

## 時間の遅れ

電磁気そのものの話ではないですが、アインシュタインの発想に従ってローレンツ変換を求めます。

各慣性系でマクスウェル方程式が成立するとき、それらはローレンツ変換で繋がっています。このとき、各慣性系において光（電磁波）の速度は共通しています。このように、あらゆる慣性系において光の速度が同じとする要求は光速不変の原理と呼ばれます。ローレンツ変換は慣性系の間で時間が同じにならない変換ですが、このことが光速不変の原理から出てくることを見ます。

まず、進み方が同じ時計を定義します。時計は雑に言えば、一定間隔で起きる何かしらの現象を数えることで作られています。なので、その現象が起きた回数が時間になります。本来は回数から時間の単位への変換が行われますがここでは無視して、例えば速度  $v$  で距離  $L$  進む時間を回数  $N$  によって  $L/v = N$  とします。この回数を時間と呼んでいきます。

時計が同じ進み方をしているかどうかを光の伝達によって決めます。静止している時計  $A, B$  が離れて置いてあるとします。時計  $A$  から光が出て、時計  $B$  で即座に反射して  $A$  に戻ってくるとし、時計  $A$  では光が往復してくる時間、時計  $B$  では  $A$  から出た光が来たときの時間を見ます。往復にかかった時間は時計  $A$  で  $N(AB)$  回、 $B$  に光が届いた時間が時計  $B$  で  $N_B$  回とします。時計  $A, B$  の時間があっているなら、光が  $B$  に届いたときの時間  $N_B$  と光が戻ってきたときの時間  $N(AB)$  との差は、 $N_B$  と等しいはずなので

$$N_B = N(AB) - N_B$$

これを時計が同じ進み方をしている条件とします。また、光を出すときの  $A$  の時間を  $N_0$  と指定するなら

$$N_B - N_0 = N(AB) - N_B$$

となります。

時計  $A, B$  が動いて見える慣性系と静止している慣性系で考えていきます。時計が合わせてある慣性系  $O$  があり、 $A, B$  は一定速度  $V$  で  $x$  軸上を動くとし、 $O$  に対して  $V$  で動いている慣性系  $O'$  を用意し、 $O, O'$  の原点を最初は一致させておきます。 $O'$  において  $A$  は原点にいて、 $B$  は  $+L'_x$  の位置にいます。このようにして、 $O$  では  $A, B$  は時間の経過で速度  $V$  で遠ざかり、 $O'$  では  $A, B$  は静止するようにします。

$A$  から  $B$  へ光を送り、 $B$  から  $A$  に戻る時間の関係を  $O, O'$  で見ます。 $O$  において、原点にいた  $A$  から出た光が  $B$  に到達するまでの時間を  $n_B$  回とすれば、 $A, B$  間の距離  $L_x$  は、 $A, B$  は速度  $V$  で動いているために

$$n_B(c - V) = L_x$$

$c$  は光速です。往復にかかる時間  $n(AB)$  は

$$n(AB) = \frac{L_x}{c - V} + \frac{L_x}{c + V}$$

一方で、 $O'$  では  $A, B$  は静止したままなので、 $A$  からの光が  $B$  に到達したとき時計  $B$  では  $N'_B$  回、往復して  $A$  に戻ってきたとき時計  $A$  では  $N'(AB)$  回として、時計が一致する条件から

$$N'(AB) = 2N'_B$$

とします。どちらの場合でも同じ光の伝達による時間なので、 $O, O'$  の時間に関係性があるとして変換を作ります。  
系  $O$  の時計から  $O'$  の時計への変換を  $f$  として

$$N'(AB) = f(n(AB), 0, 0, 0) = f\left(\frac{L_x}{c-V} + \frac{L_x}{c+V}, 0, 0, 0\right) \quad (1)$$

$$N'_B = f(n_B, L_x, 0, 0) = f\left(\frac{L_x}{c-V}, L_x, 0, 0\right) \quad (2)$$

$A$  から  $B$  へ光を伝達させることで時計を合わせているので時計の位置にも依存させて、時間と位置  $x, y, z$  の 4 個の変数を持たせています。時計  $A$  では  $A$  が光を出した位置である原点  $(0, 0, 0)$ 、時計  $B$  では  $(L_x, 0, 0)$  としています。時間合わせの条件に入れば、変換  $f$  の関係は

$$f\left(\frac{L}{c-V} + \frac{L}{c+V}, 0, 0, 0\right) = 2f\left(\frac{L}{c-V}, L, 0, 0\right)$$

となります。

$A$  から  $y$  軸方向にいる光を出した場合も考えます。時計  $C$  を  $y$  軸上に置いて、速度  $V$  で  $x$  軸方向に動いていくとします。 $O$  において、どちらも速度  $V$  で動いているので、 $A$  からの光が  $C$  に到達するまでの回数を  $n_C$  回とすれば、 $A$  と  $C$  の  $y$  軸の距離  $L_y$  は

$$c^2 n_C^2 - V^2 n_C^2 = L_y^2$$

$y$  軸方向に関しては静止しているときと同じなので、 $A$  に帰ってきたときの回数は  $2n_C$  回になります。 $O'$  における時間合わせの条件は、 $C$  に着いたときの回数を  $N'_C$ 、往復の回数を  $N'(AC)$  として

$$N'(AC) = 2N'_C$$

変換  $f$  で書けば

$$f\left(\frac{2L_y}{\sqrt{c^2 - V^2}}, 0, 0, 0\right) = 2f\left(\frac{L_y}{\sqrt{c^2 - V^2}}, 0, L_y, 0\right)$$

$z$  軸方向でも同様で、 $z$  軸上に時計  $D$  を置いて、 $A$  から出た光が  $D$  に到達するまでの回数を  $n_D$  回として、 $A, D$  の間の距離  $L_z$  は

$$c^2 n_D^2 - V^2 n_D^2 = L_z^2$$

となり、 $O'$  での時間合わせの条件は

$$f\left(\frac{2L_z}{\sqrt{c^2 - V^2}}, 0, 0, 0\right) = 2f\left(\frac{L_z}{\sqrt{c^2 - V^2}}, 0, 0, L_z\right)$$

となります。

変換  $f$  は 1 次までを含むとして

$$f(n, x, y, z) = a_1 n + a_2 x + a_3 y + a_4 z$$

これに  $y$  軸、 $z$  軸の場合を入れると

$$2a_1 \frac{L_y}{\sqrt{c^2 - V^2}} = 2a_1 \frac{L_y}{\sqrt{c^2 - V^2}} + a_3 L_y$$

$$2a_1 \frac{L_z}{\sqrt{c^2 - V^2}} = 2a_1 \frac{L_z}{\sqrt{c^2 - V^2}} + a_4 L_z$$

となるので、 $a_3, a_4$  は 0 です。 $x$  軸の場合では

$$a_1 \left( \frac{L_x}{c - V} + \frac{L_x}{c + V} \right) = 2a_1 \frac{L_x}{c - V} + 2a_2 L_x$$

$$a_1 \left( -\frac{1}{c - V} + \frac{1}{c + V} \right) = 2a_2$$

$$-a_1 \frac{V}{c^2 - V^2} = a_2$$

なので

$$f(n, x) = a_1 n + a_2 x = a_1 n - a_1 \frac{V}{c^2 - V^2} x = a_1 \left( n - \frac{V}{c^2 - V^2} x \right) \quad (3)$$

$a_3 = a_4 = 0$  なので、 $y, z$  は省いています。 $O$  では、 $A$  からの光は  $n_B$  回で  $B$  に着き ( $A, B$  は  $Vn_B$  進む)、そのときの  $B$  の位置が  $x_B$  であるなら、 $L_x = x_B - Vn_B$  なので、 $O'$  で  $A$  から出た光が  $B$  に到達したときの時間  $N'_B$  は (2),(3) から

$$f(n_B, L_x) = a_1 \left( n_B - \frac{V}{c^2 - V^2} (x_B - Vn_B) \right) = a_1 \frac{n_B(c^2 - V^2) - V(x_B - Vn_B)}{c^2 - V^2} = a_1 \frac{c^2 n_B - Vx_B}{c^2 - V^2} \quad (4)$$

また、 $O$  から見たとき  $L_x = (c - V)n_B$  なので

$$f(n_B, L_x) = a_1 \left( n_B - \frac{V}{c^2 - V^2} L_x \right) = a_1 \left( \frac{L_x}{c - V} - \frac{V}{c^2 - V^2} L_x \right) = a_1 \frac{cL_x}{c^2 - V^2}$$

とも書けます。 $O'$  ではこの回数で光は  $A$  から  $B$  へ到達するので、 $O'$  での  $A, B$  の距離  $L'_x$  は

$$L'_x = cN'_B = cf(n_B, L_x) = a_1 \frac{c^2 L_x}{c^2 - V^2} \quad (5)$$

となります。

これだけでは  $a_1, a_2$  が決まらないので、 $O'$  から  $O$  への変換を見ます。変換を  $g$  として、 $f$  と同様に

$$\begin{aligned}
n_B &= g(N'_B, L'_x) = b_1 N'_B + b_2 L'_x \\
n(AB) &= g(N'(AB), 0) = b_1 N'(AB)
\end{aligned} \tag{6}$$

$O'$  では時間合わせによって

$$N'(AB) = 2N'_B$$

$O$  での往復の時間  $n(AB)$  と  $B$  へ到達する時間  $n_B$  は

$$n_B(c - V) = L_x, \quad n(AB) = \frac{L_x}{c - V} + \frac{L_x}{c + V}$$

そうすると

$$\begin{aligned}
n(AB) &= n_B + \frac{L_x}{c + V} \\
n(AB) &= b_1 N'(AB) = 2b_1 N'_B = 2n_B - 2b_2 L'_x
\end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned}
n(AB) &= 2n_B - 2b_2 L'_x \\
n_B + \frac{L_x}{c + V} &= 2n_B - 2b_2 L'_x \\
(-1 + \frac{c - V}{c + V})n_B &= -2b_2 L'_x \\
\frac{V}{c + V} \frac{L_x}{c - V} &= b_2 L'_x \\
\frac{V L_x}{c^2 - V^2} &= a_1 b_2 \frac{c^2 L_x}{c^2 - V^2} \\
a_1 b_1 &= \frac{V}{c^2}
\end{aligned}$$

として、 $a_1, b_2$  の関係が求まります。

今度は  $y$  軸方向を考えます。 $AC$  間の距離  $cn_C$  は、 $O'$  からの変換によって

$$cn_C = cg(N'_C, 0) = b_1 c N'_C = a_1 b_1 \frac{c^2 L_y}{\sqrt{c^2 - V^2}} = cn_C$$

これから、 $a_1 b_1 = 1$  です。 $O$  から  $O'$  での変換による  $A, C$  間の距離は

$$L'_y = c N'_C = cf(n_C, 0) = a_1 cn_C = a_1 \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} L_y = \phi L_y$$

と書けます。ここでの変換  $f$  と変換  $g$  は、 $O$  から速度  $+V$  で動いている  $O'$  への変換、 $O'$  から  $-V$  で動いている  $O$  への変換です。しかし、空間において特別な方向がないなら、 $-V$  で進むか、 $+V$  で進むかは見方の違いでしかないです。単純に言えば、 $-V$  での変換を  $\lambda_-$ 、 $+V$  での変換を  $\lambda_+$  とすれば、 $y$  方向では

$$\lambda_+ L_y = \lambda_- L_y$$

となるべきということです。そうすると、

$$L_y = \lambda_- L'_y = \lambda_+ L'_y, \quad L'_y = \lambda_+ L_y \Rightarrow \lambda_+ = 1$$

これから  $\phi = 1$  になり

$$\frac{a_1 c}{\sqrt{c^2 - V^2}} = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - V^2} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

となります。

これで変換の係数は全て求まり

$$a_1 = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \gamma^{-1}, \quad a_2 = -\frac{V}{c^2 - V^2} a_1 = -\frac{V}{c^2} \gamma$$

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = \frac{V}{c^2} \frac{1}{a_1}$$

これによって、光の往復の時間は (1),(3)(もしくは (6)) から

$$N'(AB) = \gamma^{-1} n(AB)$$

$\gamma^{-1} < 1$  なので  $N'(AB) < n(AB)$  から、 $A, B$  が動いて見える  $O$  での回数は  $O'$  での回数より多いです。つまり、時計の進みが  $O$  より  $O'$  が遅いです。これが時間の遅れと呼ばれるものです。 $B$  に着く時間でも (4) から

$$N'_B = a_1 \frac{c^2 n_B - V x_B}{c^2 - V^2} = \gamma \left( n_B - \frac{V}{c^2} x_B \right) = \gamma \left( n_B - \frac{V^2}{c^2} n_B - \frac{V}{c^2} L_x \right) = \gamma^{-1} n_B - \gamma \frac{V}{c} \frac{L_x}{c}$$

となるので、時間の遅れは起きます。そして、これは時間のローレンツ変換です

しかし、 $A, B$  間の距離が  $O$  と  $O'$  で等しいとして (距離は光が進んだ時間で与える)、 $O$  で  $L'_x$  を  $c - V$  で割ってみると

$$\frac{L'_x}{c - V} = \frac{c N'_B}{c - V} = \gamma^{-1} \frac{c^2}{c^2 - V^2} \frac{L_x}{c - V} = \gamma n_B$$

となり、 $n_B$  になりません。というわけで、 $A, B$  間の距離が  $O, O'$  で異なり

$$L'_x = \gamma L_x \quad (L_x = x_B - V n_B = (c - V)n_B)$$

$O$  での距離が  $O'$  より短く、これがローレンツ収縮 (Lorentz contraction) です。そして、 $L'_x$  は  $O'$  での  $B$  の位置  $x'_B$  なので

$$x'_B = \gamma(x_B - V n_B)$$

と書けて、これは位置のローレンツ変換です ((5) を変形すれば出てくる)。このようにして、アインシュタインは光速不変の原理と時間合わせからローレンツ変換を導き、特殊相対性理論の始まりとなりました。ちなみに、ローレンツが最初に導いたときはエーテルに対して速度  $V$  で動いていると収縮が起きるとしたので、今の意味とは異なっていました。