電磁波

マクスウェル方程式から電磁波を導きます。
波動方程式についての簡単な話は知っているとしています (力学の「波動方程式」参照)。

　発生源となる電荷、電流がない領域でのマクスウェル方程式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{1a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{1b}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{1c}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\beta_m\beta_b}{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \tag{1d}$$

(1c) と (1d) から磁場 $\boldsymbol{B}$ を消せて

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t))\quad(\beta=\beta_m\beta_b)\\&=-\beta_b\nabla\times\big(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)\big)\end{aligned}$$

これの x 成分を書き出すと

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}&=-\beta_b\big(\frac{\partial}{\partial y}\big(\nabla\times\boldsymbol{E}\big)_z-\frac{\partial}{\partial z}\big(\nabla\times\boldsymbol{E}\big)_y\big)\\&=-\beta_b\Big(\frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\big)-\frac{\partial}{\partial z}\big(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\big)\Big)\\&=-\beta_b\Big(\big(\frac{\partial^2E_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}\big)-\big(\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2E_z}{\partial z\partial x}\big)\Big)\\&=-\beta_b\Big(\frac{\partial^2E_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2E_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial z\partial x}\Big)\end{aligned}$$

(1a) から

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\big)=\frac{\partial^2E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2E_z}{\partial x\partial z}=0$$

なので

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= -\beta_b\Big(\frac{\partial^2 E_y}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z\partial x}\Big)\\
&= -\beta_b\Big(-\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\Big)\\
&= \beta_b(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2})\\
&= \beta_b\nabla^2 E_x\\
\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= \nabla^2 E_x
\end{aligned}
$$

よって、電場の x 成分 $E_x(\boldsymbol{x},t)$ の位置と時間による変化はこれに従います。他の y,z 成分に対しては

$$
\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 E_y(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2}=\nabla^2 E_y(\boldsymbol{x},t)\ ,\ \frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 E_z(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2}=\nabla^2 E_z(\boldsymbol{x},t)
$$

となるので、電場の各成分は同じ式になります。そして、この形は波動方程式です。なので、弦の振動と対応させれば、例えば $E_x(\boldsymbol{x},t)$ の波動方程式は電場の x 成分が位置 $\boldsymbol{x}$ で時間 t のときどのように振動しているのか (値の変化) を記述しています。

最初に $\boldsymbol{B}$ を消しましたが、$\boldsymbol{E}$ を消すようにすれば同様の手順で

$$
\begin{aligned}
\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 B_x(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} &= \nabla^2 B_x(\boldsymbol{x},t)\\
\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 B_y(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} &= \nabla^2 B_y(\boldsymbol{x},t)\\
\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 B_z(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} &= \nabla^2 B_z(\boldsymbol{x},t)
\end{aligned}
$$

このように、電場と磁場による波動方程式が出てきます。ただし、波動方程式の解が必ずマクスウェル方程式の解になるわけではないです。

波動方程式は空間上で一定の形を持って一定の速度で伝わっていく現象を表現する方程式です。このことを波と呼んでいます。一定の形というのが波が伝える影響で、今の場合は電場と磁場です。そして、波動方程式の性質から $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ は真空中を速度

$$
c=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta_m}}
$$

で伝播していくことになり、その現象は電磁波 (electromagnetic wave) と呼ばれます。電磁波は電磁場を言い換えているだけとも言えます。c は光速で、SI では

$$
c=\sqrt{\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}}
$$

となります。電磁波は 1887 年にヘルツ (Hertz) の実験で確認されました。

波の関係式を簡単に求めておきます。電場、磁場で同じなので電場だけ使っていきます。波動方程式は三角関数を解に持っています (力学の「波動方程式」参照)。なので、計算を簡単にするために exp によって

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{a}e^{i(\omega t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{2}$$

という形を作ります。この形は平面波と呼ばれます。$\boldsymbol{a}$ は振幅、ω は角振動数、$\boldsymbol{p}$ は波数ベクトル、$\omega t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}$ は位相です。波数ベクトルは波の進行方向と同じ向きです。(2) とすると三角関数より計算が楽になる代わりに一般的に複素数になります。このため、現実の観測量は実数でないといけないことに注意する必要が出てきます。

(2) を波動方程式に入れれば

$$0=\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\nabla^2\boldsymbol{E}=(-\frac{\beta_m}{\alpha}\omega^2+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{a}e^{i(\omega t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}$$

なので

$$|\boldsymbol{p}|^2=\frac{\beta_m}{\alpha}\omega^2=c^2\omega^2$$

となり、波数と角振動数の関係を与えます。また、位相が $\omega t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}=const$ となる面（ある時刻 t でこの関係を満たす位置 $\boldsymbol{x}$ によって作られる面）は波面と呼ばれ、波の進行方向に垂直です。波面が平面なので (2) は平面波と呼ばれます。

$\omega t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}=const$ から分かるように波面上で電場は同じ値を持ちます（振幅が定数なら)。波面の変化を見ると、変化は時間と位置によって起きるので

$$\omega dt-\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{x}=0$$
$$\omega=\boldsymbol{p}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$$

位置の時間微分は速度 $\boldsymbol{v}$ で、この速度は位相が一定の面の速度で位相速度と呼ばれます。波の進行方向を単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ によって表せば

$$\omega=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{v}|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{v}|\quad(\boldsymbol{p}=|\boldsymbol{p}|\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{v}=|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1)$$

これから波面の速度は $|\boldsymbol{v}|=c$ と分かります。

波の区別に横波と縦波があります。横波は波の進行方向に対して垂直方向に変化が起きている場合、縦波は進行方向に変化が起きている場合です。電磁波が横波であることは簡単に分かります。

電磁波の進行方向を z 軸方向とすれば、z 軸に沿った振動なので、電場と磁場 $\boldsymbol{E}(z,t),\ \boldsymbol{B}(z,t)$ の位置は z にのみ依存します。そうすると、マクスウェル方程式 (1a),(1b) において z 微分以外の項は消えて

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}(z,t)=\frac{\partial}{\partial z}E_z(z,t)=0$$

となり、$E_z(z,t)$ と $B_z(z,t)$ は z 軸の位置に対して一定でなければいけないです。つまり、z 軸に沿って変化するのは $E_x(z,t), E_y(z,t), B_x(z,t), B_y(z,t)$ になります。もしくは、(2) を入れてみると

$$\frac{\partial}{\partial z}E_z(z,t) = a_z\frac{\partial}{\partial z}e^{i(\omega t-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} = 0$$

から、$a_z = 0$ となり、$\boldsymbol{E}$ の x, y 成分のみが消えずに残ります。

このように、進行方向に対しては変化せず、その垂直成分のみが変化することから電磁波は横波となり、電場と磁場が進行方向に対して垂直に存在します。言い換えれば、電磁波の波数ベクトルと電場、磁場は直交するということです。これが電磁場の問題を扱う時に大事になります。そして、直交さえしていればいいので、波数ベクトルに対して電場、磁場は 2 つの向きを独立に取れます。このことから、電磁場は 2 つの自由度を持つと言います。

電磁波が横波で、電場と磁場がお互いに直交していることを具体的に見ます。そのために、z 軸方向に進んでいる電磁波を見ていきます。電磁場の波としての変化は波動方程式に従っているので、z 方向に進行する電磁波の電場の変化は、f_1, f_2, g_1, g_2 を適当な関数として、x, y 成分のダランベールの解から

$$E_x(z,t) = f_1(z-ct) + g_1(z+ct) \tag{3a}$$

$$E_y(z,t) = f_2(z-ct) + g_2(z+ct) \tag{3b}$$

と書けます。z 方向に進んでいるので、位置の依存性は z のみで、電場の z 成分は変化しないです。E_z は 0 としてしまってます。磁場も同様に $\boldsymbol{B}(z,t)$ です。これらを (1d) に入れれば

$$\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial y} - \frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \tag{4a}$$

$$\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z} - \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial x} = \frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \tag{4b}$$

(4a) の最右辺の時間微分に (3a) を入れると

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} &= \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(f_1(z-ct) + g_1(z+ct)) \\
&= \frac{\beta}{\alpha}(-cf_1' + cg_1') \\
&= \frac{\beta}{\alpha}(-c\frac{\partial(z-ct)}{\partial z}f_1' + c\frac{\partial(z-ct)}{\partial z}g_1') \\
&= \frac{\beta}{\alpha}(-c\frac{\partial f_1}{\partial z} + c\frac{\partial g_1}{\partial z})
\end{aligned}$$

f_1' は $z-ct$、g_1' は $z+ct$ で微分したものです。(4a) から

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} &= \frac{\beta}{\alpha}(-c\frac{\partial f_1}{\partial z} + c\frac{\partial g_1}{\partial z}) \\
&= -\frac{c\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial z}(f_1 - g_1)
\end{aligned}$$

微分を外せば

$$B_y(z,t) = \frac{c\beta}{\alpha}(f_1(z-ct) - g_1(z+ct)) \tag{5}$$

(4b) についても同様にすると

$$B_x(z,t) = -\frac{c\beta}{\alpha}(f_2(z-ct) - g_2(z+ct)) \tag{6}$$

として、電場と同じ $f_{1,2}, g_{1,2}$ によって磁場の解を書けます。

さらに具体的にするために、ダランベールの解に対して、z 軸の正方向に進行しているとして ($f_{1,2}(z-ct)$ だけを取り出す)、電場が角振動数 ω、波長 $\lambda = 2\pi/k$ (k は波数)、x 軸の方向に振幅 a_x を持っているとし、三角関数によって

$$E_x = a_x \cos(kz - \omega t) \tag{7}$$

とします。a_x は実数の定数です。これは波動方程式に入れれば

$$\frac{\beta_m}{\alpha}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} a_x \cos(kz - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 a_x \cos(kz - \omega t)$$

すでに見たように、角振動数と波数の関係 $ck = \omega$ を入れれば波動方程式を満たすのが分かります。同様に他の成分を与えて

$$E_x = a_x \cos(kz - \omega t)\ ,\ E_y = a_y \cos(kz - \omega t)\ ,\ E_z = a_z \cos(kz - \omega t)$$

$$B_x = b_x \cos(kz - \omega t)\ ,\ B_y = b_y \cos(kz - \omega t)\ ,\ B_z = b_z \cos(kz - \omega t)$$

とします。マクスウェル方程式 (1a),(1b) に入れれば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial}{\partial z} a_z \cos(kz - \omega t) = -k a_z \sin(kz - \omega t) = 0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \frac{\partial}{\partial z} b_z \cos(kz - \omega t) = -k b_z \sin(kz - \omega t) = 0$$

なので、$a_z = b_z = 0$ となり、電場と磁場の z 成分は 0 です。z 方向に変化していないので、横波と分かります。そして、これらは

$$\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{B})_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}=kb_y\sin(kz-\omega t)\\
(\nabla\times\boldsymbol{B})_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}=-kb_x\sin(kz-\omega t)\\
\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \omega a_x\sin(kz-\omega t)\\
\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \omega a_y\sin(kz-\omega t)
\end{aligned}$$

となっているので、(1d) に入れると

$$\begin{aligned}
kb_y\sin(kz-\omega t)&=\frac{\beta}{\alpha}\omega a_x\sin(kz-\omega t)\ \Rightarrow\ kb_y=\frac{\beta}{\alpha}\omega a_x\\
-kb_x\sin(kz-\omega t)&=\frac{\beta}{\alpha}\omega a_y\sin(kz-\omega t)\ \Rightarrow\ -kb_x=\frac{\beta}{\alpha}\omega a_y
\end{aligned}$$

よって

$$b_x=-\frac{c\beta}{\alpha}a_y\ ,\ b_y=\frac{c\beta}{\alpha}a_x\ ,\ b_z=0\qquad(ck=\omega)\tag{8}$$

これを $\boldsymbol{z}=(0,0,1)$ を使って書くと

$$\boldsymbol{b}=\frac{c\beta}{\alpha}(\boldsymbol{z}\times\boldsymbol{a})\quad(\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\ ,\ \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z))$$

$\boldsymbol{z}$ は z 軸の単位ベクトルなので、$\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{a}$ のベクトル積が $\boldsymbol{b}$ になることは、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交していることを意味します。つまり、電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ が直交しています。このように、電磁波は横波であり、電場と磁場は直交するという性質を持ちます。

(8) (もしくは (3a),(3b),(5),(6)) から

$$\begin{aligned}
&E_x(z,t)=a_x\cos(kz-\omega t)\ ,\ E_y(z,t)=a_y\cos(kz-\omega t)\\
&B_x(z,t)=-\frac{c\beta}{\alpha}a_y\cos(kz-\omega t)\ ,\ B_y(z,t)=\frac{c\beta}{\alpha}a_x\cos(kz-\omega t)
\end{aligned}$$

なので

$$E_x(z,t)=\frac{\alpha}{c\beta}B_y(z,t)\ ,\ E_y(z,t)=-\frac{\alpha}{c\beta}B_x(z,t)$$

このとき電場と磁場が直交する解として、$a_x=0$ か $a_y=0$ が任意に選べます (これが自由度 2 に対応)。例えば、$a_y=0$ とすれば E_y,B_x は 0 となり、電磁波の振動は電場が x 方向、磁場が y 方向になります。電場は xy 平面上にいるので、x,y 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y$ とすれば

$$\boldsymbol{E} = a_x \cos(kz - \omega t)\boldsymbol{e}_x + a_y \cos(kz - \omega t)\boldsymbol{e}_y$$

と書けます。

しかし、より一般的には cos に初期位相の任意性があるので、それを C_x, C_y として加えて

$$\boldsymbol{E} = a_x \cos(kz - \omega t - C_x)\boldsymbol{e}_x + a_y \cos(kz - \omega t - C_y)\boldsymbol{e}_y$$

E_x, E_y は加法定理から

$$E_x = a_x \cos(kz - \omega t - C_x) = a_x(\cos(kz - \omega t)\cos C_x + \sin(kz - \omega t)\sin C_x)$$
$$E_y = a_y(\cos(kz - \omega t)\cos C_y + \sin(kz - \omega t)\sin C_y)$$

これらから

$$\begin{aligned}\frac{E_x}{a_x}\sin C_y - \frac{E_y}{a_y}\sin C_x &= (\cos(kz - \omega t)\cos C_x + \sin(kz - \omega t)\sin C_x)\sin C_y \\ &\quad - (\cos(kz - \omega t)\cos C_y + \sin(kz - \omega t)\sin C_y)\sin C_x \\ &= \cos(kz - \omega t)(\cos C_x \sin C_y - \sin C_x \cos C_y) \\ &= \cos(kz - \omega t)\sin(C_y - C_x)\end{aligned}$$

同じように

$$\begin{aligned}\frac{E_y}{a_y}\cos C_x - \frac{E_x}{a_x}\cos C_y &= \cos(kz - \omega t)\cos C_x \cos C_y + \sin(kz - \omega t)\sin C_y \cos C_x \\ &\quad - (\cos(kz - \omega t)\cos C_x \cos C_y + \sin(kz - \omega t)\sin C_x \cos C_y) \\ &= \sin(kz - \omega t)(\sin C_y \cos C_x - \sin C_x \cos C_y) \\ &= \sin(kz - \omega t)\sin(C_y - C_x)\end{aligned}$$

2 乗して合わせると

$$\begin{aligned}&(\frac{E_x}{a_x}\sin C_y - \frac{E_y}{a_y}\sin C_x)^2 + (\frac{E_y}{a_y}\cos C_x - \frac{E_x}{a_x}\cos C_y)^2 \\ &= \cos^2(kz - \omega t)\sin^2(C_y - C_x) + \sin^2(kz - \omega t)\sin^2(C_y - C_x) \\ &= \sin^2(C_y - C_x)\end{aligned}$$

左辺は

$$
\begin{aligned}
(\frac{E_x}{a_x}\sin C_y - \frac{E_y}{a_y}\sin C_x)^2 + (\frac{E_y}{a_y}\cos C_x - \frac{E_x}{a_x}\cos C_y)^2 &= (\frac{E_x}{a_x})^2\sin^2 C_y + (\frac{E_y}{a_y})^2\sin^2 C_x - 2\frac{E_xE_y}{a_xa_y}\sin C_x\sin C_y \\
&\quad + (\frac{E_y}{a_y})^2\cos^2 C_x + (\frac{E_x}{a_x})^2\cos^2 C_y - 2\frac{E_xE_y}{a_xa_y}\cos C_x\cos C_y \\
&= (\frac{E_x}{a_x})^2 + (\frac{E_y}{a_y})^2 - 2\frac{E_xE_y}{a_xa_y}(\sin C_x\sin C_y + \cos C_x\cos C_y) \\
&= (\frac{E_x}{a_x})^2 + (\frac{E_y}{a_y})^2 - 2\frac{E_xE_y}{a_xa_y}\cos(C_y - C_x)
\end{aligned}
$$

なので

$$(\frac{E_x}{a_x})^2 + (\frac{E_y}{a_y})^2 - 2\frac{E_xE_y}{a_xa_y}\cos(C_y - C_x) = \sin^2(C_y - C_x)$$

$C_y - C_x = \pi/2$ で通常の楕円の式になり

$$(\frac{E_x}{a_x})^2 + (\frac{E_y}{a_y})^2 = 1$$

そして

$$\cos\theta = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{a_x}{|a|}\ ,\ \sin\theta = \frac{a_y}{|a|}$$

とすれば

$$(\frac{E_x}{a_x})^2 + (\frac{E_y}{a_y})^2 = \frac{1}{|a|^2\cos^2\theta}E_x^2 + \frac{1}{|a|^2\sin^2\theta}E_y^2$$

$\theta = \pi/4$ と選べば

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{|a|^2}E_x^2 + \frac{2}{|a|^2}E_y^2 &= 1 \\
E_x^2 + E_y^2 &= \frac{|a|^2}{2}
\end{aligned}
$$

となり、半径 $|a|/\sqrt{2}$ の円の式になります (より単純には $a_x = a_y$ の場合)。なので、$\boldsymbol{E}$ は時間経過で xy 平面上で回転します (z 方向を中心に螺旋になる)。これを円偏光 (circular polarization) と言います。これは $\boldsymbol{E}$ を見ると分かりやすいです。$C_x = 0,\ C_y = \pi/2$ として

$$\boldsymbol{E} = a_x\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_x + a_y\sin(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_y$$

極座標 (r,ϕ) での位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ の関係

$$\boldsymbol{r} = r\cos\phi\boldsymbol{e}_x + r\sin\phi\boldsymbol{e}_y$$

と同じなので、円の半径になるように

$$\cos\theta = \frac{a_x}{|a|}\ ,\ \sin\theta = \frac{a_y}{|a|}$$

として、$\theta = \pi/4$ と選ぶことで

$$\boldsymbol{E} = |a|(\cos\theta\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_y) = \frac{|a|}{\sqrt{2}}(\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_x + \sin(kz-\omega t)\boldsymbol{e}_y)$$

となり、円のベクトルの式になるのが分かります。$\boldsymbol{e}_y$ の項の符号を反転させれば逆回転になります。
　また、$C_y - C_x = 0$ なら

$$(\frac{E_x}{a_x} - \frac{E_y}{a_y})^2 = 0$$
$$E_y = \frac{a_y}{a_x}E_x$$

として、直線の関係になります。このときは

$$\boldsymbol{E} = a_x\cos(kz-\omega t-C)\boldsymbol{e}_x + a_y\cos(kz-\omega t-C)\boldsymbol{e}_y \quad (C = C_x = C_y)$$

となり、直線偏光 (linear polarization) や xy 平面に偏光していると言われます。このような話は、今のように x, y 方向の振動が同じ振動数 ω で与えられる波に対して使われます。
　最後に、電磁波のエネルギーと運動量を求めてみます。電磁場のエネルギー密度 u は

$$u = \frac{1}{8\pi}(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\beta_b\beta}\boldsymbol{B}^2)$$

から

$$\boldsymbol{E}^2 = E_x^2(z,t) + E_y^2(z,t) = \frac{\alpha^2}{c^2\beta^2}(B_x^2(z,t) + B_y^2(z,t)) = \frac{\alpha^2}{c^2\beta^2}\boldsymbol{B}^2$$

なので

$$u = \frac{1}{8\pi}(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\beta_b\beta}\frac{c^2\beta^2}{\alpha^2}\boldsymbol{E}^2) = \frac{1}{8\pi}(\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{E}^2 + \frac{c^2}{\alpha}\frac{\beta_m}{\alpha}\boldsymbol{E}^2) = \frac{1}{4\pi\alpha}\boldsymbol{E}^2 = \frac{1}{4\pi\beta_b\beta}\boldsymbol{B}^2$$

となり、これが電磁波が持つエネルギー密度です。ポインティングベクトルは (a_x, a_y はどちらかを 0 にできる)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi\beta}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) &= \frac{1}{4\pi\beta}(0, 0, E_xB_y - E_yB_x)\\ &= \frac{1}{4\pi\beta}(\frac{c\beta}{\alpha}a_x^2\cos^2(kz-\omega t) + \frac{c\beta}{\alpha}a_y^2\cos^2(kz-\omega t))\boldsymbol{z} \quad (\boldsymbol{z} = (0,0,1))\\ &= \frac{c}{4\pi\alpha}(a_x^2 + a_y^2)\boldsymbol{z}\cos^2(kz-\omega t)\end{aligned}$$

u は

$$u = \frac{1}{4\pi\alpha}\boldsymbol{E}^2 = \frac{1}{4\pi\alpha}(a_x^2 + a_y^2)\cos^2(kz-\omega t)$$

なので

$$\boldsymbol{S} = cu\boldsymbol{z}$$

と書けます。また、$\beta_m\boldsymbol{S}/\alpha$ とすれば運動量密度と見ることもできます。

最後に、電磁波は単振動 (調和振動子) の解を持つことを示しておきます。これは t と $\boldsymbol{x}$ の依存性が分離した解を求めることで分かります。依存性が分離しているので、解の形は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = A_1(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \ , \ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = A_2(t)\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$$

とします。波動方程式に入れた方が早いですが、マクスウェル方程式を使った場合を先に行います。マクスウェル方程式の (1c) に入れれば

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\\ \nabla\times(A_1(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) &= -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial}{\partial t}(A_2(t)\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}))\\ A_1(t)(\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) &= -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_2(t)}{\partial t}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

分かりやすくするためにベクトルの成分で分けて書けば

$$A_1(t)(\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))_x = -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_2(t)}{\partial t}G_x(\boldsymbol{x})$$
$$A_1(t)(\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))_y = -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_2(t)}{\partial t}G_y(\boldsymbol{x})$$
$$A_1(t)(\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))_z = -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_2(t)}{\partial t}G_z(\boldsymbol{x})$$

なので、i が x,y,z を表すとして

$$\begin{aligned} A_1(t)(\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))_i &= -\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial A_2(t)}{\partial t}G_i(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{\beta_b}\frac{1}{A_1(t)}\frac{\partial A_2(t)}{\partial t} &= -\frac{(\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))_i}{G_i(\boldsymbol{x})} \end{aligned} \tag{9}$$

左辺は時間のみ、右辺は座標のみに分かれています。別の依存性をしているものが両辺にあるので、その結果は定数でなくてはいけません (左辺の変数が t のみなので、右辺に変数 $\boldsymbol{x}$ が現れてはいけなく、当然その逆もいけない)。なので、その定数を C として

$$\frac{1}{\beta_b}\frac{1}{A_1(t)}\frac{\partial A_2(t)}{\partial t} = C\ ,\ -\frac{(\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))_i}{G_i(\boldsymbol{x})} = C$$

となり

$$\frac{\partial A_2(t)}{\partial t} = \beta_b C A_1(t)\ ,\ (\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))_i = -CG_i(\boldsymbol{x}) \quad (\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -C\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) \tag{10}$$

次にマクスウェル方程式の (1d) に入れてみると

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} \\ \nabla\times(A_2(t)\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) &= \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}(A_1(t)\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) \\ A_2(t)(\nabla\times\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})) &= \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial A_1(t)}{\partial t}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

ここに (10) を入れれば

$$A_2(t)(\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))) = -\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\beta_b}\frac{\partial^2 A_2(t)}{\partial t^2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

左辺にはベクトルの計算

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = -\nabla^2 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

を使って

$$A_2(t)\nabla^2 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_2(t)}{\partial t^2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \quad (\frac{\beta_m}{\alpha} = \frac{1}{c^2})$$

というわけで、(9) と同じ話から、定数を D として

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_2(t)}{\partial t^2} = D^2 A_2(t) \ , \ \nabla^2 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = D^2 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

定数を D^2 としているのは後で見やすくするためです。今知りたいのは A_2 の方なので、$\boldsymbol{F}$ はこの方程式に従うというだけにして終わらせます。$A_1, \boldsymbol{G}$ とは (10) によって関係しています。

$A_2(t)$ はよくある微分方程式なので、すぐに

$$A_2(t) = e^{Dct}$$

という解があるのが分かります。しかし、$D > 0$ のとき、これは t の増加に対して単純に増加する解なので、電磁波の振動しているという解になっていません。なので、定数の符号を反転させて

$$\frac{\partial^2 A_2(t)}{\partial t^2} = -D^2 c^2 A_2(t)$$

として、A_2 の解が

$$A_2(t) = a\cos(Dct + \Phi)$$

と与えられるようにします (a, Φ は定数)。これと、単振動の方程式と解

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 x(t) \ , \ x(t) = a\cos(\omega t + \Phi)$$

は同じです。よって、電場と磁場の時間依存部分は単振動と同じことから、電磁波は単振動の集まりと言えます (固定された空間部分 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{G}(x)$ に対して)。また、空間部分をベクトルにしていることから予想できるように、偏光による性質は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{G}(x)$ に入ってきます。

波動方程式を使うなら (磁場でも同じなので電場だけ見ます)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_i(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 E_i(\boldsymbol{x}, t)$$

において、同様の解の形を入れれば

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_1(t)F_i(\boldsymbol{x})}{\partial t^2} &= \nabla^2(A_1(t)F_i(\boldsymbol{x})) \\
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_1(t)}{\partial t^2}F_i(\boldsymbol{x}) &= A_1(t)\nabla^2 F_i(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

となるので、すぐに

$$
\frac{\partial^2 A_1(t)}{\partial t^2} = -D^2c^2A_1\ ,\ \nabla^2 F_i(\boldsymbol{x}) = -DF_i(\boldsymbol{x})
$$

が得られます。