{j}'$$

とは書けないです。簡単に言えば、 x 成分には γ が出てきて、他の成分では γ が出てこないからです。

電磁場の変換から λ が決まったので、 γ の式 (8) にいれると

$$\gamma = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 + V_x \lambda} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \beta_m V_x^2 / \alpha} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - (V_x / c)^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \eta^2}$$

よって、 γ は

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \eta^2}}$$

となり、 V_x が c を超えない限り実数です。 γ の符号としてマイナスを選ぶと、 x の座標変換から $-x$ という項が出てきます。これだと空間反転の変換になるので、今考えている x 軸方向に動いているという状況に合いません。なので、マイナスの方は考えません。この結果から、 v_x が c より小さいときに、(17) での $\gamma(1 + \lambda v_x)$ は正の値になります。

そして、座標変換 (9a)~(9d) は

$$x' = \gamma(x - V_x t)$$

$$t' = \gamma(-\frac{V_x}{c^2}x + t)$$

$$x = \gamma(x' + V_x t')$$

$$t = \gamma(\frac{V_x}{c^2}x' + t')$$

となり、電磁気の単位系とは無関係に決まります。これらと電場、磁場の変換 (18) とを合わせることで、系 O, O' で電磁気の法則を変えない座標変換になります。時間の式に c をかけたものを、ローレンツ変換と呼びます (ct の次元は長さ)。ローレンツ変換は $V_x \ll c$ なら $V_x/c \simeq 0$ なので、ガリレイ変換になります (電場、磁場の変換も)。より一般的には、 x, y, z 方向に速度 $\mathbf{V}$ で動かした場合ですが省きます。

電磁気の比例定数は変換を受けないとしているために、光速も変換を受けません。なので、光速はどの慣性系でも等しくなります。このことを先に使ってしまうと、 λ をマクスウェル方程式を使わずに決定できます。つまり、ローレンツ変換は、あらゆる慣性系で物理法則は同じ、光の速度はあらゆる慣性系で同じとすることで出てきます。これに対して、ガリレイ変換は、あらゆる慣性系で物理法則は同じとして出てきます。

あらゆる慣性系で物理法則は同じことは相対性原理、光の速度が等しいとすることは光速不変の原理と言います。この2つの原理による理論が特殊相対性理論です。

歴史的な経緯に触れておきます。ローレンツは、マイケルソン・モーレーの実験 (1881 年と 1887 年) からの物体の収縮の仮定や、カウフマンの実験 (1901 年) による電子の質量が速度に依存していることなどから、1904 年にローレンツ変換を導出しています (エーテルは仮定されている)。そして、1905 年にエーテルを仮定せずにアインシュタインが光速不変の原理からローレンツ変換を導出しています。しかし、1887 年に Voigt はドップラー効果の研究において波動方程式を不変にする変換として、光速不変の原理の仮定からローレンツ変換とは係数が異なっている 4 次元の変換を導出しています。ただし、その物理的な意味についての解釈は行っていません。

ローレンツと Voigt は交流があったようですが、1887 年の Voigt の論文をローレンツは知らなかったらしく、1908 年の Voigt への手紙で気づかなかったことを後悔していると伝えたり、本 (The Theory of Electrons) でも触れたりしています。