マクスウェル方程式

電磁気の法則はマクスウェル方程式としてまとめられています。マクスウェル方程式は導出されているとして、マクスウェル方程式を変形させて出てくるものを見ていきます。

後半はゲージ変換の話です。

それぞれの式の導出は、「静電場」、「電荷の保存」、「静磁場」、「電磁誘導」、「電磁気の単位系」を見てください。

3次元の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ 、時間を t とします。電荷密度 $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ 、電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$ があるとき、真空におけるマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\alpha\rho \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad (1c)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\beta_m\beta_b}{\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 4\pi\beta_m\beta_b\boldsymbol{j} \quad (1d)$$

$\boldsymbol{E}$ は電場、 $\boldsymbol{B}$ は磁場です。 α, β_m, β_b は比例定数で、単位系によって決まります。電場と磁場が点電荷 Q に作用する力はローレンツ力で

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \beta_b^{-1}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

となっています。単位系を SI(国際単位系) にすれば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\boldsymbol{x}, t)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$$

$$\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

ϵ_0, μ_0 は真空での誘電率、透磁率です。電流密度は電荷の速度(平均速度) $\boldsymbol{v}$ によって $\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}$ と与えられます。光速 c は ϵ_0, μ_0 から $(\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ です。

CGS ガウス単位系とヘヴィサイド・ローレンツ単位系では

- CGS ガウス

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

この単位系では電場と磁場の次元が一致します (SI 単位系では c ずれている)。

• ヘヴィサイド・ローレンツ

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

CGS ガウス単位系から 4π を失くしたものがヘヴィサイド・ローレンツ単位系で、 4π を失くすことを有理化と言います。電磁気では SI が多く使われだしてあり、CGS ガウス単位系とヘヴィサイド・ローレンツ単位系は相対論や素粒子、原子核でよく使われます。他にも CGS-emu や CGS-esu といったものもあり、CGS-emu は ϵ_0 を 1 としたもの、CGS-esu は μ_0 を 1 としたものです。

マクスウェル方程式からエネルギーを出します。(1c) と $\mathbf{B}$ 、(1d) と $\mathbf{E}$ の内積は

$$\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{\beta_b} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 4\pi\beta \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

$\beta = \beta_m \beta_b$ としています。これより ($\mathbf{X}^2 = |\mathbf{X}|^2$)

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{1}{\beta_b} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 4\pi\beta \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\beta_b} \mathbf{B}^2 \right) + (\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E}) = 4\pi\beta \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\beta_b} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = 4\pi\beta \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\beta_b \beta} \mathbf{B}^2 \right) + \frac{1}{4\pi\beta} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$$

最後から 2 行目で

$$\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})$$

を使っています。固定した領域 $\mathcal{V}$ で 3 次元積分し、ストークスの定理を使うと

$$\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{V}} d\tau \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\beta_b \beta} \mathbf{B}^2 \right) = - \int_{\mathcal{V}} d\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\mathcal{V}} d\tau \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d\tau \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\beta_b \beta} \mathbf{B}^2 \right) = - \int_{\mathcal{V}} d\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi\beta} \int_{\mathcal{S}} ds \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$d\tau$ は3次元積分、 dS は2次元積分で、 ds は閉曲面 S の法線方向を向いています。左辺は電場と磁場のエネルギーの時間微分なので、電磁場のエネルギーの変化です。そうすると、右辺第二項は領域の表面を通過するベクトルなので、エネルギーが減っていることを表します。右辺第一項は、 $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ なので $\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\Delta t$ とすれば、電流に対して電場が作用することで減ったエネルギーと言えます。というわけで、これはエネルギー保存の式です。そして

$$u = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\beta_b \beta} \mathbf{B}^2 \right), \quad \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\beta} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

とすれば、 u は電磁場のエネルギー密度になり、 $\mathbf{S}$ はポインティングベクトル (Poynting vector) と呼ばれます。

ローレンツ力の仕事から同じものが導けます。電荷密度 ρ で分布し、それによる電場、磁場があるとします。このとき、微小な3次元領域 $\Delta\tau$ にいる全電荷 q にローレンツ力 $\mathbf{F}$ が作用しているとすれば、速度 $\mathbf{v}$ で Δl だけ動いたとき、 $\mathbf{F}$ との内積は

$$\mathbf{F} \cdot \Delta l = q(\mathbf{E} + \beta_b^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \Delta l = q(\mathbf{E} + \beta_b^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} \Delta t = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \Delta t$$

これは微小な仕事 ΔW です。 q は $\rho\Delta\tau$ なので、3次元領域 $\mathcal{V}$ での全電荷にすれば

$$q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \Delta t \Rightarrow \Delta t \int_{\mathcal{V}} d\tau \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \Delta t \int_{\mathcal{V}} d\tau \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

$\mathbf{j}$ は電流密度です。仕事を W として、上の結果を入れれば

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\mathcal{V}} d\tau \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{8\pi} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} d\tau \left(\frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\beta_b \beta} \mathbf{B}^2 \right) - \frac{1}{4\pi\beta} \int_S ds \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

このように、仕事の時間変化の形になります。

単位系ごとに書くと

- SI

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|^2$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$$

- CGS ガウス

$$u = \frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|^2)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$$

- ヘヴィサイド・ローレンツ

$$u = \frac{|\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 + |\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)|^2}{2}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = c\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$$

マクスウェル方程式 (1a),(1d) から連続の方程式を出します。(1d) に ∇ の内積を取って

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \frac{\beta}{\alpha} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi\beta \nabla \cdot \mathbf{j} \\ -\frac{\beta}{\alpha} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 4\pi\beta \nabla \cdot \mathbf{j}\end{aligned}$$

$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{X} = 0$ を使っています。これに (1a) を t で偏微分した

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 4\pi\alpha \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

を入れれば

$$-\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$$

となって、電荷の保存を表す連続の方程式となります。

ゲージ変換の話に移ります。スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を使ってマクスウェル方程式を表します。ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2}$$

と定義され、マクスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

に入れると

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \\ 0 &= \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

そして、 $\nabla \times \nabla$ はスカラー関数 ϕ に対して $\nabla \times \nabla \phi = 0$ なので、

$$\mathbf{E} + \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \tag{3}$$

右辺の符号をマイナスに取っているのは便利だからです。この ϕ をスカラーポテンシャルと呼びます。(2),(3) を使って、マクスウェル方程式を変形していきます。

- (1a) に (3) を入れると

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = -4\pi\alpha\rho(\mathbf{x}, t)$$

- (1b) に (2) を入れると、ベクトルの計算から

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

- (1c) に (2),(3) 入れると

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

- (1d) に (2),(3) を入れると

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = 4\pi\beta \mathbf{j}$$

2番目と3番目は恒等式でしかないので、マクスウェル方程式は $\phi, \mathbf{A}$ によって

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = -4\pi\alpha\rho \quad (4a)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = 4\pi\beta \mathbf{j} \quad (4b)$$

と書けます。(4b) はベクトルなので、3つの方程式を含んでいます。なので、4つの未知数 $\phi, \mathbf{A}$ に対して4つの方程式があることから、解くことは可能です。 $\phi, \mathbf{A}$ が求められたなら、(2),(3) から電場と磁場は求められます。しかし、電場、磁場に対応する $\phi, \mathbf{A}$ は一意的に決まりません。

実際に、スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ 、任意のスカラー関数 $\chi(\mathbf{x}, t)$ によって

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \nabla\chi(\mathbf{x}, t)$$

$$\phi \Rightarrow \phi'(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

とした変換で電場と磁場は変化しないからです。この変換は電磁気での特徴であり、ゲージ変換 (gauge transformation) と呼ばれます。実際に、この変換を (2),(3) に入れてみれば

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi' - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\phi - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla\chi) = -\nabla\phi - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

となるので、電場と磁場は変化しません。このようにゲージ変換に対して理論が変化しないことをゲージ不変性と呼び、電磁場の特徴になっています。

ゲージ変換でマクスウェル方程式 (4a) が不変なのは

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \chi) + \nabla \left(\phi - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right) &= \frac{1}{\beta_b} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \chi + \nabla^2 \phi - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \chi \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right)\end{aligned}$$

(4b) では

$$\begin{aligned}\nabla (\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi)) - \nabla^2 (\mathbf{A} + \nabla \chi) + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \chi) + \nabla \left(\phi - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \right) \\ = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi) - \nabla^2 (\mathbf{A} + \nabla \chi) + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{\beta_b} \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} + \nabla \phi - \frac{1}{\beta_b} \nabla \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\ = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + \nabla \phi \right)\end{aligned}$$

から分かります。

というわけで、電磁場において ϕ と $\mathbf{A}$ は完全に1つに決定することはできなく、方程式から決められない関数 $\chi(\mathbf{x}, t)$ による不定性を持っています。決めきれない理由は、未知関数5つ ($\phi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$, $\chi(\mathbf{x}, t)$) に対して解くべき方程式が4つ ((4a) と (4b)) しかないためです。

しかし、この任意性を利用できます。例えば、(4a),(4b) は任意性を利用することで

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= -4\pi\alpha\rho \\ -\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta_b} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= 4\pi\beta\mathbf{j}\end{aligned}$$

このように変換できます。上の式は電場に出てくるポアソン方程式なので

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

となり、 $\phi(\mathbf{x})$ は一意的に決定されます。これは (4a),(4b) に対して条件として

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

を与えており、これをクーロンゲージ (coulomb gauge) と言います。この条件は

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \chi) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi$$

において、右辺を χ の任意性で0にできることから来ています。ゲージ変換による任意性を失くす条件をゲージ条件と言います。

クーロンゲージをゲージ変換しても変わらないとすれば、任意関数 χ' に対して、

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\chi') = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\chi' = 0 \Rightarrow \nabla^2\chi' = 0$$

無限遠で 0 という条件を χ' に与えれば、 $\nabla^2\chi' = 0$ の解は 0 です ($\rho = 0$ で $\phi = 0$ と同じ)。このため、クーロンゲージを取った後にさらにゲージ変換しても χ' による任意性は出てきません。つまり、クーロンゲージを取った時点で任意性はなくなり、 $\phi, \mathbf{A}$ は一意的に決まります。

他のゲージ条件として、ローレンツゲージ (Lorenz gauge) と呼ばれる

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

という条件もあります。ロ - レンツゲージがゲージ変換で変わらないとすることで、今度は χ に対して

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla\chi) + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\chi + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{\beta_b} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) = 0$$

から

$$\nabla^2\chi - \frac{\beta}{\alpha\beta_b} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

という式を要求します。しかし、クーロンゲージでの式と違い、この式だけでは χ から完全に任意性をなくせなく、ローレンツゲージでは $\phi, \mathbf{A}$ は一意的に決まりません。それでも、ローレンツゲージはローレンツ共変性を持つという性質があるので、相対論での共変性を壊さないように話を進めていくために使われます。ローレンツゲージでのマクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi + \frac{\beta}{\alpha\beta_b} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 4\pi\alpha\rho \\ -\nabla^2\mathbf{A} + \frac{\beta}{\alpha\beta_b} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 4\pi\beta\mathbf{j} \end{aligned}$$

ちなみに、ローレンツゲージのローレンツ (Lorenz) とローレンツ力や相対論でのローレンツ変換のローレンツ (Lorentz) は別人です。区別をはっきりさせるためにはローレンスゲージとしたほうが良いですが、ローレンツゲージで統一して呼んでいきます。

ゲージ変換は方程式を簡単にするためだけに導入されたように見えますが、ゲージ変換はもっといろいろな意味を持っています。クーロンゲージに戻って

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

を見ると、これは、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z$$

なので、例えば A_x が決まると A_y と A_z の関係式になって A_y と A_z が独立にならなくなります。つまり、クーロンゲージを使う前にあった独立な 4 成分 $\phi, \mathbf{A}$ に対して、独立な成分が 2 つになっているのが分かります (ϕ はポアソン方程式を満たす)。ローレンツゲージだけでは、 χ の方程式の形を見て分かるように、4 つから 3 つにすることしかできません。しかし、ローレンツゲージでも χ の任意性によってもう 1 つ減らすことができ、結局独立なのは 2 つになります。この独立な成分が 2 つというのは、電磁場が持っている横波の自由度 2 に対応するものです。自由度 2 は 3 次元において進行方向に垂直に振動する波は 2 成分を持つからです (ようは進行方向以外の 2 成分)。横波の自由度 2 は「電磁波」を見てください。

さらに、電磁場がゲージ変換に対して変わらない、つまりゲージ不変性を持っていることがそのまま電荷の保存につながります。これは理論に何かしらの不変性があるときには、その不変性に対応する保存量があるということからくるものです (ネーターの定理)。

素粒子の分野ではゲージ不変性を思いっきり利用して電磁相互作用、弱い相互作用、強い相互作用を記述し、それによって電磁相互作用と弱い相互作用は統一されます (素粒子で標準模型と呼ばれるのは、電磁相互作用と弱い相互作用を統一したワインバーグ・サラムモデルと強い相互作用を記述する量子色力学を合わせたもの)。