動く点電荷による電磁場

遅延ポテンシャルの話として、リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルとその電場、磁場を求めます。
ひたすら計算しているだけです。

真空のマクスウェル方程式は電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$、磁場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$、電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$、電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ によって

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=4\pi\alpha\rho(\boldsymbol{r},t)$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\frac{\beta_m\beta_b}{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=4\pi\beta_m\beta_b\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$$

スカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ は

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\ ,\ \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

ローレンツゲージ

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\quad(\beta=\beta_m\beta_b)$$

を使うことで、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルによるマクスウェル方程式は (「マクスウェル方程式」参照)

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-4\pi\alpha\rho(\boldsymbol{r},t)\tag{1a}$$
$$\nabla^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=-4\pi\beta\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\quad(\frac{\beta_m}{\alpha}=\frac{1}{c^2})\tag{1b}$$

c は光速です。これらの解は「ヘルツダイポールアンテナ」で求めていて、グリーン関数 G によって

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=-4\pi\alpha\int d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\ G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\rho(\boldsymbol{r}',t')$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=-4\pi\beta\int d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\ G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t')$$

$d\tau'$ は $\boldsymbol{r}'$ の 3 次元空間積分です。G は遅延グリーン関数 $G^{(-)}$ と先進グリーン関数 $G^{(+)}$ とすれば

$$G^{(\pm)}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(t-t'\pm\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})$$

ここでは因果律 (原因の後に結果が出る) を満たす遅延グリーン関数を使うことにして

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\alpha\int d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t')}{|\boldsymbol{R}|}\delta(t'-t+\frac{|\boldsymbol{R}|}{c})=\alpha\int d\tau'\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{R}|}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\beta\int d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t')}{|\boldsymbol{R}|}\delta(t'-t+\frac{|\boldsymbol{R}|}{c})=\beta\int d\tau'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{R}|}$$

これらは遅延ポテンシャル (retarded potential) と呼ばれます。$\boldsymbol{R}$ と t_r は

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\ ,\ t_r=t-\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}$$

としていて、t_r は遅延時間 (retarded time) と呼ばれます。t_r が $\boldsymbol{r}$ の依存性を持つことに注意してください。

後で必要な計算も出てくるので、解になっていることを確かめます。$\nabla\phi$ は

$$\nabla\phi(\boldsymbol{r},t)=\alpha\int d\tau'\nabla\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{R}|}=\alpha\int d\tau'(\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\nabla\rho+\rho\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{R}|})$$

ρ の微分は

$$\nabla\rho(\boldsymbol{r}',t_r(\boldsymbol{r}))=\frac{\partial\rho}{\partial t_r}\nabla t_r=-\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t_r}\nabla|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=-\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t)}{\partial t}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\qquad(\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial t_r}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t_r}=\frac{\partial}{\partial t_r})$$

最後に t,t_r の微分が同じなので $\rho(\boldsymbol{r}',t)$ としています。$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ の微分は $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ から

$$\begin{aligned}\nabla|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|&=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\\&=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}(x-x',y-y',z-z')\\&=\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\end{aligned}\tag{2}$$

同様に

$$\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{-1/2}=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\tag{3}$$

なので

$$\nabla\phi(\boldsymbol{r},t)=\alpha\int d\tau'(-\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}-\rho\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3})\tag{4}$$

$\nabla^2\phi$ は

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)=\alpha\int d\tau'(-\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\cdot\nabla\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\cdot\nabla\rho-\rho\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3})$$

第１項は

$$\nabla\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\nabla\rho=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\frac{1}{c}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

第２項は

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2+z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\\&=\frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2+z^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\&=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\\&=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2}\end{aligned}$$

から

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}$$

第４項は「静電場」で求めたように

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}=-\nabla\cdot\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=-\nabla^2\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=4\pi\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$

よって

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)&=\alpha\int d\tau'(\frac{1}{c^2}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-\frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^4}\frac{\partial\rho}{\partial t}-4\pi\rho\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'))\\&=\alpha\int d\tau'(\frac{1}{c^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-4\pi\rho(\boldsymbol{r}',t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'))\\&=\frac{\alpha}{c^2}\int d\tau'\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-4\pi\alpha\rho(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}$$

ϕ の時間微分は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\boldsymbol{r},t)=\alpha\int d\tau'\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}$$

なので

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}-4\pi\alpha\rho(\boldsymbol{r},t)$$

となり、(1a) になります ((1b) でも同様)。先進グリーン関数を使った場合も同じです。
　遅延ポテンシャルでの電場、磁場を求めます。電場には $\nabla\phi$ と $\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ が必要になります。$\boldsymbol{A}$ の時間微分は

$$\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\beta\int d\tau'\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}$$

これと (4) から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{\beta_b}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}&=\int d\tau'(\alpha\rho\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}+\frac{\alpha}{c}\frac{d\rho}{dt}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}-\beta_m\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt})\\&=\alpha\int d\tau'(\rho(\boldsymbol{r}',t_r)\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}+\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t}\frac{1}{|\boldsymbol{R}|})\end{aligned}$$

磁場は、(3) を使って

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}=\beta\int d\tau'\nabla\times\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{R}|}&=\beta\int d\tau'(\nabla\frac{1}{|\boldsymbol{R}|})\times\boldsymbol{j}+\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}\nabla\times\boldsymbol{j})\\&=\beta\int d\tau'(-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\times\boldsymbol{j}+\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\nabla\times\boldsymbol{j})\end{aligned}$$

$\boldsymbol{j}$ の回転は、例えば x 成分は (2) を使って

$$\begin{aligned}\frac{\partial j_z(\boldsymbol{r},t_r(\boldsymbol{r}))}{\partial y}-\frac{\partial j_y(\boldsymbol{r},t_r(\boldsymbol{r}))}{\partial z}=\frac{\partial j_z}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y}-\frac{\partial j_y}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial z}&=-\frac{1}{c}(\frac{\partial j_z}{\partial t_r}\frac{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\partial y}-\frac{\partial j_y}{\partial t_r}\frac{\partial|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{\partial z})\\&=\frac{1}{c}(\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t_r}\times\nabla|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)_x\\&=\frac{1}{c}(\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t_r}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|})_x\end{aligned}$$

他の成分も同様なので、磁場は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\beta\int d\tau'(-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\times\boldsymbol{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t_r}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2})=\beta\int d\tau'(\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{|\boldsymbol{R}|^2}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r}\frac{1}{|\boldsymbol{R}|})\times\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$$

と求まります。この電場、磁場は発生源が時間依存性しているときのクーロンの法則、ビオ・サバールの法則と言えます。また、この電場、磁場はジェフィメンコ (Jefimenko) 方程式とも呼ばれます。
　実際に、$\rho,\boldsymbol{j}$ が時間依存していないなら

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\alpha\int d\tau'\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{R}|^2}\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}$$

となり、クーロンの法則になります。磁場は、$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ を t_r で展開し

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t_r)+\frac{\partial \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}|_{t=t_r}(t-t_r)+\cdots=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t_r)+\frac{\partial \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}|_{t=t_r}\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}+\cdots \qquad (t_r=t-\frac{|\boldsymbol{R}|}{c})$$

これの１次までで

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\beta\int d\tau'(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_{\boldsymbol{r}})+\frac{\partial \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t_r)}{\partial t_r}\frac{|\boldsymbol{R}|}{c})\times\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}\simeq\beta\int d\tau'\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)\times\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}$$

となり、ビオ・サバールの法則になります。

ここから電荷密度、電流密度を動いている点電荷とします。点電荷なので、電荷密度はデルタ関数を使って

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=Q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t))$$

と与えます。点電荷は動いているので、点電荷の位置を $\boldsymbol{r}_c(t)$ としています。電流密度は点電荷の速度 $\boldsymbol{v}(t)$ をくっつけて

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=Q\boldsymbol{v}(t)\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t))$$

これらによって

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\alpha Q\int d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta^3(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_c(t'))\delta(t'-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\beta Q\int d\tau'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{\boldsymbol{v}(t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta^3(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_c(t'))\delta(t'-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c})$$

どちらも同じなので ϕ で行います。

３次元空間積分を実行して

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\alpha Q\int_{-\infty}^{\infty}dt'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}\delta(t'-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}{c})$$

具体的に与えられていない $\boldsymbol{r}_c(t')$ がデルタ関数の中にいるために t' 積分ができないので、t' を

$$t''=t'-t+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}{c}$$
$$dt''=dt'+\frac{1}{c}dt'\frac{d}{dt'}\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}{c}=dt'(1+\frac{1}{c}\frac{d}{dt'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|)$$

と変換します。t は外部から与えられる時間なので t' 微分で消えます。微分部分は

$$\frac{d}{dt'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|=\frac{d\boldsymbol{r}_c(t')}{dt'}\cdot\nabla_c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|=-\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt'}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}=-\frac{\boldsymbol{v}(t')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}$$

∇_c は $\boldsymbol{r}_c$ での微分で、$\boldsymbol{r}_c$ は点電荷の位置なので時間微分は速度 $\boldsymbol{v}$ です。よって

$$dt'' = dt'(1 - \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{v}(t')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}) = \frac{1}{c}dt'(\frac{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')| - \boldsymbol{v}(t')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t'))}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|})$$

これを使うと

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r},t) &= \alpha Q\int_{-\infty}^{\infty} dt'' \frac{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')| - \boldsymbol{v}(t')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t'))}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}\delta(t'') \\ &= c\alpha Q\int_{-\infty}^{\infty} dt'' \frac{1}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')| - \boldsymbol{v}(t')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t'))}\delta(t'') \\ &= \frac{c\alpha Q}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')| - \boldsymbol{v}(t')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t'))} \qquad (t''=0\ ,\ t = t' + \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|}{c})\end{aligned}$$

ベクトルポテンシャでは速度が出てきますが、積分は同様にできるので

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{c\beta Q\boldsymbol{v}(t')}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')| - \boldsymbol{v}(t')\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t'))} = \frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{v}\phi(\boldsymbol{r},t)$$

この $\phi, \boldsymbol{A}$ をリエナール・ヴィーヘルト (Liénard-Wiechert) ポテンシャルと言います。

リエナール・ヴィーヘルトポテンシャルでの電場と磁場を求めます。ひたすら計算するだけです。混乱はしないと思うので $\boldsymbol{R}(t') = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_c(t')$ とします。t' が $\boldsymbol{r}$ に依存していることに注意して計算していきます。$\nabla\phi$ は

$$\nabla\phi = c\alpha Q\nabla\frac{1}{c|\boldsymbol{R}(t')| - \boldsymbol{v}(t')\cdot\boldsymbol{R}(t')} = \frac{-c\alpha Q}{(c|\boldsymbol{R}(t')| - \boldsymbol{v}(t')\cdot\boldsymbol{R}(t'))^2}\nabla(c|\boldsymbol{R}(t')| - \boldsymbol{v}(t')\cdot\boldsymbol{R}(t'))$$

$|\boldsymbol{R}(t')|$ は

$$\begin{aligned}t' &= t - \frac{|\boldsymbol{R}(t')|}{c} \\ |\boldsymbol{R}(t')| &= c(t-t')\end{aligned}$$

なので

$$c\nabla|\boldsymbol{R}(t')| = -c^2\nabla t'(\boldsymbol{r}) \tag{5}$$

$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}$ の微分は

$$\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{R}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{R}) \tag{6}$$

第 1 項は

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{R}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}(t') = (R_x\frac{\partial}{\partial x}+R_y\frac{\partial}{\partial y}+R_z\frac{\partial}{\partial z})\boldsymbol{v}(t') &= (R_x\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{d}{dt'}+R_y\frac{\partial t'}{\partial y}\frac{d}{dt'}+R_z\frac{\partial t'}{\partial z}\frac{d}{dt'})\boldsymbol{v}(t') \\
&= (\boldsymbol{R}\cdot\nabla t')\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}
\end{aligned}
$$

第 2 項は

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}(t')\cdot\nabla)\boldsymbol{R}(t') &= (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')) \\
&= (v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z})\boldsymbol{r}-(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z})\boldsymbol{r}_c(t') \\
&= (v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z})(x,y,z)-(v_x\frac{\partial t_r}{\partial x}\frac{d}{dt_r}+v_y\frac{\partial t_r}{\partial x}\frac{d}{dt_r}+v_z\frac{\partial t_r}{\partial x}\frac{d}{dt_r})\boldsymbol{r}_c(t') \\
&= \boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla t')\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

第 3 項は

$$
\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{v}(t'))_x &= (\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}) = (\frac{\partial t'}{\partial y}\frac{dv_z}{dt'}-\frac{\partial t'}{\partial z}\frac{dv_y}{dt'}) = (\nabla t')_y\frac{dv_z}{dt'}-(\nabla t')_z\frac{dv_y}{dt'} \\
(\nabla\times\boldsymbol{v}(t'))_y &= (\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}) = (\frac{\partial t'}{\partial z}\frac{dv_x}{dt'}-\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{dv_z}{dt'}) = (\nabla t')_z\frac{dv_x}{dt'}-(\nabla t')_x\frac{dv_z}{dt'} \\
(\nabla\times\boldsymbol{v}(t'))_z &= (\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}) = (\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{dv_y}{dt'}-\frac{\partial t'}{\partial y}\frac{dv_x}{dt'}) = (\nabla t')_x\frac{dv_y}{dt'}-(\nabla t')_y\frac{dv_x}{dt'}
\end{aligned}
$$

なので、まとめれば

$$
\nabla\times\boldsymbol{v}(t') = \nabla t'\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}
$$

第 4 項は、$\nabla\times\boldsymbol{v}(t')$ と同じように

$$
\nabla\times\boldsymbol{R} = \nabla\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c) = -\nabla\times\boldsymbol{r}_c(t') = -\nabla t'\times\boldsymbol{v}(t') \tag{7}
$$

これらと

$$
\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{8}
$$

から、(6) は

$$
\begin{aligned}
\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) &= (\boldsymbol{R}\cdot\nabla t')\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}+\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla t')\boldsymbol{v}+\boldsymbol{R}\times(\nabla t'\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})-\boldsymbol{v}\times(\nabla t'\times\boldsymbol{v}) \\
&= (\boldsymbol{R}\cdot\nabla t')\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}+\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla t')\boldsymbol{v}+\nabla t'(\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})-\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}(\boldsymbol{R}\cdot\nabla t')-\nabla t'(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla t') \\
&= \boldsymbol{v}+(\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}-\boldsymbol{v}^2)\nabla t' \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$\nabla t'$ は $t'=t-|\boldsymbol{R}(t')|/c$ なので

$$
\begin{aligned}
\nabla t' = -\frac{1}{c}\nabla|\boldsymbol{R}| = -\frac{1}{c}\nabla\sqrt{\boldsymbol{R}^2} &= -\frac{1}{c}\frac{1}{2|\boldsymbol{R}|}\nabla\boldsymbol{R}^2 \\
&= -\frac{1}{c}\frac{1}{2|\boldsymbol{R}|}\nabla(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}) \\
&= -\frac{1}{c}\frac{1}{2|\boldsymbol{R}|}((\boldsymbol{R}\cdot\nabla)\boldsymbol{R}+(\boldsymbol{R}\cdot\nabla)\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\times(\nabla\times\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R}\times(\nabla\times\boldsymbol{R})) \\
&= -\frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}((\boldsymbol{R}\cdot\nabla)\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\times(\nabla\times\boldsymbol{R}))
\end{aligned}
$$

$(\boldsymbol{R}\cdot\nabla)\boldsymbol{R}$ は

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{R}\cdot\nabla)\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{R}\cdot\nabla)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c) &= (R_x\frac{\partial}{\partial x}+R_y\frac{\partial}{\partial y}+R_z\frac{\partial}{\partial z})\boldsymbol{r}-(R_x\frac{\partial}{\partial x}+R_y\frac{\partial}{\partial y}+R_z\frac{\partial}{\partial z})\boldsymbol{r}_c(t') \\
&= \boldsymbol{R}-(\boldsymbol{R}\cdot\nabla t')\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

$\nabla\times\boldsymbol{R}$ は (7) なので、(8) を使って

$$
\begin{aligned}
\nabla t' &= -\frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}(\boldsymbol{R}-(\boldsymbol{R}\cdot\nabla t')\boldsymbol{v}-\boldsymbol{R}\times(\nabla t'\times\boldsymbol{v})) \\
&= -\frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}(\boldsymbol{R}-(\boldsymbol{R}\cdot\nabla t')\boldsymbol{v}-\nabla t'(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{R}\cdot\nabla t')) \\
&= -\frac{1}{c}\frac{1}{|\boldsymbol{R}|}(\boldsymbol{R}-(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v})\nabla t') \\
\nabla t'-\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{R}|}\nabla t' &= -\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} \\
\nabla t' &= -\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}(c-\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{R}|})^{-1} \\
&= -\frac{\boldsymbol{R}}{c|\boldsymbol{R}|-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

よって、$\nabla\phi$ は (5),(9),(10) から

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi &= \frac{-c\alpha Q}{(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}(c\nabla|\boldsymbol{R}| - \nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})) \\
&= \frac{-c\alpha Q}{(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}(-c^2\nabla t' - \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'} - \boldsymbol{v}^2)\nabla t') \\
&= \frac{-c\alpha Q}{(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}\frac{1}{c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}(c^2\boldsymbol{R} - (c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt_r} - \boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{R}) \\
&= \frac{-c\alpha Q}{(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^3}(-(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v} + (c^2 + \boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt_r} - \boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{R}) \\
&= \frac{c\alpha Q}{(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^3}((c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v} - (c^2 + \boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt_r} - \boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{R}) \\
&= \frac{c\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}((\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v} - (c^2 + \boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt_r} - \boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{R}) \qquad (\boldsymbol{u} = c\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} - \boldsymbol{v})
\end{aligned} \tag{11}
$$

となります。

$\boldsymbol{A}$ の時間微分は

$$
\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\beta}{\alpha}(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\phi + \boldsymbol{v}\frac{\partial\phi}{\partial t})
$$

なので、t' の t 微分が必要になります。これは

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{R}| = c\frac{\partial}{\partial t}(t - t') = c(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}) \\
&\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{R}| = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\boldsymbol{R}^2} = \frac{1}{2|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{R}^2 = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_c(t')) = -\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial t'}{\partial t}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{\partial t'}{\partial t} &= -\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial t'}{\partial t} \\
1 &= (1 - \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|})\frac{\partial t'}{\partial t} \\
\frac{\partial t'}{\partial t} &= (1 - \frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|})^{-1} \\
&= \frac{c|\boldsymbol{R}|}{c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}
\end{aligned}
$$

となります。使う微分をまとめると

$$\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{R}| = -\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} = -\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{r}_c}{\partial t'} = -\frac{\partial t'}{\partial t}\boldsymbol{v}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{c|\boldsymbol{R}|}{c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}} = \frac{c|\boldsymbol{R}|}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}}$$

これらを使って

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}} &= -\frac{1}{(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^2}\frac{\partial}{\partial t}(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) \\
&= -\frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}(c\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{R}| - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})) \\
&= -\frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}(-c\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})) \\
&= -\frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}(-c\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{R} - \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}) \\
&= -\frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}(-c\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}\frac{\partial t'}{\partial t} - \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial t_r}{\partial t}) \\
&= -\frac{1}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}\frac{\partial t'}{\partial t}(-c\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R} + \boldsymbol{v}^2) \\
&= -\frac{c|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}(-c\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R} + \boldsymbol{v}^2)
\end{aligned}$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\phi + \boldsymbol{v}\frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&= c\alpha Q(\frac{c|\boldsymbol{R}|}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\frac{1}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}-v}\frac{c|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}(-c\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R}+\boldsymbol{v}^2)) \\
&= \frac{c^2\alpha Q|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} + \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}}(c\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R}-\boldsymbol{v}^2)) \\
&= \frac{c^2\alpha Q|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{v}(c\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R}-\boldsymbol{v}^2)) \\
&= \frac{c^3\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}(\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}(c|\boldsymbol{R}|-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R} + \frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R} - \frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\boldsymbol{v}^2)) \\
&= \frac{c^3\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}(\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}(c|\boldsymbol{R}|-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{v}(c|\boldsymbol{R}| - c|\boldsymbol{R}| + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R} + \frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t_r}\cdot\boldsymbol{R} - \frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\boldsymbol{v}^2)) \\
&= \frac{c^3\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}((\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} - \boldsymbol{v})(c|\boldsymbol{R}|-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{v}(c|\boldsymbol{R}| + \frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t_r}\cdot\boldsymbol{R} - \frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\boldsymbol{v}^2)) \\
&= \frac{c^3\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}((\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{v}\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}(c^2 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R} - \boldsymbol{v}^2))
\end{aligned}
$$

となり

$$
\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{c^3\beta}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}((\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t_r} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{v}\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}(c^2 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t_r}\cdot\boldsymbol{R} - \boldsymbol{v}^2)) \tag{12}
$$

(11),(12) から電場は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) =& -\nabla\phi - \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\
=& -\frac{c\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}((\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v} - (c^2 + \boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt_r} - \boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{R}) \\
& -\frac{c^3\beta_m Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}((\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t_r} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{v}\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}(c^2 + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R} - \boldsymbol{v}^2)) \\
=& -\frac{c\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{R}(c^2 + \boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'} - \boldsymbol{v}^2)) \\
& +(\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'} - \boldsymbol{v})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}) + \boldsymbol{v}\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}(c^2 + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'}\cdot\boldsymbol{R} - \boldsymbol{v}^2)] \\
=& -\frac{c\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}[\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}) + (\boldsymbol{v}\frac{|\boldsymbol{R}|}{c} - \boldsymbol{R})(c^2 + \boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'} - \boldsymbol{v}^2)] \\
=& -\frac{c\alpha Q}{(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R})^3}\frac{|\boldsymbol{R}|}{c}[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'}(c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}) + (\boldsymbol{v} - c\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|})(c^2 + \boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'} - \boldsymbol{v}^2)] \\
=& -\frac{\alpha Q|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'}\boldsymbol{R}\cdot(c\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} - \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - c\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|})\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'} + (\boldsymbol{v} - c\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|})(c^2 - \boldsymbol{v}^2)] \\
=& -\frac{\alpha Q|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}) - \boldsymbol{u}(c^2 - \boldsymbol{v}^2)] \\
=& -\frac{\alpha Q|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}(-\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{u}\times\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'} - \boldsymbol{u}(c^2 - \boldsymbol{v}^2)) \\
=& \frac{\alpha Q|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}(\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{u}\times\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'}) + c^2\boldsymbol{u}(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2})) \quad (t = t' + \frac{|\boldsymbol{R}(t')|}{c})
\end{aligned} \tag{13}
$$

となります。$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}$ を

$$
\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R} = c|\boldsymbol{R}| - \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v} = c|\boldsymbol{R}|(1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{R}}{c|\boldsymbol{R}|}) = c|\boldsymbol{R}|K
$$

とすれば

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\alpha Q}{c^3K^3}\frac{1}{|\boldsymbol{R}|^2}(\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{u}\times\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t'}) + c^2\boldsymbol{u}(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}))
$$

第 1 項は加速度 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t'$ を含み $1/|\boldsymbol{R}|$ に比例し、第 2 項は速度を含み $1/|\boldsymbol{R}|^2$ に比例しているのが分かります。また、第 2 項は $|\boldsymbol{v}| \ll c$ なら

$$
\frac{c^2\alpha Q|\boldsymbol{R}|}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}\boldsymbol{u}(1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}) \ \Rightarrow\ \frac{\alpha Q|\boldsymbol{R}|}{|\boldsymbol{R}|^3}\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|} = \alpha Q\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}
$$

となり、点電荷による電場になります。

磁場はベクトルポテンシャルの回転で

$$
\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\beta}{\alpha}\nabla\times(\boldsymbol{v}\phi) = \frac{\beta}{\alpha}(\phi(\nabla\times\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\times\nabla\phi)
$$

第 1 項は

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\nabla t'\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}\ ,\ \nabla t'=-\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}}$$

から

$$\phi(\nabla\times\boldsymbol{v})=\frac{c\alpha Q}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R}}(\nabla t'\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})=-\frac{c\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}(\boldsymbol{R}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})$$

第 2 項は

$$\boldsymbol{v}\times\nabla\phi=\frac{c\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}\boldsymbol{v}\times((\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v}-(c^2+\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}-\boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{R})$$

よって、磁場は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}&=\frac{\beta}{\alpha}(\phi(\nabla\times\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\times\nabla\phi)\\
&=-\frac{\beta}{\alpha}\frac{c\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^2}(\boldsymbol{R}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})-\frac{c\alpha Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}\boldsymbol{v}\times((\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v}-(c^2+\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}-\boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{R})\\
&=-\frac{c\beta Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})(\boldsymbol{R}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})+\boldsymbol{v}\times((\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})\boldsymbol{v}-(c^2+\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}-\boldsymbol{v}^2)\boldsymbol{R})]\\
&=-\frac{c\beta Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})(\boldsymbol{R}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})-(c^2-\boldsymbol{v}^2)(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{R})-(\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{R})]\\
&=-\frac{c\beta Q}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})^3}\boldsymbol{R}\times(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt'})+\boldsymbol{v}(c^2-\boldsymbol{v}^2))
\end{aligned}$$

磁場でも加速度の項と速度の項に別れて出てきて、加速度の項は $1/|\boldsymbol{R}|$、速度の項は $1/|\boldsymbol{R}|^2$ に比例します。また、電場 (13) に対して $\boldsymbol{R}$ のベクトル積を取ると

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}\times(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t_r}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{R})-(c\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}-\boldsymbol{v})(c^2-\boldsymbol{v}^2)-(c\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}-\boldsymbol{v})(\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt_r}))\\
&=\boldsymbol{R}\times(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t_r}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u})+\boldsymbol{v}(c^2-\boldsymbol{v}^2)+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{R}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt_r}))
\end{aligned}$$

となり、一致するので

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{c\beta}{\alpha}\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{R}|}=\frac{\beta_b}{c}\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{E}}{|\boldsymbol{R}|}$$

と書けます。

・補足

時間順序の関係が分かりやいので、電荷のない場合を見ます。ϕ が角度依存性を持っていないとしてます。そうすると、極座標 (r,θ,φ) において r 微分だけになり

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})$$

から

$$\nabla^2\phi(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(r,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})\phi(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(r,t)}{\partial t^2} \quad (\frac{1}{c^2} = \frac{\beta_m}{\alpha})$$

(1a) は

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})\phi(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(r,t)}{\partial t^2} = 0$$

r をかけると

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r})\phi(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 r\phi(r,t)}{\partial t^2} &= \frac{1}{r}(2r\frac{\partial}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2})\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi)\\ &= (2\frac{\partial}{\partial r} + r\frac{\partial^2}{\partial r^2})\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi)\\ &= (\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})r\phi\end{aligned}$$

となり、$r\phi(r,t)$ に対する波動方程式になります。波動方程式なので、f_1, f_2 を適当な関数としてダランベールの解が使えて

$$r\phi(r,t) = f_1(r-ct) + f_2(r+ct) = f_1(t-\frac{r}{c}) + f_2(t+\frac{r}{c})$$

$t=0$ で原点 $r=0$ から伝わっていく波とすれば、r にたどり着く時間 t_0 は $f_1(0) = f_1(r-ct_0)$ から $t_0 = r/c$ です。なので、第 1 項は速度 c で原点 (発生源) から動径方向に広がっていく波です。一方で、第 2 項では $f_2(0) = f_2(r+ct_0)$ から $t_0 = -r/c$ となり、波が原点から発生する時間 $t=0$ の前の時間で r において波の影響が現れます。これは先に原因がありその後に結果という因果律に反します。これがそのまま遅延、先進グリーン関数の関係となります。