ローレンツ力の変換

ローレンツ力がローレンツ変換でどのように変換されるかを見ます。その後にローレンツ変換で形を変えない運動方程式を求めます。求めるだけで運動方程式についての話はしていません。

ローレンツ力のローレンツ変換を求めます。ある慣性系 O があり、それに対して x 軸方向へ一定速度 V で動いている慣性系を O' とします ($t=t'=0$ のとき原点は一致)。O の位置 $\boldsymbol{x}$ と時間 t から、O での位置 $\boldsymbol{x}'$ と時間 t' へのローレンツ変換と逆変換は

$$
\begin{aligned}
&x' = \gamma(x - Vt) \\
&t' = \gamma(-\frac{V}{c^2}x + t) \\
&x = \gamma(x' + Vt') \\
&t = \gamma(\frac{V}{c^2}x' + t')
\end{aligned}
$$

$y = y', z = z'$ です。γ は

$$\gamma = (1 - \frac{V^2}{c^2})^{-1/2}$$

速度の変換は位置の時間微分から

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dx'}{dt} = \gamma^{-1}(1 - \frac{v_xV}{c^2})^{-1}\gamma(v_x - V) = \frac{v_x - V}{1 - v_xV/c^2} = \gamma_*^2(v_x - V) \tag{1a}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dy'}{dt} = \gamma^{-1}\frac{v_y}{1 - v_xV/c^2} = \gamma^{-1}\gamma_*^2 v_y \tag{1b}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \gamma^{-1}\frac{v_z}{1 - v_xV/c^2} = \gamma^{-1}\gamma_*^2 v_z \tag{1c}$$

γ_* は

$$\gamma_* = (1 - \frac{v_xV}{c^2})^{-1/2}$$

dt/dt' は

$$dt' = \frac{\partial t'}{\partial t}dt + \frac{\partial t'}{\partial x}dx + \frac{\partial t'}{\partial y}dy + \frac{\partial t'}{\partial z}dz = \gamma dt - \frac{V}{c^2}\gamma dx$$

から

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma^{-1}(1 - \frac{v_x V}{c^2})^{-1} = \gamma^{-1}\gamma_*^2 \quad (v_x = \frac{dx}{dt}) \tag{2}$$

逆変換は

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dt'}{dt}\frac{dx}{dt'} = \gamma^{-1}(\frac{V_x}{c^2}v'_x + 1)^{-1}\gamma(v'_x + V) = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dt'}{dt}\frac{dy'}{dt'} = \gamma^{-1}(\frac{V_x}{c^2}v'_x + 1)^{-1}v'_y = \gamma^{-1}\frac{v'_y}{1 + v'_x V/c^2} \\
v_z &= \frac{dy}{dt} = \gamma^{-1}\frac{v'_z}{1 + v'_x V/c^2}
\end{aligned}$$

となります。

O' において、電場 $\boldsymbol{E}'$、磁場 $\boldsymbol{B}'$ でのローレンツ力は

$$\boldsymbol{F}' = Q(\boldsymbol{E}' + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}')$$

$\boldsymbol{v}'$ はローレンツ力を受ける電荷 Q の点電荷の速度です。電磁場のローレンツ変換は

$$\begin{aligned}
E'_x(\boldsymbol{x}', t') &= E_x(\boldsymbol{x}, t) \\
E'_y(\boldsymbol{x}', t') &= \gamma(E_y(\boldsymbol{x}, t) - \frac{V}{\beta_b}B_z(\boldsymbol{x}, t)) \\
E'_z(\boldsymbol{x}', t') &= \gamma(E_z(\boldsymbol{x}, t) + \frac{V}{\beta_b}B_y(\boldsymbol{x}, t)) \\
B'_x(\boldsymbol{x}', t') &= B_x(\boldsymbol{x}, t) \\
B'_y(\boldsymbol{x}', t') &= \gamma(B_y(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\beta_b}{c^2}VE_z(\boldsymbol{x}, t)) \\
B'_z(\boldsymbol{x}', t') &= \gamma(B_z(\boldsymbol{x}, t) - \frac{\beta_b}{c^2}VE_y(\boldsymbol{x}, t))
\end{aligned}$$

ローレンツ力の x 成分 F'_x から見ていきます。F'_x は

$$F'_x = Q(E'_x + \beta_b^{-1}(v'_y B'_z - v'_z B'_y))$$

$v'_y B'_z - v'_z B'_y$ は

$$\begin{aligned}
v'_y B'_z - v'_z B'_y &= \gamma_*^2 v_y(B_z - \frac{\beta_b}{c^2}VE_y) - \gamma_*^2 v_z(B_y + \frac{\beta_b}{c^2}VE_z) \\
&= \gamma_*^2\big(v_y(B_z - \frac{\beta_b}{c^2}VE_y) - v_z(B_y + \frac{\beta_b}{c^2}VE_z)\big)
\end{aligned} \tag{3}$$

ローレンツ力の変換は O でのローレンツ力 F_x, F_y, F_z の組み合わせで書けると予想します。O でのローレンツ力は

$$
\begin{aligned}
F_x &= Q(E_x + \beta_b^{-1}(v_y B_z - v_z B_y)) \\
F_y &= Q(E_y + \beta_b^{-1}(v_z B_x - v_x B_z)) \\
F_z &= Q(E_z + \beta_b^{-1}(v_x B_y - v_y B_x))
\end{aligned}
$$

(3) に B_x が出てくるように変形すると

$$
\begin{aligned}
v'_y B'_z - v'_z B'_y &= \frac{1}{1 - v_x V/c^2}(v_y(B_z - \frac{\beta_b}{c^2} V E_y) - v_z(B_y + \frac{\beta_b}{c^2} V E_z)) \\
&\quad + \frac{1}{c^2}\frac{v_y v_z V B_x}{1 - v_x V/c^2} - \frac{1}{c^2}\frac{v_y v_z V B_x}{1 - v_x V/c^2} \\
&= \gamma_*^2 \big(v_y(B_z - \frac{\beta_b}{c^2} V E_y - \frac{1}{c^2} v_z V B_x) - v_z(B_y + \frac{\beta_b}{c^2} V E_z - \frac{1}{c^2} v_y V B_x)\big) \\
&= \frac{V}{c^2}\gamma_*^2 \big(v_y(\frac{c^2}{V} B_z - \beta_b E_y - v_z B_x) - v_z(\frac{c^2}{V} B_y + \beta_b E_z - v_y B_x)\big)
\end{aligned}
$$

後は速度と磁場のベクトル積になるように、括弧内の第 1 項は

$$
\begin{aligned}
\frac{c^2}{V} B_z - \beta_b E_y - v_z B_x &= \frac{c^2}{V} B_z - \beta_b E_y - v_z B_x + v_x B_z - v_x B_z \\
&= \frac{c^2}{V}(1 - \frac{v_x V}{c^2}) B_z - \beta_b E_y - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_y \\
&= \frac{c^2}{V}\gamma_*^{-2} B_z - \beta_b E_y - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_y
\end{aligned}
$$

第 2 項は

$$
\begin{aligned}
\frac{c^2}{V} B_y + \beta_b E_z - v_y B_x &= \frac{c^2}{V} B_y + \beta_b E_z - v_y B_x + v_x B_y - v_x B_y \\
&= \frac{c^2}{V}(1 - \frac{v_x V}{c^2}) B_y + \beta_b E_z + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_z \\
&= \frac{c^2}{V}\gamma_*^{-2} B_y + \beta_b E_z + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_z
\end{aligned}
$$

と変形して

$$
\begin{aligned}
v'_y B'_z - v'_z B'_y &= \frac{v_y V}{c^2}\gamma_*^2 (\frac{c^2}{V}\gamma_*^{-2} B_z - \beta_b E_y - (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_y) \\
&\quad - \frac{v_z V}{c^2}\gamma_*^2 (\frac{c^2}{V}\gamma_*^{-2} B_y + \beta_b E_z + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_z) \\
&= v_y B_z - v_z B_y - \beta_b \frac{v_y V}{c^2}\gamma_*^2 (E_y + \beta_b^{-1}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_y) - \beta_b \frac{v_z V}{c^2}\gamma_*^2 (E_z + \beta_b^{-1}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_z)) \\
&= (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_x - \beta_b \frac{v_y V}{c^2}\gamma_*^2 \frac{F_y}{Q} - \beta_b \frac{v_z V}{c^2}\gamma_*^2 \frac{F_z}{Q}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
F'_x &= Q(E_x + \beta_b^{-1}(v'_y B'_z - v'_z B'_y)) \\
&= Q(E_x + \beta_b^{-1}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_x - \frac{v_y V}{c^2}\gamma_*^2 \frac{F_y}{Q} - \frac{v_z V}{c^2}\gamma_*^2 \frac{F_z}{Q}) \\
&= F_x - \frac{v_y V}{c^2}\gamma_*^2 F_y - \frac{v_z V}{c^2}\gamma_*^2 F_z \\
&= \frac{1 - v_x V/c^2}{1 - v_x V/c^2} F_x - \frac{1}{c^2}\frac{v_y V}{1 - v_x V/c^2} F_y - \frac{1}{c^2}\frac{v_z V}{1 - v_x V/c^2} F_z \\
&= \frac{F_x}{1 - v_x V/c^2} - \frac{1}{c^2}\frac{v_x V}{1 - v_x V/c^2} F_x - \frac{1}{c^2}\frac{v_y V}{1 - v_x V/c^2} F_y - \frac{1}{c^2}\frac{v_z V}{1 - v_x V/c^2} F_z \\
&= \frac{F_x - (V/c^2)\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{1 - v_x V/c^2} \\
&= \gamma_*^2 (F_x - \frac{V}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}) \qquad (4a)
\end{aligned}
$$

F'_y は

$$
\begin{aligned}
F'_y &= Q(E'_y + \beta_b^{-1}(v'_z B'_x - v'_x B'_z)) \\
&= Q(\gamma(E_y - \beta_b^{-1} V B_z) + \beta_b^{-1}(\gamma^{-1}\frac{v_z}{1 - v_x V/c^2} B_x - \gamma\frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}(B_z - \frac{\beta_b}{c^2} V E_y)) \\
&= \frac{\gamma Q}{1 - v_x V/c^2}\big((E_y - \beta_b^{-1} V B_z)(1 - \frac{v_x V}{c^2}) \\
&\quad + \beta_b^{-1}\gamma^{-2} v_z B_x - \beta_b^{-1}(v_x - V)(B_z - \frac{\beta_b}{c^2} V E_y)\big) \\
&= \gamma\gamma_*^2 Q\big(E_y(1 - \frac{v_x V}{c^2}) - \beta_b^{-1} V B_z(1 - \frac{v_x V}{c^2}) \\
&\quad + \beta_b^{-1}\gamma^{-2} v_z B_x - \beta_b^{-1} v_x B_z + \frac{v_x V}{c^2} E_y + \beta_b^{-1} V B_z - \frac{V^2}{c^2} E_y\big) \\
&= \gamma\gamma_*^2 Q\big((1 - \frac{V^2}{c^2}) E_y + \beta_b^{-1}\gamma^{-2} v_z B_x - \beta_b^{-1}(1 - \frac{V^2}{c^2}) v_x B_z\big) \\
&= \gamma\gamma_*^2 Q(\gamma^{-2} E_y + \beta_b^{-1}\gamma^{-2}(v_z B_x - v_x B_z)) \\
&= \gamma^{-1}\gamma_*^2 Q(E_y + \beta_b^{-1}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_y) \\
&= \gamma^{-1}\gamma_*^2 F_y \\
&= \gamma^{-1}\frac{F_y}{1 - v_x V/c^2}
\end{aligned} \tag{4b}
$$

F'_z は F'_y と同じ構造になっているので

$$
F'_z = \gamma^{-1}\gamma_*^2 F_z = \gamma^{-1}\frac{F_z}{1 - v_x V/c^2} \tag{4c}
$$

逆変換は V の符号が反転するだけなので

$$
\begin{aligned}
F_x &= F'_x + \frac{1}{c^2}\frac{v'_y V}{1 + v'_x V/c^2} F'_y + \frac{1}{c^2}\frac{v'_z V}{1 + v'_x V/c^2} F'_z = \frac{1}{1 + v'_x V/c^2}(F'_x + \frac{V}{c^2}\boldsymbol{F}' \cdot \boldsymbol{v}') \\
F_y &= \gamma^{-1}\frac{Q}{1 + v'_x V/c^2} F'_y \\
F_z &= \gamma^{-1}\frac{Q}{1 + v'_x V/c^2} F'_z
\end{aligned}
$$

これでローレンツ力の変換が求まりました。

変換が求まったので、ニュートンの運動方程式のローレンツ変換を行います。O' で点電荷はニュートンの運動方程式

$$
m\frac{d^2\boldsymbol{x}'}{dt'^2} = Q(\boldsymbol{E}' + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}') \tag{5}
$$

に従っているとします。m は点電荷の質量です。左辺の加速度の変換は速度を時間微分すればいいだけなので、(2) を使って

$$
\begin{aligned}
a'_x = \frac{dv'_x}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dv'_x}{dt} &= \gamma^{-1}\gamma_*^2 \frac{d}{dt}\frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2} \\
&= \gamma^{-1}\gamma_*^2 (\frac{a_x}{1 - v_x V/c^2} - \frac{v_x - V}{(1 - v_x V/c^2)^2}(-\frac{a_x V}{c^2})) \\
&= \gamma^{-1}\gamma_*^2 (\frac{1}{(1 - v_x V/c^2)^2}(a_x(1 - \frac{v_x V}{c^2}) + (v_x - V)\frac{a_x V}{c^2}) \\
&= \gamma^{-1}\gamma_*^6 (a_x - \frac{a_x v_x V}{c^2} + \frac{a_x v_x V}{c^2} - \frac{a_x V^2}{c^2}) \\
&= \gamma^{-1}\gamma_*^6 a_x (1 - \frac{V^2}{c^2}) \\
&= \gamma^{-3}\gamma_*^6 a_x \qquad \text{(6a)}
\end{aligned}
$$

y 成分は

$$
\begin{aligned}
a'_y = \frac{dv'_y}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\frac{dv'_y}{dt} &= \gamma^{-1}\frac{1}{1 - v_x V/c^2}\frac{d}{dt}(\gamma^{-1}\frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}) \\
&= \gamma^{-2}(\frac{a_y}{(1 - v_x V/c^2)^2} + \frac{1}{c^2}\frac{a_x v_y V}{(1 - v_x V/c^2)^3}) \\
&= \gamma^{-2}(\gamma_*^4 a_y + \frac{1}{c^2}\gamma_*^6 a_x v_y V) \qquad \text{(6b)}
\end{aligned}
$$

z 成分は

$$
\begin{aligned}
a'_z = \frac{dv'_z}{dt'} &= \gamma^{-2}(\frac{a_z}{(1 - v_x V/c^2)^2} + \frac{1}{c^2}\frac{a_x v_z V}{(1 - v_x V/c^2)^3}) \\
&= \gamma^{-2}(\gamma_*^4 a_z + \frac{1}{c^2}\gamma_*^6 a_x v_z V) \qquad \text{(6c)}
\end{aligned}
$$

逆変換は

$$
\begin{aligned}
a_x &= \gamma^{-3}\frac{a'_x}{(1 + v'_x V/c^2)^3} \\
a_y &= \gamma^{-2}(\frac{a'_y}{(1 + v'_x V/c^2)^2} - \frac{1}{c^2}\frac{a'_x v'_y V}{(1 + v'_x V/c^2)^3}) \\
a_z &= \gamma^{-2}(\frac{a'_z}{(1 + v'_x V/c^2)^2} - \frac{1}{c^2}\frac{a'_x v'_z V}{(1 + v'_x V/c^2)^3})
\end{aligned}
$$

よって、x 成分では

$$
m\frac{d^2 x'}{dt'^2} = F'_x
$$

$$
\gamma^{-3}\gamma_*^4 m\frac{d^2 x}{dt^2} = F_x - \frac{V}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}
$$

これはニュートンの運動方程式の形になっていません。例えば、$\boldsymbol{v}=(v_x,0,0)$ としてみると

$$\begin{aligned}\gamma^{-3}\gamma_*^4 m\frac{d^2x}{dt^2}&=F_x(1-\frac{v_xV}{c^2})\\&=\gamma_*^{-2}F_x\\\gamma^{-3}\gamma_*^6 m\frac{d^2x}{dt^2}&=F_x\end{aligned}$$

となって、明らかに形が変わっています。このため、全ての慣性系で物理法則は同じという相対性原理が成立していません。なので、この要求を満たす運動方程式を求めます。

ローレンツ変換は光速より十分小さい速度でガリレイ変換になり、ニュートンの運動方程式はガリレイ変換によって相対性原理が成立しています。なので、(5) は近似的な式だったために上手くいかなかったと考えられます。

というわけで、近似的でない式から始めるための状況を作ります。O' において点電荷はローレンツ力を受けて動いているとします。その運動がある瞬間では静止して見えるとします。静止していれば速度が光速に対して十分小さいかどうかとは無関係になります。このため、その静止している瞬間での微小な時間間隔においてニュートンの運動方程式は使えるはずで

$$m\frac{d^2\boldsymbol{x}'}{dt'^2}=Q\boldsymbol{E}'$$

静止して見えてもそこには力が作用しているので、加速度は 0 ではないです。ただし、加速度 $\boldsymbol{a}'$ は瞬間的なもので、加速は緩やかとします。この点電荷の速度が $(v_x,0,0)$ に見えるように O' を取ります (速度は瞬間的なもの)。そうすると、O では $\boldsymbol{v}=(v_x,0,0)$、O' では $\boldsymbol{v}'=(0,0,0)$ になっているので、O' は O に対して x 軸方向に v_x で動いています。この状況でローレンツ変換を行います。

O から見たら点電荷は v_x で遠ざかるので、(6a) から (6c) は

$$\begin{aligned}ma'_x&=m\gamma_v^{-3}\frac{a_x}{(1-v_x^2/c^2)^3}=m\gamma_v^3a_x\\ma'_y&=m\gamma_v^{-2}\frac{a_y}{(1-v_x^2/c^2)^2}=m\gamma_v^2a_y\\ma'_z&=m\gamma_v^{-2}\frac{a_z}{(1-v_x^2/c^2)^2}=m\gamma_v^2a_z\end{aligned}$$

γ_v は $(1-v_x^2/c^2)^{-1/2}$ です。電場のローレンツ変換と合わせて

$$\begin{aligned}m\gamma_va_x&=Q\gamma_v^{-2}E_x=QE_x-\frac{v_x^2}{c^2}QE_x\\m\gamma_va_y&=Q(E_y-\frac{v_x}{\beta_b}B_z)\\m\gamma_va_z&=Q(E_z+\frac{v_x}{\beta_b}B_y)\end{aligned}$$

今見ている瞬間は $v_y=v_z=0$ なので

$$\frac{v_x^2}{c^2}QE_x = \frac{1}{c^2}Q(E_x v_x)v_x = \frac{1}{c^2}Q(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})v_x$$

$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = (v_yB_z - v_zB_y, v_zB_x - v_xB_z, v_xB_y - v_yB_z) = (0, -v_xB_z, v_xB_y)$$

これらに書き換えれば

$$m\gamma_v\boldsymbol{a} = Q(\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

内積は 3 次元回転で不変なので、適当な 3 次元回転行列を作用させればこの式のベクトルは任意の方向が取れます。これによって $\boldsymbol{v}$ は任意の方向を向けるので、ここから γ_v は

$$\gamma_v = (1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2})^{-1/2}$$

とし、v_y, v_z は 0 でないとします。回転させずに v_x だけのままでもこの先の話は同じです。
　$\boldsymbol{v}$ との内積を取ると、$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = 0$ なので

$$\begin{aligned} m\gamma_v\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} &= Q(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})|\boldsymbol{v}|^2) \\ &= Q(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})(1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2}) \\ m\gamma_v^3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} &= Q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{7}$$

これによって

$$m\gamma_v\boldsymbol{a} + \frac{Q}{c^2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = m\gamma_v\boldsymbol{a} + m\frac{\gamma_v^3}{c^2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$$

第 2 項は

$$\frac{d}{dt}\gamma_v = \frac{d}{dt}(1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2})^{-1/2} = (1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2})^{-3/2}\frac{1}{c^2}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\gamma_v^3}{c^2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} \tag{8}$$

から

$$m\gamma_v\boldsymbol{a} + m\frac{\gamma_v^3}{c^2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} = m(\gamma_v\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\gamma_v}{dt}\boldsymbol{v}) = m\frac{d}{dt}(\gamma_v\boldsymbol{v})$$

なので

$$m\frac{d}{dt}(\gamma_v \boldsymbol{v}) = Q(\boldsymbol{E} + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{9}$$

速度が光速より十分小さければ $\gamma_v = 1$ なので、ニュートンの運動方程式になります。そして、これは静止している運動方程式のローレンツ変換から求められたので、点電荷が速度 $\boldsymbol{v}$ で動いて見える慣性系での運動方程式と言えます。

ローレンツ変換で形を変えないのを確かめます。そのために、慣性系 O'' とそれに対して x 軸方向へ速度 V で動いている O との間の変換を行います。O'' とすると煩わしいので、O を O'、O'' を O として、(9) を

$$m\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'} \boldsymbol{v}') = \boldsymbol{F}' \quad\quad (\boldsymbol{F}' = Q(\boldsymbol{E}' + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{B}')) \tag{10}$$

と書くことにします。

まず、$\gamma_{v'}$ の変換を求めます。v'_x は

$$\begin{aligned}1 - \frac{v'^2_x}{c^2} &= 1 - \frac{1}{c^2}\frac{(v_x - V)^2}{(1 - v_x V/c^2)^2} \\ &= \frac{1}{c^2}\frac{c^2(1 - v_x V/c^2)^2 - (v_x - V)^2}{(1 - v_x V/c^2)^2} \\ &= \gamma_*^4(1 - \frac{v_x^2}{c^2})(1 - \frac{V^2}{c^2})\end{aligned}$$

v'_y, v'_z は

$$\begin{aligned}\frac{v'^2_y}{c^2} &= \gamma^{-2}\frac{1}{c^2}\frac{v_y^2}{(1 - v_x V/c^2)^2} = \gamma_*^4\frac{v_y^2}{c^2}(1 - \frac{V^2}{c^2}) \\ \frac{v'^2_z}{c^2} &= \gamma_*^4\frac{v_z^2}{c^2}(1 - \frac{V^2}{c^2})\end{aligned}$$

これらを合わせると

$$
\begin{aligned}
\gamma_{v'}^{-2} &= 1 - \frac{|\boldsymbol{v'}|^2}{c^2} \\
&= 1 - \frac{|v_x'|^2}{c^2} - \frac{|v_y'|^2}{c^2} - \frac{|v_z'|^2}{c^2} \\
&= \gamma_*^4((1 - \frac{v_x^2}{c^2})(1 - \frac{V^2}{c^2}) - \frac{v_y^2}{c^2}(1 - \frac{V^2}{c^2}) - \frac{v_z^2}{c^2}(1 - \frac{V^2}{c^2})) \\
&= \gamma_*^4(1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2})(1 - \frac{V^2}{c^2}) \\
&= \gamma_*^4(1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2})(1 - \frac{V^2}{c^2}) \\
&= \gamma_*^4\gamma_v^{-2}\gamma^{-2} \\
\gamma_{v'} &= \gamma_*^{-2}\gamma_v\gamma
\end{aligned}
$$

そうすると、(1a) から

$$
\gamma_{v'}v_x' = \gamma_*^{-2}\gamma_v\gamma\gamma_*^2(v_x - V) = \gamma(\gamma_v v_x - \gamma_v V)
$$

時間微分は (8) を使って

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'}v_x') = \gamma^{-1}\gamma_*^2\gamma\frac{d}{dt}(\gamma_v v_x - \gamma_v V) &= \gamma_*^2(\frac{d}{dt}(\gamma_v v_x) - V\frac{d}{dt}\gamma_v) \\
&= \gamma_*^2(\frac{d}{dt}(\gamma_v v_x) - \frac{V}{c^2}\gamma_v^3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

ローレンツ力の変換 (4a) と合わせて

$$
m\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'}v_x') = F_x'
$$

$$
m\frac{d}{dt}(\gamma_v v_x) - \frac{V}{c^2}m\gamma_v^3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = F_x - \frac{V}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}
$$

左辺の第 2 項は (7) から

$$
m\gamma_v^3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v} = Q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}
$$

右辺の第 2 項は

$$
\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = Q(\boldsymbol{E} + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v} = Q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}
$$

となっているのでこれらは消えて、x 成分の式は

$$m\frac{d}{dt}(\gamma_v v_x) = F_x$$

y 成分では

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'} v'_y) = \gamma^{-1}\gamma_*^2\frac{d}{dt}(\gamma_*^{-2}\gamma_v\gamma\gamma^{-1}\gamma_*^2 v_y) = \gamma^{-1}\gamma_*^2\frac{d}{dt}(\gamma_v v_y) \\
&F'_y = \gamma^{-1}\gamma_*^2 F_y
\end{aligned}$$

z 成分も同様なので

$$m\frac{d}{dt}(\gamma_v v_y) = F_y\ ,\ m\frac{d}{dt}(\gamma_v v_z) = F_z$$

となり、(10) と同じなのが確かめられます。

もしくは

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}(\gamma_v\boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{d\gamma_v}{dt} + \gamma_v\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= |\boldsymbol{v}|^2\frac{\gamma_v^3}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \gamma_v\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= (\gamma_v^2\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2} + 1)\gamma_v\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= (\frac{1}{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2} + 1)\gamma_v\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= (\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2} + 1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2})\frac{1}{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}\gamma_v\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \\
&= \gamma_v^3\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \qquad (\frac{d\gamma_v}{dt} = \frac{\gamma_v^3}{c^2}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v}) \\
&= c^2\frac{d\gamma_v}{dt}
\end{aligned}$$

となることを使えば、x 成分の式は

$$\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'} v'_x) = \gamma^{-1}\gamma_*^2\gamma\frac{d}{dt}(\gamma_v v_x - \gamma_v V) = \gamma_*^2(\frac{d}{dt}(\gamma_v v_x) - \frac{V}{c^2}\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}(\gamma_v\boldsymbol{v}))$$

同様に、y, z 成分では

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'} v'_y) &= \gamma^{-1}\gamma_*^2\frac{d}{dt}(\gamma_v v_y) \\
\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'} v'_z) &= \gamma^{-1}\gamma_*^2\frac{d}{dt}(\gamma_v v_z)
\end{aligned}$$

ここで、O でも (10) の形なら

$$
\begin{aligned}
m\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'}v'_x) &= \gamma_*^2(F_x - \frac{V}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}) \\
m\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'}v'_y) &= \gamma^{-1}\gamma_*^2 F_y \\
m\frac{d}{dt'}(\gamma_{v'}v'_z) &= \gamma^{-1}\gamma_*^2 F_z
\end{aligned}
$$

これらの右辺はローレンツ力の変換

$$
F'_x = \gamma_*^2(F_x - \frac{V}{c^2}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v})\ ,\ F'_y = \gamma^{-1}\gamma_*^2 F_y\ ,\ F'_z = \gamma^{-1}\gamma_*^2 F_z
$$

と同じなので、O と O' で (10) の形になっているなら、ローレンツ力の変換が成立するのが分かります。
　というわけで、ローレンツ力による運動方程式は

$$
m\frac{d}{dt}(\gamma_v\boldsymbol{v}) = Q(\boldsymbol{E} + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \quad \big(\gamma_v = (1 - \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{c^2})^{-1/2}\big)
$$

となります。