ミンコフスキー空間

時間と 3 次元空間を一緒にしたミンコフスキー空間を見ていき、マクスウェル方程式を書き換えます。
ミンコフスキー空間については簡単な導入部分だけで、数学の話は無視していきます。
3 次元ベクトルと 4 次元ベクトルの両方で太字を使っていて区別をつけていないので、注意してください。また、3 次元成分では (x, y, z) と (x_1, x_2, x_3) の両方を使っているので、混同しないようにしてください。

ここでは x_ix_i や $x_\mu x_\mu$ のように同じ文字の添え字による項は

$$x_ix_i = \sum_{i=1}^{3} x_ix_i \ , \ x_\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x_\mu \ , \ x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu$$

の意味とします。範囲はローマ文字では 1 から 3(途中で 1 から D にしている箇所がある)、ギリシャ文字では 0 から 3 とします。簡単に言えば、同じ項に同じ添え字があったら和を取るというだけです。

まず、ローレンツ変換から見ていきます。c を光速として、慣性系 O の時間と座標の組 (ct, x, y, z) と x 軸方向に一定速度 V で動いている慣性系 O' の時間と座標の組 (ct', x', y', z') によるローレンツ変換は

$$\begin{aligned}
ct' &= \gamma(-\frac{V}{c}x + ct) \\
x' &= \gamma(x - \frac{V}{c}ct) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned} \tag{1}$$

逆変換は V の符号が変わり

$$\begin{aligned}
ct &= \gamma(\frac{V}{c}x' + ct') \\
x &= \gamma(x' + \frac{V}{c}ct') \\
y &= y' \\
z &= z'
\end{aligned}$$

γ は

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - V^2/c^2}}$$

変化分の関係は

$$
\begin{aligned}
dt' &= \frac{\partial t'}{\partial t}dt + \frac{\partial t'}{\partial x}dx + \frac{\partial t'}{\partial y}dy + \frac{\partial t'}{\partial z}dz = \gamma dt - \frac{V}{c^2}\gamma dx \\
dx' &= \frac{\partial x'}{\partial t}dt + \frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy + \frac{\partial x'}{\partial z}dz = -\gamma V dt + \gamma dx \\
dy' &= dy \\
dz' &= dz
\end{aligned}
$$

そして、3 次元ユークリッド空間において光が dt, dt' の間に進む距離は

$$
(cdt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \ , \ (cdt')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2
$$

これらはローレンツ変換に対して

$$
\begin{aligned}
(cdt')^2 &= c^2\gamma^2(dt - \frac{V}{c^2}dx)^2 = \gamma^2((cdt)^2 + \frac{V^2}{c^2}(dx)^2 - 2Vdtdx) \\
(dx')^2 &= \gamma^2(-Vdt + dx)^2 = \gamma^2(V^2(dt)^2 + (dx)^2 - 2Vdtdx)
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
(cdt')^2 - (dx')^2 &= \gamma^2((cdt)^2 + \frac{V^2}{c^2}(dx)^2 - V^2(dt)^2 - (dx)^2) \\
&= \gamma^2(c^2(1 - \frac{V^2}{c^2})(dt)^2 - (1 - \frac{V^2}{c^2})(dx)^2) \\
&= (cdt)^2 - (dx)^2
\end{aligned}
$$

となっていて、$(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$ はローレンツ変換で不変な量です。座標の微小な差

$$
\Delta t = t - t_0 \ , \ \Delta x = x - x_0 \ , \ \Delta y = y - y_0 \ , \ \Delta z = z - z_0
$$

としても同じように、$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ は不変な量です（ローレンツ変換は 1 次の変換だから）。
また、微分演算子の変換は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{c}(\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\gamma}{c}(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}) &= \gamma(\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{V}{c}\frac{\partial}{\partial x}) \ \Leftrightarrow \ ct = \gamma(ct' + \frac{V}{c}x') \\
\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} &= \gamma(\frac{V}{c}\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}) \ \Leftrightarrow \ x = \gamma(\frac{V}{c}ct' + x')
\end{aligned} \tag{2}
$$

となっていて、逆変換の形に対応しています。これは後で触れます。
　そして、微小としなくても

$$c^2t'^2 = c^2\gamma^2(-\frac{V}{c^2}x + t)^2 = \gamma^2(\frac{V^2}{c^2}x^2 + c^2t^2 - 2Vxt)$$
$$x'^2 = \gamma^2(x - Vt)^2 = \gamma^2(x^2 + V^2t^2 - 2Vxt)$$

なので

$$c^2t'^2 - x'^2 = \gamma^2((1 - \frac{V^2}{c^2})c^2t^2 - (1 - \frac{V^2}{c^2})x^2) = c^2t^2 - x^2 \tag{3}$$

となっています。

見てきた性質から、使用する空間を 3 次元ユークリッド空間から変更します。先にユークリッド空間から見ていきます。3 次元ユークリッド空間は、大雑把には 3 個の実数の組によって空間上の点を指定でき、内積が定義されているベクトル空間です。3 次元ユークリッド空間の直交基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とし、$|\boldsymbol{e}_i| = 1$ としたとき $(i = 1, 2, 3)$、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積はそれらの成分 x_i, y_i によって

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

と与えられます。そして、ベクトルのノルム (長さ) は

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

となります。また、これを点の間の距離としてユークリッド空間は定義されます。

内積を基底を使って書くと

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_i\boldsymbol{e}_i) \cdot (y_j\boldsymbol{e}_j) = x_iy_j\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = x_iy_j\delta_{ij} \quad (\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i\boldsymbol{e}_i \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i)$$

クロネッカーデルタ δ_{ij} は基底ベクトルの内積で

$$\delta_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$$

と与えられています。このように、基底の内積による行列を計量 (metric) と呼び、今の δ_{ij} はユークリッド計量と呼ばれます。

内積は基底の変換行列を R とし、それを $\boldsymbol{e}'_i = R_{ij}\boldsymbol{e}_j$ とすれば (力学の「運動方程式の座標変換」参照)

$$\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}' = x'_iy'_k\boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}'_k = x'_iy'_k(R_{ij}\boldsymbol{e}_j) \cdot (R_{kl}\boldsymbol{e}_l) = x'_iR_{ij}y'_kR_{kl}\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l = x_jy_l\delta_{jl} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

このときの R は直交行列 (転置したものが逆行列) です。そして、3 次元回転行列は直交行列なので、内積は 3 次元回転で不変です。

内積はユークリッド計量で与えられ、内積は 3 次元回転で不変という部分を変更します。ユークリッド計量による内積は 3 次元空間成分で構成されていますが、これに時間成分をくっつけて内積を (3) の形で与えます。そうすると、回転不変はローレンツ不変に置き換わります。この空間をミンコフスキー空間 (Minkowski space) と呼び、

時間はパラメータではなく座標の 1 つになります。時間と空間を座標とするために時空 (spacetime) を使って、ミンコフスキー時空と呼ぶことが多いですが、ここではミンコフスキー空間と言っていきます。

　ミンコフスキー空間は 3 次元空間に時間を加えるので 4 次元です。そのベクトル成分が $x_0 = ct$ として (x_0, x_1, x_2, x_3) と与えたとき、内積を (3) から

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 = g_{\mu\nu}x_\mu y_\nu \quad (\sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}x_\mu y_\nu \ \Rightarrow\ g_{\mu\nu}x_\mu y_\nu)$$

と定義し、ローレンツ変換で不変になるようにします。ギリシャ文字の添え字の範囲は 0 から 3 とします。ミンコフスキー空間での内積も $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ と書いているので混乱しないようにしてください。このときの計量 $g_{\mu\nu}$ は $(+1, -1, -1, -1)$ を対角成分に持つ 4×4 対角行列で、ミンコフスキー計量と呼ばれます。簡単に言ってしまえば、ミンコフスキー計量を持つ空間がミンコフスキー空間です。内積を細かく書けば

$$g_{\mu\nu}x_\mu y_\nu = g_{00}x_0y_0 + g_{01}x_0y_1 + \cdots + g_{10}x_1y_0 + g_{11}x_1y_1 + \cdots + g_{33}x_3y_3$$

となっていて、$g_{\mu\nu}$ は $\mu = \nu$ のとき以外は 0 なので

$$g_{\mu\nu}x_\mu y_\nu = g_{00}x_0y_0 + g_{11}x_1y_1 + g_{22}x_2y_2 + g_{33}x_3y_3 = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$$

となります。

　また、ミンコフスキー計量を $(-1, +1, +1, +1)$ に取っても符号が反転するだけで、理論としては変更されません。このため、ミンコフスキー計量と言ったとき 2 つの場合があるので注意が必要です。ここでは $(+1, -1, -1, -1)$ です。

　計量を基底の内積から与えるのは変わらないので、ミンコフスキー空間の 4 つの基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ として

$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$$

実際に、a, b をスカラーとして

$$(a\boldsymbol{x})\cdot(b\boldsymbol{y}) = ab(x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3) = ab(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$$

から

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = x_\mu\boldsymbol{e}_\mu \cdot y_\nu\boldsymbol{e}_\nu = x_\mu y_\nu \boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu = g_{\mu\nu}x_\mu y_\nu$$

となります。基底の内積は計量の値から

$$\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}_0 = 1\ ,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 = -1$$

他は 0 です。内積が $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0$ となるときを直交とするのは同じなので、今の基底は直交基底です。

　ミンコフスキー計量では正と負の和の形のために、同じベクトル同士の内積でも正だけでなく、0 $(\boldsymbol{x} \neq 0)$ と負にもなれます。これらによってベクトルは分類され、$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} > 0$ では時間的 (time-like)、$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} < 0$ では空間的

(space-like)、$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=0$ では光的 (light-like) やヌル (null) と呼ばれます。例えば、$\boldsymbol{e}_0$ は時間的、$\boldsymbol{e}_i$ は空間的なベクトルです。時間的では光が進む距離より短いので光速より遅く、空間的では長くなっているので光速より早く、その境界が光的です。ただし、計量を $(-1,+1,+1,+1)$ に取ると、時間的は $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}<0$、空間的は $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}>0$ となります。また、光的のときに注意すべきこととして、ノルムの定義である三角不等式

$$\sqrt{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})}\leq\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}+\sqrt{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}}$$

が成立していないことです。$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ が光的なら右辺は 0 ですが、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ も光的になるとは限らないからです。

ベクトルの位置関係を図に書こうとするとどうなるか簡単に見ておきます。4 次元空間は視覚的に書けないので、縦軸を $\boldsymbol{e}_0$ 方向に取り、それに直交する面が $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ で構成されていると疑似的に考えます。まずはもっと簡略化して、$\boldsymbol{e}_0$ を縦軸 , $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ のどれかを横軸にした 2 次元平面とします。$\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1$ による 2 次元平面とすると、

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=(x_0\boldsymbol{e}_0+x_1\boldsymbol{e}_1)\cdot(x_0\boldsymbol{e}_0+x_1\boldsymbol{e}_1)=x_0^2-x_1^2$$

光的なベクトルでは 0 なので

$$x_0^2=x_1^2$$

となり、光的なベクトルは $\boldsymbol{e}_1$ 軸から 45 度もしくは 135 度の位置の直線として書けます。時間的なベクトルでは $\boldsymbol{e}_0$ の成分が $\boldsymbol{e}_1$ の成分より大きいので 45 度から 135 度の間と-45 度から-135 度の間、空間的なベクトルはその逆なので時間的以外の領域にいます。言い換えれば、時間的なベクトルは $\boldsymbol{e}_0$ と光的なベクトルの間、空間的なベクトルは $\boldsymbol{e}_1$ と光的なベクトルの間にいます。

4 次元にして、光的なベクトルを集めた部分を光円錐 (light cone) やヌル円錐 (null cone) と呼びます。4 次元での光的なベクトルは $x_0^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ なので、感覚的には 3 次元空間において $\boldsymbol{e}_0$ を縦軸に取り、横軸から 45 度の位置にある直線を一周させたものです。$\boldsymbol{e}_0$ は時間の方向と言えるので、$\boldsymbol{e}_0$ の正の方向を向いた光円錐を未来光円錐 (future light cone)、負の方向では過去光円錐 (past light cone) と言います。未来光円錐の内側は未来方向、過去光円錐の内側は過去方向と言えて、未来方向の時間的ベクトル (future directed time-like vector)、過去方向の時間的ベクトル (past directed time-like vector) と呼ばれたりします。

基底のローレンツ変換を求めます。ベクトル成分の変換は (1) で与えられていて、このような変換を受けるベクトルは 4 元ベクトルと呼ばれます。ローレンツ変換は 4 元ベクトル x_μ に対する 4×4 行列として

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\gamma&-\gamma V/c&0&0\\-\gamma V/c&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

と書けて、$x'_\mu=\Lambda_{\mu\nu}x_\nu$ となります。$x'_0=ct'$ です。逆行列は

$$\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma&\gamma V/c&0&0\\\gamma V/c&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

x'_μ での基底を $\boldsymbol{e}'_\mu$ とすれば

$$\boldsymbol{x} = x_\mu \boldsymbol{e}_\mu = x'_\mu \boldsymbol{e}'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} x_\nu \boldsymbol{e}'_\mu$$

なので、基底は

$$\boldsymbol{e}_\nu = \Lambda_{\mu\nu} \boldsymbol{e}'_\mu$$

として変換を受けます。逆変換 $(\Lambda^{-1})_{\mu\nu}$ を使えば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\nu (\Lambda^{-1})_{\nu\alpha} &= \boldsymbol{e}'_\mu \Lambda_{\mu\nu} (\Lambda^{-1})_{\nu\alpha} \\
&= \boldsymbol{e}'_\mu \delta_{\mu\alpha} \\
\boldsymbol{e}'_\alpha &= (\Lambda^{-1})_{\nu\alpha} \boldsymbol{e}_\nu
\end{aligned} \tag{4}$$

となります。

ついでに、計量の変換を求めます。ローレンツ変換は内積を変えないので

$$\boldsymbol{e}'_\mu \cdot \boldsymbol{e}'_\nu = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu = g_{\mu\nu}$$

そうすると、内積は

$$\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}' = (\Lambda_{\alpha\mu} x_\mu \boldsymbol{e}'_\alpha) \cdot (\Lambda_{\beta\nu} y_\nu \boldsymbol{e}'_\beta) = x_\mu y_\nu \Lambda_{\alpha\mu} \Lambda_{\beta\nu} g_{\alpha\beta}$$

$\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ なので $\Lambda_{\alpha\mu}\Lambda_{\beta\nu} g_{\alpha\beta} x_\mu y_\nu = g_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ となり、計量はローレンツ変換に対して

$$\Lambda_{\alpha\mu}\Lambda_{\beta\nu} g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}$$

行列の積の規則に合わせるなら、転置「T」によって

$$\Lambda_{\alpha\mu} = (\Lambda^T)_{\mu\alpha}$$

として

$$(\Lambda^T)_{\mu\alpha} g_{\alpha\beta} \Lambda_{\beta\nu} = g_{\mu\nu} \;\Rightarrow\; \Lambda^T g \Lambda = g$$

と書けます。変形すると

$$\begin{aligned}
\Lambda^T g &= g \Lambda^{-1} \\
g^{-1} \Lambda^T g &= \Lambda^{-1} \quad (g^{-1} = g)
\end{aligned}$$

となって、ローレンツ変換の逆行列を計量から求められます。

ここでは触れませんが (相対論的量子力学の「ローレンツ変換」参照)、ローレンツ変換はミンコフスキー空間の内積を不変にする変換として一般化されます。例えば、ミンコフスキー空間の内積の 3 次元部分はユークリッド空間の内積と同じになっているために空間の回転変換で不変なので、回転変換はローレンツ変換に含まれます。一般化したローレンツ変換の話では (1) をローレンツブースト (Lorentz boost) と言います。

ちなみに、特殊相対性理論ではイベント (事象、event) という単語が出てきますが、簡単に言えばミンコフスキー空間上の点がイベントです。つまり、ある時間、ある位置で起きた現象をミンコフスキー空間の点として理想化したものです (イベントで構成される連続体としてのミンコフスキー空間)。力学では 3 次元空間の位置とパラメータとしての時間でイベントを与えますが、時間を含む 4 次元空間ではその点になるというだけです。そして、点 (イベント) を繋いで曲線にすれば粒子の軌道 (時間を含む) となり、それを世界線 (world line) と呼びます。

細かい話ですが、多様体の視点から言えば、イベントは 4 次元空間としての多様体上の点で、その点を 4 次元の実空間に写すことで座標系を与え、点での接ベクトル空間を使います (x_μ は座標であって接ベクトル空間のベクトル成分ではない)。しかし、ここはそんな話とは無関係で、ベクトル空間として扱っています。

このようにして、時間を含めた 4 次元空間とローレンツ変換の性質によってミンコフスキー空間は構成されています。ここに電磁気を持ち込みます。そのためには、電磁気の量によって (1) と同じ変換をする 4 次元のベクトルを作る必要があります。しかし、電磁気でのベクトルは 3 次元しかなく、電場と磁場の変換は (1) と異なっています。なので、ローレンツ変換の状況に対応している一定速度で点電荷が動いている場合を利用して、4 元ベクトルを作ります。

ここから、電磁気の話をしてるときの太字はユークリッド空間の 3 次元ベクトルです。速度 $\boldsymbol{v}$ で動く点電荷によるスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は、「動く点電荷による電磁場」で求めたように

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{c\alpha Q}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|-\boldsymbol{v}(t_r)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t_r))}\qquad(t=t_r+\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t_r)|}{c})$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{c\beta Q\boldsymbol{v}(t_r)}{c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t')|-\boldsymbol{v}(t_r)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c(t_r))}=\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{v}(t_r)\phi(\boldsymbol{r},t)$$

Q は電荷、$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ は観測する位置、$\boldsymbol{r}_c$ は点電荷の位置です。ϕ と $\boldsymbol{A}$ は電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$ によって

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\ ,\ \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

となっています。点電荷を、点電荷が x 軸方向に一定速度 V で動いて見える慣性系 O と、O に対して一定速度 V で遠ざかっている慣性系 O' から見ます。点電荷は $t=0$ のとき原点にいたとすれば (O,O' は $t=0$ のとき原点が重なっている)、「放射」での一定速度での計算を使えば

$$\begin{aligned}c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c|-\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_c)&=\sqrt{(c^2t-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2+(c^2-\boldsymbol{v}^2)(\boldsymbol{r}^2-c^2t^2)}\qquad(\boldsymbol{v}=(V,0,0)\ ,\ \boldsymbol{r}_c=\boldsymbol{v}t)\\&=\sqrt{(c^2t-Vx)^2+(c^2-V^2)(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)}\end{aligned}$$

ルートの中は

$$
\begin{aligned}
&(c^2t - Vx)^2 + (c^2 - V^2)(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2) \\
&\quad = (c^4t^2 + V^2x^2 - 2c^2Vtx) - (c^2 - V^2)c^2t^2 + (c^2 - V^2)x^2 + c^2(1 - \frac{V^2}{c^2})(y^2 + z^2) \\
&\quad = -2c^2Vtx + V^2c^2t^2 + c^2x^2 + c^2(1 - \frac{V^2}{c^2})(y^2 + z^2) \\
&\quad = c^2(x - Vt)^2 + c^2(1 - \frac{V^2}{c^2})(y^2 + z^2) \\
&\quad = \frac{c^2}{\gamma^2}(\gamma^2(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\phi(\boldsymbol{r}, t) = \gamma \frac{\alpha Q}{\sqrt{\gamma^2(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)}}
$$

$$
A_x(\boldsymbol{r}, t) = \gamma \frac{\beta Q V}{\sqrt{\gamma^2(x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)}}
$$

O' では点電荷は原点で静止しているので、電場のみが発生し

$$
\phi'(\boldsymbol{r}', t') = \frac{\alpha Q}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}
$$

時間と座標にローレンツ変換を使ってみると

$$
\phi'(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\alpha Q}{\sqrt{\gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2}}
$$

これに γ がつけば O と同じになります。このこととローレンツ変換から、$\beta_b\phi/c$ を $x_0 = ct$、A_i を x_i に対応させて

$$
\frac{\beta_b}{c}\phi'(\boldsymbol{r}', t') = \gamma(-\frac{V}{c}A_x(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\beta_b}{c}\phi(\boldsymbol{r}, t)) \tag{5a}
$$

$$
\frac{\beta_b}{c}\phi(\boldsymbol{r}, t) = \gamma(\frac{V}{c}A'_x(\boldsymbol{r}', t') + \frac{\beta_b}{c}\phi'(\boldsymbol{r}', t')) \tag{5b}
$$

としてみます。ϕ と $\boldsymbol{A}$ の次元は、L, T を長さと時間の次元、他のは { } で書くことにすれば

$$
\phi : \{E\}L = \{B\}\{\beta_b^{-1}\}\frac{L}{T}L \quad (\{E\} = \{B\}\{\beta_b^{-1}\}\frac{L}{T})
$$

$$
\boldsymbol{A} : \{B\}L
$$

このため、ϕ に β_b/c をかけて次元を合わせています。(5b) は $A'_x = 0$ から成立しているのはすぐわかり、(5a) は

$$\begin{aligned}\frac{\beta_b}{c}\phi' = \ &\gamma(-\frac{V}{c}A_x + \frac{\beta_b}{c}\phi) = \gamma(-\frac{V}{c}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha QV\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+(y^2+z^2)}} + \frac{\beta_b}{c}\frac{\alpha Q\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+(y^2+z^2)}})\\ &= \alpha Q\gamma^2\frac{\beta_b}{c}(-\frac{V^2}{c^2}\frac{1}{\sqrt{x'^2+(y^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{x'^2+(y^2+z^2)}}) \quad (\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta_m\beta_b}{\alpha} = \frac{\beta_b}{c^2})\\ &= \frac{\beta_b}{c}\gamma^2(1-\frac{V^2}{c^2})\frac{\alpha Q}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\\ &= \frac{\beta_b}{c}\frac{\alpha Q}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\end{aligned}$$

となり、成立します。A_x では x に対応させるので (A_y, A_z は変換されない)

$$A'_x(\boldsymbol{r}', t') = \gamma(A_x(\boldsymbol{r}, t) - V\frac{\beta_b}{c^2}\phi(\boldsymbol{r}, t)) \tag{6a}$$

$$A_x(\boldsymbol{r}, t) = \gamma(A'_x(\boldsymbol{r}', t') + V\frac{\beta_b}{c^2}\phi'(\boldsymbol{r}', t')) \tag{6b}$$

とすれば

$$\begin{aligned}A'_x &= \gamma(\frac{\beta}{\alpha}V\phi - V\frac{\beta_b}{c^2}\phi) = \gamma V(\frac{\beta_b}{c^2} - \frac{\beta_b}{c^2})\phi = 0\\ A_x(\boldsymbol{r}, t) &= \gamma V\frac{\beta_b}{c^2}\phi' = \gamma V\frac{\beta_b}{c^2}\frac{\alpha Q}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2}} = \gamma\frac{\beta QV}{\sqrt{\gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2}}\end{aligned}$$

となって、変換が成立します。
　実際に、$\boldsymbol{B}' = \nabla' \times \boldsymbol{A}'$ の x 成分は

$$B'_x(\boldsymbol{r}', t') = (\nabla' \times \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}', t'))_x = \frac{\partial A'_z(\boldsymbol{r}', t')}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y(\boldsymbol{r}', t')}{\partial z'} = \frac{\partial A_z(\boldsymbol{r}, t)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\boldsymbol{r}, t)}{\partial z} = B_x(\boldsymbol{r}, t)$$

y 成分は (2) と (6a) を使って

$$\begin{aligned}B'_y = (\nabla' \times \boldsymbol{A}')_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} &= \gamma\frac{\partial}{\partial z}(A_x - V\frac{\beta_b}{c^2}\phi) - \gamma(\frac{V}{c}\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})A_z\\ &= \gamma(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} - V\frac{\beta_b}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{V}{c^2}\frac{\partial A_z}{\partial t})\\ &= \gamma(B_y + \frac{V}{c^2}\beta_b(-\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_z}{\partial t})\\ &= \gamma(B_y + \frac{\beta_b}{c^2}VE_z)\end{aligned}$$

z 成分は

$$B'_z = (\nabla' \times \boldsymbol{A}')_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'} = \gamma(\frac{V}{c}\frac{\partial}{c\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})A_y - \gamma\frac{\partial}{\partial y}(A_x - V\frac{\beta_b}{c^2}\phi)$$
$$= \gamma(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} + V\frac{\beta_b}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{V}{c^2}\frac{\partial A_y}{\partial t})$$
$$= \gamma(B_z - \frac{\beta_b}{c^2}V(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_y}{\partial t})$$
$$= \gamma(B_z - \frac{\beta_b}{c^2}VE_y)$$

となって、磁場のローレンツ変換になります。ϕ でも (2),(5a),(6a) を使って

$$E'_x = -\frac{\partial}{\partial x'}\phi' - \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A'_x}{\partial t'} = -\frac{\gamma^2}{\beta_b}(\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})(-VA_x + \beta_b\phi) - \frac{\gamma^2}{\beta_b}(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x})(A_x - V\frac{\beta_b}{c^2}\phi)$$

これは

$$(\frac{V}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})(-VA_x + \beta_b\phi) = -\frac{V^2}{c^2}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{V}{c^2}\beta_b\frac{\partial \phi}{\partial t} - V\frac{\partial A_x}{\partial x} + \beta_b\frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x})(A_x - V\frac{\beta_b}{c^2}\phi) = \frac{\partial A_x}{\partial t} - V\frac{\beta_b}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + V\frac{\partial A_x}{\partial x} - V^2\frac{\beta_b}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

なので

$$E'_x = -\frac{\gamma^2}{\beta_b}\beta_b(1 - \frac{V^2}{c^2})(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_x}{\partial t}) = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_x}{\partial t} = E_x$$

E'_y は

$$E'_y = -\frac{\partial}{\partial y'}\phi' - \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A'_y}{\partial t'} = -\gamma\frac{c}{\beta_b}\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{V}{c}A_x + \frac{\beta_b}{c}\phi) - \frac{1}{\beta_b}\gamma(\frac{\partial A_y}{\partial t} + V\frac{\partial A_y}{\partial x})$$
$$= -\gamma(-\frac{V}{\beta_b}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{V}{\beta_b}\frac{\partial A_y}{\partial x})$$
$$= -\gamma(\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{V}{\beta_b}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}))$$
$$= \gamma(E_y - \frac{V}{\beta_b}B_z)$$

E'_z は E'_y での y を z にすればいいだけで

$$E'_z = -\frac{\partial}{\partial z'}\phi' - \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A'_z}{\partial t'} = -\gamma\frac{c}{\beta_b}\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{V}{c}A_x + \frac{\beta_b}{c}\phi) - \frac{1}{\beta_b}\gamma(\frac{\partial A_z}{\partial t} + V\frac{\partial A_z}{\partial x})$$
$$= -\gamma(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{V}{\beta_b}(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}))$$
$$= \gamma(E_z + \frac{V}{\beta_b}B_y)$$

となって、電場のローレンツ変換になります。

　というわけで、電磁気でミンコフスキー空間に使えるベクトルは、$\boldsymbol{A}$ の成分を A_1, A_2, A_3 と書けば

$$A_\mu = (\frac{\beta_b}{c}\phi, A_1, A_2, A_3)$$

となり、x_μ と同じ変換をします。

　もう1つベクトルが作れます。O では $v_x = V$ で動き、O' で静止しているので、点電荷の電荷密度は

$$\begin{aligned}
\rho(\boldsymbol{r}, t) &= Q\delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t) = Q\delta(x - v_x t)\delta(y)\delta(z) \\
\rho'(\boldsymbol{r}') &= Q\delta^3(\boldsymbol{r}') = Q\delta(x')\delta(y')\delta(z')
\end{aligned}$$

電流密度 $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}\rho$ を合わせて

$$(c\rho, v_x\rho, v_y\rho, v_z\rho)$$

これをローレンツ変換してみると

$$\begin{aligned}
c\rho'(\boldsymbol{r}', t') = Q\gamma(-\frac{V}{c}v_x\rho + c\rho) = cQ\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})\rho &= cQ\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})\delta(x - v_x t)\delta(y)\delta(z) \\
&= cQ\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})\delta(\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})(x' - v'_x t'))\delta(y')\delta(z') \\
&= cQ\delta(x' - v'_x t')\delta(y')\delta(z') \\
&= cQ\delta(x')\delta(y')\delta(z') \quad (v'_x = 0)
\end{aligned}$$

電流密度は

$$\begin{aligned}
v'_x\rho'(\boldsymbol{r}', t') = Q\gamma(v_x\rho - \frac{V}{c}c\rho) = cQ\gamma(v_x - V)\rho &= cQ\gamma(v_x - V)\delta(x - v_x t)\delta(y)\delta(z) \\
&= cQ\frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}\delta(x' - v'_x t')\delta(y')\delta(z') \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり、ローレンツ変換が成立しています。なので、$\boldsymbol{j}$ の成分を j_1, j_2, j_3 として

$$j_\mu = (c\rho, j_1.j_2, j_3)$$

とすれば4元ベクトルです。

　これで4元ベクトルが作れたので、マクスウェル方程式を書き換えます。スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルによるマクスウェル方程式は

$$\nabla\cdot(\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\phi)=-4\pi\alpha\rho \tag{7a}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\phi)=4\pi\beta\boldsymbol{j} \tag{7b}$$

(7a) の左辺は

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\phi) &= \nabla^2\phi+\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\\
&= \nabla^2\phi+\frac{c}{\beta_b}\frac{\partial}{c\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\\
&= -(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\phi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{c}{\beta_b}\frac{\partial}{c\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}\\
&= -(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\phi+\frac{c}{\beta_b}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\beta_b}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{A})\\
&= -(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\phi+\frac{c}{\beta_b}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_0+\nabla\cdot\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

時間微分と c を合わせたものを

$$\partial_0=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

と表記することにして、右辺と合わせて

$$\begin{aligned}
-(\partial_0^2-\nabla^2)\phi+\frac{c}{\beta_b}\partial_0(\partial_0A_0+\nabla\cdot\boldsymbol{A}) &= -4\pi\alpha\rho\\
-(\partial_0^2-\nabla^2)A_0+\partial_0(\partial_0A_0+\nabla\cdot\boldsymbol{A}) &= -4\pi\alpha\frac{\beta_b}{c}\rho\\
(\partial_0^2-\nabla^2)A_0-\partial_0(\partial_0A_0+\nabla\cdot\boldsymbol{A}) &= 4\pi\beta j_0 \qquad (\frac{\beta_b}{c}=\frac{\beta}{\alpha}c)
\end{aligned} \tag{8}$$

(7b) の左辺は

$$\begin{aligned}
\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\phi) &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+(\partial_0^2-\nabla^2)\boldsymbol{A}-\partial_0^2\boldsymbol{A}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\phi)\\
&= (\partial_0^2-\nabla^2)\boldsymbol{A}-\partial_0^2\boldsymbol{A}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\partial_0^2\boldsymbol{A}+\frac{\beta_b}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi\\
&= (\partial_0^2-\nabla^2)\boldsymbol{A}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\frac{\beta_b}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi\\
&= (\partial_0^2-\nabla^2)\boldsymbol{A}+\nabla\partial_0A_0+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\\
&= (\partial_0^2-\nabla^2)\boldsymbol{A}+\nabla(\partial_0A_0+\nabla\cdot\boldsymbol{A})
\end{aligned}$$

右辺はそのままなので

$$(\partial_0^2 - \nabla^2)\boldsymbol{A} + \nabla(\partial_0 A_0 + \nabla\cdot\boldsymbol{A}) = 4\pi\beta\boldsymbol{j} \tag{9}$$

となります。$\partial_\mu = (\partial_0, -\nabla)$ とすれば

$$(\partial_0^2 - \nabla^2)A_\mu - \partial_\mu(\partial_0 A_0 + \nabla\cdot\boldsymbol{A}) = 4\pi\beta j_\mu$$

と書けます。括弧内の微分は ∂_μ で書けますが、その前に別の話をしておきます。

もう 1 つ別のベクトルを導入して、より便利な形式にします。ベクトル空間の話を持ち込みますが、細かい話や証明は省いていきます。あるベクトル空間 $\mathcal{V}$ があり、そのベクトルを $\boldsymbol{v}$ とします。このとき、$\boldsymbol{v}$ から実数を作る関数 (写像)$\boldsymbol{\Pi}$ があり ($\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{v}) = c$、$c$ はスカラー。太字ですが c のみの値)、$\boldsymbol{\Pi}$ によるベクトル空間は $\mathcal{V}$ の双対空間 $\mathcal{V}^*$ と呼ばれます (数学の「ベクトル空間」参照)。$\mathcal{V}$ と $\mathcal{V}^*$ の次元は同じで、$\boldsymbol{\Pi}$ は $\boldsymbol{\Pi}(c\boldsymbol{v}) = c\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{v})$ という性質を持ちます。

$\mathcal{V}$ の基底 $\boldsymbol{e}_i$ から $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ とする $\mathcal{V}^*$ のベクトル $\boldsymbol{f}_i$ があり、$\boldsymbol{f}_i$ は双対空間の基底になります。i, j は 1 から $\mathcal{V}$ の次元 D までの範囲です。双対空間のベクトル $\boldsymbol{\Pi}$ を基底で展開すれば

$$\boldsymbol{\Pi} = \Pi_i\boldsymbol{f}_i \quad (\sum_{i=1}^{D}\Pi_i\boldsymbol{f}_i \ \Rightarrow\ \Pi_i\boldsymbol{f}_i)$$

基底になるのは簡単に言えば、$\Pi_i\boldsymbol{f}_i = 0$ となるのは

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{e}_j) = \Pi_i\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = \Pi_j$$

から、$\Pi_i\boldsymbol{f}^i(\boldsymbol{e}_j) = \Pi_j = 0$ のときになり、線形独立となるからです。$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{v})$ を展開すると

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\Pi}(v_i\boldsymbol{e}_i) = v_i\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{e}_i) = v_i\Pi_j\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{e}_i) = v_i\Pi_j\delta_{ij} = v_i\Pi_i$$

となり、成分による内積の形になります。これをミンコフスキー空間に適用します。

単純に、添え字を 4 次元のギリシャ文字に置き換えて

$$\boldsymbol{f}_\mu(\boldsymbol{e}_\nu) = \delta_{\mu\nu}$$
$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\Pi}(v_\mu\boldsymbol{e}_\mu) = v_\mu\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{e}_\mu) = v_\mu\Pi_\mu$$

しかし、このままだとどっちのベクトルなのか紛らわしいので、添え字の位置で区別できるようにします。ミンコフスキー空間のベクトル成分では添え字を上にして x^μ、双対空間のベクトル成分では下にして Π_μ のように表記し、それぞれの基底は $\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{f}^\mu$ とします。そうすると

$$\boldsymbol{\Pi} = \Pi_\mu \boldsymbol{f}^\mu\ ,\ \boldsymbol{v} = v^\mu \boldsymbol{e}_\mu$$

$$\boldsymbol{f}^\mu(\boldsymbol{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\Pi}(v^\mu \boldsymbol{e}_\mu) = v^\mu \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{e}_\mu) = v^\mu \Pi_\mu$$

クロネッカーデルタの添え字を上下に分けてますが、意味は同じです。和は

$$\sum_{\mu=0}^{3} \Pi_\mu \boldsymbol{f}^\mu\ \Rightarrow\ \Pi_\mu \boldsymbol{f}^\mu$$

と省略しています。

内積はスカラーを作るので $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{v})$ と同じです。なので

$$\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{v}) = \Pi_\mu v^\mu = g_{\mu\nu}\Pi^\mu v^\nu$$

と与えられます。Π^μ は $\boldsymbol{\Pi}$ に対応するベクトル空間 $\mathcal{V}$ のベクトル成分です。この式から分かるように、$\mathcal{V}$ での成分と $\mathcal{V}^*$ での成分の間は計量によって

$$\Pi_\mu = g_{\mu\nu}\Pi^\nu$$

Π_μ から Π^μ へは $g_{\mu\nu}$ の逆行列で行われるので、$g_{\mu\nu}$ の逆行列を $g^{\mu\nu}$ $(g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu)$ として

$$\Pi^\mu = g^{\mu\nu}\Pi_\nu$$

すぐ分かるように $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ です。v^μ に対しても同様です。v^μ を反変ベクトル (contravarint vector)、v_μ を共変ベクトル（covariant vector）と呼びます。

双対空間でのローレンツ変換を求めます。大抵はローレンツ変換の添え字も上下にずらして $\Lambda^\mu{}_\nu, \Lambda_\mu{}^\nu$ として

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

のように書きますが、表記に慣れてないと勘違いしそうなので、ここではローレンツ変換の添え字は下付きのままにします。なので、ローレンツ変換では $\Lambda_{\mu\nu}x_\nu$ でも ν の和を取ります。

双対空間での基底のローレンツ変換は

$$\boldsymbol{f}^\nu(\boldsymbol{e}'_\mu) = \boldsymbol{f}^\nu((\Lambda^{-1})_{\alpha\mu}\boldsymbol{e}_\alpha) = (\Lambda^{-1})_{\alpha\mu}\boldsymbol{f}^\nu(\boldsymbol{e}_\alpha) = (\Lambda^{-1})_{\alpha\mu}\delta^\nu_\alpha$$

$\boldsymbol{f}^\nu$ は $\boldsymbol{f}^\nu(\boldsymbol{e}_\mu) = \delta^\nu_\mu$ として定義されているので、ローレンツ変換後の $\boldsymbol{f}'^\beta$ でも $\boldsymbol{f}'^\beta(\boldsymbol{e}'_\mu) = \delta^\beta_\mu$ になることを要求すべきです。なので

$$\Lambda_{\beta\nu}\boldsymbol{f}^\nu(\boldsymbol{e}'_\mu) = \Lambda_{\beta\nu}(\Lambda^{-1})_{\alpha\mu}\delta^\nu_\alpha = \Lambda_{\beta\alpha}(\Lambda^{-1})_{\alpha\mu} = \delta^\beta_\mu$$

とすればよく、$\boldsymbol{f}^\mu$ のローレンツ変換は

$$\boldsymbol{f}'^\mu = \Lambda_{\mu\nu}\boldsymbol{f}^\nu$$

これが双対空間の基底の添え字を上につけていた理由で、双対空間の基底は x^μ と同じ変換をします。逆変換 Λ^{-1} によって

$$(\Lambda^{-1})_{\mu\alpha}\boldsymbol{f}'^\alpha = (\Lambda^{-1})_{\mu\alpha}\Lambda_{\alpha\nu}\boldsymbol{f}^\nu = \delta_{\mu\nu}\boldsymbol{f}^\nu = \boldsymbol{f}^\mu$$

そうすると、成分の変換は

$$\boldsymbol{\Pi} = \Pi_\nu\boldsymbol{f}^\nu = \Pi_\nu(\Lambda^{-1})_{\nu\alpha}\boldsymbol{f}'^\alpha = \Pi'_\alpha\boldsymbol{f}'^\alpha$$

から

$$\Pi'_\alpha = (\Lambda^{-1})_{\nu\alpha}\Pi_\nu$$

となり、$\mathcal{V}$ の基底の変換 (4) と同じです。これが $\mathcal{V}$ の基底の添え字を下付きにしてた理由です。$\mathcal{V}$ の基底と同じ変換をするために Π_μ は共変、それと反対の変換をするために x^μ は反変と呼ばれています。

反変、共変ベクトルを使ってマクスウェル方程式を整理します。ここから太字は 3 次元ベクトルです。まず、表記をまとめますが、計量を $(-1, +1, +1, +1)$ にしている場合とでは符号がかなり異なっているので気を付けてください。反変、共変ベクトルは

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \boldsymbol{x})\ ,\ x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, -\boldsymbol{x}) \quad (x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu)$$

x^0 は $g_{00} = g^{00} = 1$ のために $x^0 = x_0$ です。$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ なので

$$x_1 = g_{1\nu}x^\nu = g_{11}x^1 = -x^1\ ,\ x_2 = g_{2\nu}x^2 = g_{22}x^1 = -x^2\ ,\ x_3 = g_{3\nu}x^3 = g_{33}x^3 = -x^3$$

となっています。内積は

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu = g^{\mu\nu}x_\mu y_\nu = x_\mu y^\mu = x^\mu y_\mu &= x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 \\ &= x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \\ &= x_0y_0 - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

微分は (2) で求めたように

$$\begin{aligned} \partial'_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} &= \gamma(\partial_0 + \frac{V}{c}\frac{\partial}{\partial x}) \ \Leftrightarrow\ x_0 = \gamma(x'_0 + \frac{V}{c}x') \\ \frac{\partial}{\partial x'} &= \gamma(\frac{V}{c}\partial_0 + \frac{\partial}{\partial x}) \ \Leftrightarrow\ x = \gamma(\frac{V}{c}x'_0 + x') \end{aligned}$$

となっていて、x_μ の変換に対応しています。このため、微分演算子を

$$(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3})\ ,\ (\frac{\partial}{\partial x_0},\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})$$

としたとき、それぞれ x_μ, x^μ の変換を受けます。これを反映させるために

$$\partial_\mu=(\frac{\partial}{\partial x^0},\frac{\partial}{\partial x^1},\frac{\partial}{\partial x^2},\frac{\partial}{\partial x^3})=(\partial_0,\partial_i)=(\partial_0,\nabla)\ ,\ \partial^\mu=(\frac{\partial}{\partial x_0},\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3})=(\partial^0,\partial^i)=(\partial^0,-\nabla)$$

として、共変、反変ベクトルに合わせます。$\partial_0=\partial^0$ です。微分演算子の作用は

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu A^\mu=\frac{\partial A^0}{\partial x^0}+\frac{\partial A^1}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3}{\partial x^3}=\partial_0A^0+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\\
&\partial^\mu A_\mu=\frac{\partial A_0}{\partial x_0}+\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}=\frac{\partial A^0}{\partial x^0}+\frac{\partial A^1}{\partial x^1}+\frac{\partial A^2}{\partial x^2}+\frac{\partial A^3}{\partial x^3}=\partial_0A^0+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\\
&g_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu=\partial^0A^0-\partial^1A^1-\partial^2A^2-\partial^3A^3=\partial^0A^0-\partial^iA^i=\partial_0A^0+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\partial^iA^i=-\partial^1A^1-\partial^2A^2-\partial^3A^3=\partial_1A^1+\partial_2A^2+\partial_3A^3
\end{aligned}$$

$g^{\mu\nu}$ は定数なので微分とは無関係に動かせます。微分演算子同士の内積は

$$\Box=\partial_\mu\partial^\mu=\partial_0^2+\partial_1\partial^1+\partial_2\partial^2+\partial_3\partial^3=\partial_0^2-\partial_1\partial_1-\partial_2\partial_2-\partial_3\partial_3=\partial_0^2-\nabla^2$$

$\Box$ をダランベルシャン (d'Alembertian) やダランベール演算子と言い、ローレンツ変換で不変です。不変なのは

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{\partial^2}{\partial x'^2}&=(\gamma\frac{\partial}{c\partial t}+\frac{V}{c}\gamma\frac{\partial}{\partial x})^2-(\gamma\frac{V}{c}\frac{\partial}{c\partial t}+\gamma\frac{\partial}{\partial x})^2\\
&=\gamma^2(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{V^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{V^2}{c^2}\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2})\\
&=\gamma^2(1-\frac{V^2}{c^2})\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\gamma^2(1-\frac{V^2}{c^2})\frac{\partial^2}{\partial x^2}\\
&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

から分かります。

(8),(9) の左辺に今の表記を当てはめれば

$$\begin{aligned}
&(\partial_0^2-\nabla^2)A^0-\partial^0(\partial_0A_0+\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\Box A^0-\partial^0(\partial^\nu A_\nu)\\
&(\partial_0^2-\nabla^2)\boldsymbol{A}+\nabla(\partial_0A_0+\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\Box A^i-\partial^i(\partial^\nu A_\nu)
\end{aligned}$$

よって、マクスウェル方程式は

$$A^\mu = (\frac{\beta_b}{c}\phi, A^1, A^2, A^3)\ ,\ j^\mu = (c\rho, j^1, j^2, j^3)$$

を使うことで

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial^\nu A_\nu) = 4\pi\beta j^\mu \tag{10}$$

と書けます。このようにしてマクスウェル方程式はミンコフスキー空間で記述されます。もしくは、A^μ を

$$\overline{A}^\mu = \beta_b^{-1}A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \beta_b^{-1}A^1, \beta_b^{-1}A^2, \beta_b^{-1}A^3)$$

とすれば

$$\Box\overline{A}^\mu - \partial^\mu(\partial^\nu\overline{A}_\nu) = 4\pi\beta_m j^\mu$$

となり、β_b を式上から消せます。
　左辺の $\Box$ と $\partial^\nu A_\nu$ はローレンツ変換で不変なので、$\Lambda_{\mu\nu}$ を作用させると慣性系 O' において

$$\Box' A'^\mu - \partial'^\mu(\partial'^\nu A'_\nu) \quad (\Box' = \Box\ ,\ \partial'^\nu A'_\nu = \partial^\nu A_\nu\ ,\ A'^\mu = \Lambda_{\mu\nu}A^\nu)$$

マクスウェル方程式はローレンツ変換で形を変えないので、(10) の形が変わってはいけないです。なので、右辺も同じ形になる必要があり

$$\Box' A'^\mu - \partial'^\mu(\partial'^\nu A'_\nu) = 4\pi\beta j'^\mu$$

となることが要求されます。これから、j^μ が 4 元ベクトルになっているとも言えます。

・補足
　添え字の上げ下げに関する数学の話を簡単にします。ベクトル空間を $\mathcal{V}$ とし、その双対空間を $\mathcal{V}^*$ とします。$\mathcal{V}^*$ のベクトルを双対ベクトルと呼んでいきます。$\mathcal{V}^*$ の $\boldsymbol{\omega}$ は $\mathcal{V}$ の $\boldsymbol{v}$ を実数にします。これを $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})$ と表記し、後の話が見やすくなるので

$$<\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v}> = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v})$$

とします。また、$\mathcal{V}$ での内積は $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ のように表記します。$\boldsymbol{\omega}$ の線形性は (α_1, α_2 はスカラー)

$$\boldsymbol{\omega}(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2) = \alpha_1\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{v}_2)$$

ここで、$\mathcal{V}$ のベクトルから双対ベクトルを作る写像 L を考えます。この写像による双対ベクトルは

$$L(\boldsymbol{v}) = \tilde{\boldsymbol{v}}$$

と書くことにし、このとき

$$< L(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} >=< \tilde{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{w} >= \tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \quad (\boldsymbol{w} \in \mathcal{V})$$

となる全単射の写像 L が存在します (リースの表現定理)。

全単射なのは簡単に分かります。$L(\boldsymbol{v}) = 0$ となる $\boldsymbol{v}$ に対して $< L(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} >= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ なので、$\boldsymbol{v}$ は 0 です。つまり、$L(\boldsymbol{v})$ のカーネルは 0 なので ($\mathrm{Ker}L = \{0\}$)、単射です。そして、$\mathcal{V}$ と $\mathcal{V}^*$ の次元は同じなので全射です。よって、L は全単射です。また、内積の性質から

$$< L(\alpha\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} >= (\alpha\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \alpha < L(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} >$$

なので、線形性 $L(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha L(\boldsymbol{v})$ を持ちます。

$\mathcal{V}$ の基底を $\boldsymbol{e}_i$ として $\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{e}_i)$ は

$$\tilde{v}_i = \tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{e}_i) =< L(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{e}_i >= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i) = v^j(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_i) = v^j g_{ji}$$

これは計量による $\mathcal{V}$ から $\mathcal{V}^*$ への成分の変換になっています。これを

$$v_i = g_{ji}v^j$$

と表記します。そして、L は全単射なので逆が存在します。つまり、g_{ij} の逆としての $\mathcal{V}^*$ から $\mathcal{V}$ への写像が存在し、それを g^{ij} として

$$g^{ik}v_k = v^i$$

と定義すれば、

$$g^{ik}v_k = g^{ik}g_{kj}v^j \ \Rightarrow \ g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$$

となり、実際に g_{ij} の逆行列です。このようにして、計量による添え字の上げ下げが行われます。