

## 放射

動く点電荷による電磁場のエネルギーを見ていきます。  
一定速度で動いている場合も最後に求めています。

電荷  $Q$  の速度  $v$  で動く点電荷による電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha Q |\mathbf{R}|}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{R})^3} (c^2 \mathbf{u} (1 - \frac{v^2}{c^2}) + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_r})) \quad (1)$$

$$\mathbf{R}(t_r) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t_r), \quad t = t_r + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t_r)|}{c}, \quad \mathbf{u} = c(\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} - \frac{\mathbf{v}}{c}), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{R} = c|\mathbf{R}| - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}$$

これは現在の時間  $t$  での位置  $\mathbf{r}$  の電場で、右辺の時間依存性は遅延時間  $t_r$  で与えられています。 $\mathbf{r}_c$  は点電荷の位置、 $\mathbf{R}(t_r) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t_r)$  は遅延時間  $t_r$  での点電荷の位置から位置  $\mathbf{r}$  の点に向かうベクトルです。遅延時間  $t_r$  での点電荷からの影響が現在の時間  $t$  で観測されることに注意してください。

磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta_b}{c} \frac{\mathbf{R}(t_r) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{R}(t_r)|}$$

となっています。

表記を簡単にするために

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}, \quad \eta = \frac{|\mathbf{v}|}{c}, \quad \gamma_n = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c|\mathbf{R}|} = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}$$

$$\mathbf{u} = c \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} - \mathbf{v} = c\mathbf{n} - \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{R} = c|\mathbf{R}| - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} = c|\mathbf{R}|(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c|\mathbf{R}|}) = c|\mathbf{R}|\gamma_n$$

とします。 $|\mathbf{v}|/c$  は  $\beta$  が多く使われますが比例定数との兼ね合いで  $\eta$  を使っています

点電荷の運動による電磁場のエネルギーの流れを見るためにポインティングベクトル  $\mathbf{S}$  を導入します。ポインティングベクトルは単位時間で単位面積を通過する電磁場のエネルギーで

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\beta} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

と定義され、今の場合は

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{1}{4\pi\beta} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{4\pi\beta} \frac{\beta_b}{c} \frac{1}{|\mathbf{R}(t_r)|} (\mathbf{E} \times (\mathbf{R}(t_r) \times \mathbf{E})) \\ &= \frac{1}{4\pi c \beta_m} (|\mathbf{E}|^2 \frac{\mathbf{R}(t_r)}{|\mathbf{R}(t_r)|} - \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{R}(t_r)}{|\mathbf{R}(t_r)|} \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{4\pi c \beta_m} (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{n} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E}) \end{aligned} \quad (2)$$

電場 (1) の第 1 項を  $E_0$ 、第 2 項を  $E_{\text{rad}}$  とすれば、 $E_0$  を  $|R|^{-2}$  に比例する項、 $E_{\text{rad}}$  を  $|R|^{-1}$  に比例する項です。そうすると、 $E_0$  の 2 乗では  $|R|^{-4}$ 、 $E_{\text{rad}}$  の 2 乗では  $|R|^{-2}$ 、 $E_0 E_{\text{rad}}$  では  $|R|^{-3}$  に比例します。このことと、ポインティングベクトルは単位時間で単位面積を通過する電磁場のエネルギーということを含ませます。

点電荷を半径  $|R|$  の球で囲んだとき、球の表面積は  $4\pi|R|^2$  なので、その球の表面全体におけるポインティングベクトルの  $|R|$  依存性は大雑把に、 $E_0$  の 2 乗では  $1/|R|^2$ 、 $E_0 E_{\text{rad}}$  では  $1/|R|$ 、 $E_{\text{rad}}$  の 2 乗では 1 となります。このため、 $|R|$  を大きく取っても残る寄与は  $E_{\text{rad}}$  から来ています。というわけで、エネルギーの流れにおいて  $E_0$  は点電荷の近くで減少する寄与、 $E_{\text{rad}}$  は遠くまで届く寄与と言えます。遠くまで届くエネルギーの流れを放射 (radiation) と呼び、 $E_{\text{rad}}$  は加速度を含むので点電荷が加速しているときに放射は起きます。 $E_{\text{rad}}$  は放射場 (radiation field) と呼ばれます。

$E_{\text{rad}}$  は

$$\begin{aligned} E_{\text{rad}} &= \frac{\alpha Q |R|}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{R})^3} (\mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})) \quad (\mathbf{a}(t_r) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_r}) \\ &= \frac{\alpha Q |R|^2}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{R})^3} (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})) \\ &= \frac{\alpha Q |R|^2}{c^2 \gamma_n^3 |\mathbf{R}|^3} (\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a})) \\ &= \frac{\alpha Q}{c^2 \gamma_n^3 |\mathbf{R}|} (\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a})) \end{aligned} \quad (3)$$

$E_{\text{rad}}$  と  $\mathbf{n}$  の内積は

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})) = (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{n}) = 0$$

なので、電場と  $\mathbf{n}$  は直交しています ( $E_{\text{rad}}$  は観測地点の方向に対して垂直)。磁場の方向は  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$  なので、

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{n}) = 0$$

から磁場も直交します。これは電場と磁場は電磁波の進行方向に直交しているという関係そのものです。

$E_{\text{rad}} \cdot \mathbf{n} = 0$  なので、放射場のポインティングベクトルは (2) から

$$\mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi c \beta_m} |E_{\text{rad}}|^2 \mathbf{n}$$

(3) を入れると

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{rad}} &= \frac{1}{4\pi c \beta_m} \frac{\alpha^2 Q^2}{c^4 \gamma_n^6 |\mathbf{R}|^2} |\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a})|^2 \mathbf{n} \\ &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3 \gamma_n^6 |\mathbf{R}|^2} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a}|^2 \mathbf{n} \quad (\frac{\alpha}{\beta_m} = c^2) \end{aligned}$$

点電荷の遅延時間での位置を原点とし半径  $|R(t_r)|$  の球で囲んだとき、その球面  $S$  を垂直に通過する放射場でのポインティングベクトルの量は球面  $S$  での面積分によって

$$P_{\text{rad}}(t) = \int_S ds \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}}$$

と与えられ、加速している点電荷から単位時間あたりに放射されるエネルギーとされます。微小な立体角  $\Delta\Omega$  は  $\Delta\Omega = \sin\theta\Delta\theta\Delta\phi$  なので、角度積分を外せば

$$\Delta P_{\text{rad}} = |\mathbf{R}|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}} \sin\theta\Delta\theta\Delta\phi$$

から

$$\frac{dP_{\text{rad}}(t)}{d\Omega} = |\mathbf{R}|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} \frac{1}{\gamma_n^6} |\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a})|^2$$

となり、エネルギーの角度分布の形 (立体角あたりのエネルギー) になります。

放射を観測地点の現在の時間  $t$  で与えましたが、遅延時間  $t_r$  での点電荷のエネルギー損失とこれは一致しません。点電荷からの情報は点電荷の位置  $\mathbf{r}_c(t_r)$  から現在の時間  $t$  での観測地点  $\mathbf{r}$  へ有限の速度  $c$  で伝わるために、現在の時間と遅延時間に

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial t}{\partial t_r} \frac{d}{dt_r} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{R}}{c|\mathbf{R}|} \frac{d}{dt_r} = \gamma_n \frac{d}{dt_r}$$

という関係があるからです。このため、時間間隔  $\Delta t_r$  での点電荷の放射によるエネルギーの変化と観測地点での時間間隔  $\Delta t$  でのエネルギーでは  $\gamma_n$  による差が出ます。遅延時間での点電荷の放射による立体角でのエネルギーを  $\epsilon$  とし、その変化を  $\Delta\epsilon_r = \epsilon(t_r + \Delta t_r) - \epsilon(t_r)$  とすれば、 $dP_{\text{rad}}/d\Omega$  は単位時間あたりなので

$$\Delta\epsilon_r = \frac{dP_{\text{rad}}(t_r)}{d\Omega} \Delta t_r$$

$\gamma_n$  は角度依存性を持つので立体角あたりの量にしています。現在の時間でのエネルギー変化  $\Delta\epsilon = \epsilon(t + \Delta t) - \epsilon(t)$  は

$$\Delta\epsilon = \frac{dP_{\text{rad}}(t)}{d\Omega} \Delta t$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{rad}}(t_r)}{d\Omega} &= \frac{d\epsilon_r}{dt_r} = \frac{\partial t}{\partial t_r} \frac{d\epsilon}{dt} = \gamma_n \frac{d\epsilon}{dt} = \gamma_n \frac{dP_{\text{rad}}(t)}{d\Omega} \\ \frac{dP_{\text{rad}}(t_r)}{d\Omega} &= \gamma_n \frac{dP_{\text{rad}}(t)}{d\Omega} \end{aligned}$$

となり

$$\frac{dP_{\text{rad}}(t_r)}{d\Omega} = \gamma_n \frac{dP_{\text{rad}}(t)}{d\Omega} = \gamma_n |\mathbf{R}|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} \frac{1}{\gamma_n^5} |\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a})|^2$$

と書けます。遅延時間での放射のエネルギーのほうが便利なので (特殊相対性理論との対応も取れる)、こちらを使うことが多いです。

$v$  が光速  $c$  に比べて十分小さいと近似してみます。  $v/c \simeq 0$  とするので

$$\gamma_n = (1 - \frac{v \cdot n}{c}) \simeq 1, \quad u = c \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} - \mathbf{v} = c(\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \simeq c\mathbf{n}$$

これから、電場は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\alpha Q}{c^2 \eta^3 |\mathbf{R}|} (\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a})) \\ &\simeq \frac{\alpha Q}{c^2 |\mathbf{R}|} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})) \\ &= \frac{\alpha Q}{c^2 |\mathbf{R}|} (\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}) \end{aligned}$$

括弧部分の 2 乗は

$$\begin{aligned} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})|^2 &= |\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2 + |\mathbf{a}|^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta) \\ &= |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \tag{4}$$

なので

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{rad}} &= \frac{1}{4\pi c \beta_m} (\frac{\alpha Q}{c^2 |\mathbf{R}|})^2 |\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}|^2 \mathbf{n} = \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} \frac{|\mathbf{a}(t_r)|^2}{|\mathbf{R}(t_r)|^2} \mathbf{n} \sin^2 \theta \\ \frac{dP(t)}{d\Omega} &= |\mathbf{R}|^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

角度積分は簡単にできて ( $\gamma_n = 1$  なので  $P(t_r), P(t)$  は同じ)

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}}(t) &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} |\mathbf{a}|^2 \int d\Omega \sin^2 \theta = \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} |\mathbf{a}|^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2 \theta \\ &= \frac{\alpha Q^2}{2c^3} |\mathbf{a}|^2 \left[ \frac{1}{12} \cos 3\theta - \frac{3}{4} \cos \theta \right]_0^\pi \\ &= \frac{\alpha Q^2}{2c^3} |\mathbf{a}|^2 \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} \frac{\alpha Q^2}{c^3} |\mathbf{a}|^2 \end{aligned}$$

これをラーモア (Larmor) の公式と言い、光速に比べて十分遅い速度での単位時間あたりに放射されるエネルギーです。

- 速度と加速度が平行の場合

直線上を点電荷が動いている場合の放射のエネルギーを求めます。電場は、 $v$  と  $a$  が平行なので

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\alpha Q}{c^2 \gamma_n^3 |\mathbf{R}|} (\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{a})) = \frac{\alpha Q}{c^2 \gamma_n^3 |\mathbf{R}|} (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})) \\ &= \frac{\alpha Q}{c^2 \gamma_n^3 |\mathbf{R}|} (\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})) \\ &= \frac{\alpha Q}{c^2 \gamma_n^3 |\mathbf{R}|} (\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}) \end{aligned}$$

$\gamma_n$  は、 $v$  は  $a$  の方向なので  $a$  と  $n$  の間の角度  $\theta$  によって

$$\gamma_n = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} = 1 - \frac{|\mathbf{v}|}{c} \cos \theta = 1 - \eta \cos \theta$$

電場の括弧部分の 2 乗は (4) なので

$$\begin{aligned} S_{\text{rad}} &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \eta \cos \theta)^6} \frac{|\mathbf{a}(t_r)|^2}{|\mathbf{R}(t_r)|^2} \mathbf{n}(t_r) \sin^2 \theta \\ \frac{dP(t_r)}{d\Omega} &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} \frac{|\mathbf{a}|^2}{(1 - \eta \cos \theta)^5} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$\eta \simeq 1$  では

$$\frac{1}{\gamma_n^5} |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \theta \Rightarrow \frac{|\mathbf{a}|^2}{(1 - \cos \theta)^5} \sin^2 \theta$$

$(1 - \cos \theta)^{-5}$  のために、速度が光速に近づくにつれて放射のエネルギーは急激に増加し、点電荷の進行方向 (小さい  $\theta$ ) 付近に偏っていきます。

角度積分は、 $a$  方向を軸として  $n$  との間の角度  $\theta$  を極座標の角度  $(\theta, \phi)$  に当てはめて

$$\begin{aligned} P(t_r) &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} |\mathbf{a}|^2 \int d\Omega \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \eta \cos \theta)^5} \\ &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} |\mathbf{a}|^2 \int_0^\theta d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \eta \cos \theta)^5} \\ &= \frac{\alpha Q^2}{2c^3} |\mathbf{a}|^2 \int_0^\theta d\theta \frac{\sin^3 \theta}{(1 - \eta \cos \theta)^5} \\ &= -\frac{\alpha Q^2}{2c^3} |\mathbf{a}|^2 \int_1^{-1} dz \frac{1 - z^2}{(1 - \eta z)^5} \quad (z = \cos \theta, \quad dz = -\sin \theta d\theta) \\ &= -\frac{\alpha Q^2}{2c^3} |\mathbf{a}|^2 \int_1^{-1} dz \left( \frac{1}{(1 - \eta z)^5} - \frac{z^2}{(1 - \eta z)^5} \right) \end{aligned}$$

積分は

$$\begin{aligned}
\int_1^{-1} dz \frac{1}{(1-\eta z)^5} &= -\frac{1}{\eta} \int_{c_-}^{c_+} dc \frac{1}{c^5} = \frac{1}{4} \frac{1}{\eta} \left[ \frac{1}{c^4} \right]_{c_-}^{c_+} \quad (c = 1 - \eta z, \quad dc = -\eta dz, \quad c_{\pm} = 1 \pm \eta z) \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{c_+^4} - \frac{1}{c_-^4} \right) \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{\eta} \frac{(1-\eta)^4 - (1+\eta)^4}{(1-\eta^2)^4} \\
&= -\frac{1}{4} \frac{1}{\eta} \frac{8\eta + 8\eta^3}{(1-\eta^2)^4} \\
&= -\frac{2}{\eta} \frac{\eta + \eta^3}{(1-\eta^2)^4} \tag{5}
\end{aligned}$$

もう 1 つの積分は

$$\begin{aligned}
\int_1^{-1} dz \frac{z^2}{(1-\eta z)^5} &= -\frac{1}{\eta^3} \int_{c_-}^{c_+} dc \frac{(c-1)^2}{c^5} = -\frac{1}{\eta^3} \int_{c_-}^{c_+} dc \left( \frac{1}{c^3} - \frac{2}{c^4} + \frac{1}{c^5} \right) \\
&= \frac{1}{\eta^3} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{c^4} \right]_{c_-}^{c_+}
\end{aligned}$$

第 1 項と第 2 項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_+^2} - \frac{1}{c_-^2} &= \frac{1}{(1+\eta)^2} - \frac{1}{(1-\eta)^2} = \frac{(1-\eta)^2 - (1+\eta)^2}{(1-\eta^2)^2} = -4 \frac{\eta}{(1-\eta^2)^2} \\
\frac{1}{c_+^3} - \frac{1}{c_-^3} &= \frac{(1-\eta)^3 - (1+\eta)^3}{(1-\eta^2)^3} = -\frac{6\eta + 2\eta^3}{(1-\eta^2)^3} = -2 \frac{3\eta + \eta^3}{(1-\eta^2)^3}
\end{aligned} \tag{6}$$

なので、 $(1-\eta^2)^{-3}$  の分子は

$$-2\eta(1-\eta^2) + \frac{4}{3}(3\eta + \eta^3) = -2\eta + 2\eta^3 + 4\eta + \frac{4}{3}\eta^3 = 2\eta + \frac{10}{3}\eta^3$$

第 3 項と合わせると、 $(1-\eta^2)^{-4}$  の分子は

$$\begin{aligned}
\eta(2 + \frac{10}{3}\eta^2)(1-\eta^2) - 2(\eta + \eta^3) &= \eta(2 - 2\eta^2 + \frac{10}{3}\eta^2 - \frac{10}{3}\eta^4) - 2\eta(1 + \eta^2) \\
&= (2\eta + \frac{4}{3}\eta^3 - \frac{10}{3}\eta^5) - (2\eta + 2\eta^3) \\
&= -\frac{2}{3}(\eta^3 + 5\eta^5)
\end{aligned}$$

(5) と合わせて

$$\begin{aligned}
 \int_1^{-1} dz \left( \frac{1}{(1-\eta z)^5} - \frac{z^2}{(1-\eta z)^5} \right) &= -\frac{2}{\eta} \frac{\eta + \eta^3}{(1-\eta^2)^4} + \frac{2}{3} \frac{1}{\eta^3} \frac{\eta^3 + 5\eta^5}{(1-\eta^2)^4} \\
 &= -\frac{2}{3} \frac{1}{\eta^3} \left( \frac{3\eta^3 + 3\eta^5}{(1-\eta^2)^4} - \frac{\eta^3 + 5\eta^5}{(1-\eta^2)^4} \right) \\
 &= -\frac{4}{3} \frac{1}{(1-\eta^2)^3}
 \end{aligned} \tag{7}$$

となり、点電荷が直線運動しているときの放射のエネルギーは

$$P(t_r) = \frac{2\alpha Q^2}{3c^3} \frac{|\mathbf{a}|^2}{(1-\eta^2)^3} = \frac{2\alpha Q^2}{3c^3} \gamma^6 |\mathbf{a}|^2 \quad \left( \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \right) \tag{8}$$

と求まります。

このように、点電荷が直線運動しているときでは加速度の依存性は  $|\mathbf{a}|^2$  なので、放射のエネルギーは  $\mathbf{a}$  の符号と無関係です。このため、減速でも放射が生じます。このことは電子を金属に当てたとき電子が減速し放射が生じる現象に対応し、制動放射 (制動輻射、bremsstrahlung) と呼ばれます。

- 速度と加速度が直交している場合

点電荷の位置を原点にし、座標軸を  $x_1, x_2, x_3$  として、この瞬間の  $\mathbf{v}$  を  $x_3$  方向、 $\mathbf{a}$  を  $x_1$  方向に取ります。極座標  $(|\mathbf{R}|, \theta, \phi)$  を使うと、 $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{n}$  の間の角度は  $\theta$  なので

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{v}| \cos \theta$$

$\mathbf{a}$  と  $\mathbf{n}$  の内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = (|\mathbf{a}|, 0, 0) \cdot (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = |\mathbf{a}| \sin \theta \cos \phi$$

電場でのベクトル積

$$\mathbf{n} \times \left( \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{a} \right)$$

を今の場合に合わせれば、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  を  $x_1, x_2$  方向の単位ベクトルとして

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} = \mathbf{n}|\mathbf{a}| \sin \theta \cos \phi - \mathbf{a} = |\mathbf{a}|(\mathbf{n} \sin \theta \cos \phi - \mathbf{e}_1)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) = |\mathbf{v}||\mathbf{a}|(\mathbf{n} \times \mathbf{e}_2)$$

$\mathbf{n}$  は  $R$  方向の単位ベクトルなので、極座標での単位ベクトル  $\mathbf{n}, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  との関係

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n} \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{n} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\phi, \quad \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{n} = \mathbf{e}_\theta$$

から

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \sin \theta \cos \phi - \mathbf{e}_1 &= \mathbf{n} \sin \theta \cos \phi - \mathbf{e}_r \sin \theta \cos \phi - \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\phi \sin \phi \\ &= -\mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\phi \sin \phi \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \phi) = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_\theta \cos \theta \sin \phi + \mathbf{n} \times \mathbf{e}_\phi \cos \phi \\ &= \mathbf{e}_\phi \cos \theta \sin \phi - \mathbf{e}_\theta \cos \phi \end{aligned}$$

となり、極座標の単位ベクトルによって

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \left( \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \times \mathbf{a} \right) &= |\mathbf{a}| (\mathbf{n} \sin \theta \cos \phi - \mathbf{e}_1) - \frac{|\mathbf{v}|}{c} |\mathbf{a}| (\mathbf{n} \times \mathbf{e}_2) \\ &= |\mathbf{a}| (-\mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\phi \sin \phi - \eta (-\mathbf{e}_\theta \cos \phi + \mathbf{e}_\phi \cos \theta \sin \phi)) \\ &= |\mathbf{a}| (-\mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\phi \sin \phi + \eta \mathbf{e}_\theta \cos \phi - \eta \mathbf{e}_\phi \cos \theta \sin \phi) \\ &= |\mathbf{a}| (\mathbf{e}_\theta (\eta - \cos \theta) \cos \phi + \mathbf{e}_\phi (1 - \eta \cos \theta) \sin \phi) \end{aligned}$$

と書けて

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha Q}{c^2 \gamma_n^3 |\mathbf{R}|} (\mathbf{e}_\theta (\eta - \cos \theta) \cos \phi + \mathbf{e}_\phi (1 - \eta \cos \theta) \sin \phi)$$

$\gamma_n$  は

$$\gamma_n = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} = 1 - \frac{|\mathbf{v}|}{c} \cos \theta = 1 - \eta \cos \theta$$

となっています。電場の 2 乗では

$$\begin{aligned}
|\mathbf{e}_\theta(\eta - \cos \theta) \cos \phi + \mathbf{e}_\phi(1 - \eta \cos \theta) \sin \phi|^2 &= (\eta - \cos \theta)^2 \cos^2 \phi + (1 - \eta \cos \theta)^2 \sin^2 \phi \\
&= (\eta - \cos \theta)^2 \cos^2 \phi + (1 - \eta \cos \theta)^2 (1 - \cos^2 \phi) \\
&= ((\eta - \cos \theta)^2 - (1 - \eta \cos \theta)^2) \cos^2 \phi + (1 - \eta \cos \theta)^2 \\
&= (\eta^2 + \cos^2 \theta - 1 - \eta^2 \cos^2 \theta) \cos^2 \phi + (1 - \eta \cos \theta)^2 \\
&= (-(1 - \eta^2) + (1 - \eta^2) \cos^2 \theta) \cos^2 \phi + (1 - \eta \cos \theta)^2 \\
&= -(1 - \eta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi + (1 - \eta \cos \theta)^2
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
S_{\text{rad}} &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} \frac{|\mathbf{a}|^2}{|\mathbf{R}|^2} \frac{1}{(1 - \eta \cos \theta)^6} ((1 - \eta \cos \theta)^2 - (1 - \eta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \mathbf{n} \\
\frac{dP(t_r)}{d\Omega} &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} \frac{|\mathbf{a}|^2}{(1 - \eta \cos \theta)^5} ((1 - \eta \cos \theta)^2 - (1 - \eta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi)
\end{aligned}$$

角度積分は

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{(1 - \eta \cos \theta)^5} ((1 - \eta \cos \theta)^2 - \gamma^{-2} \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \\
&= \pi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{1}{(1 - \eta \cos \theta)^5} (2(1 - \eta \cos \theta)^2 - \gamma^{-2} \sin^2 \theta) \\
&= -\pi \int_1^{-1} dz \frac{1}{(1 - \eta z)^5} (2(1 - \eta z)^2 - \gamma^{-2}(1 - z^2)) \quad (z = \cos \theta, \quad dz = -\sin \theta d\theta) \\
&= -2\pi \int_1^{-1} dz \frac{1}{(1 - \eta z)^3} + \pi \gamma^{-2} \int_1^{-1} dz \frac{1 - z^2}{(1 - \eta z)^5}
\end{aligned}$$

(6),(7) から

$$\begin{aligned}
\int_1^{-1} dz \frac{1}{(1 - \eta z)^3} &= \frac{-2}{(1 - \eta^2)^2} = -2\gamma^4 \\
\int_1^{-1} dz \frac{1 - z^2}{(1 - \eta z)^5} &= -\frac{4}{3} \frac{1}{(1 - \eta^2)^3} = -\frac{4}{3} \gamma^6
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
P(t_r) &= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} |\mathbf{a}|^2 \int d\Omega \frac{1}{\gamma_n^5} ((1 - \eta \cos \theta)^2 - (1 - \eta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi) \\
&= \frac{\alpha Q^2}{4\pi c^3} |\mathbf{a}|^2 (4\pi \gamma^4 - \frac{4}{3} \frac{\pi}{\gamma^2} \gamma^6) \\
&= \frac{2}{3} \frac{\alpha Q^2}{c^3} |\mathbf{a}|^2 \gamma^4
\end{aligned}$$

となります。

速度と加速度が直交しているときの重要な例がシンクロトロン放射 (synchrotron radiation) です。シンクロトロン放射は、ローレンツ力によって荷電粒子を曲げて円運動させたときに出る放射です。等速円運動では、半径を  $\rho$  として運動方程式から

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{\rho}$$

という関係を持ちます。

最後についてとして、加速していない場合 (放射のない場合) での電場の現在の時間による形を求めておきます。速度が一定なので、電場は加速度の項が消えて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha c^2 Q}{(\mathbf{u}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t_r))^3} |\mathbf{R}(t_r)| \mathbf{u}(t_r) (1 - \eta^2)$$

$t_r$  を  $t$  にします。原点から出発したとすれば  $\mathbf{r}_c(t_r) = \mathbf{v} t_r$  なので

$$\mathbf{R}(t_r) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t_r) = \mathbf{r} - \mathbf{v} t_r, \quad |\mathbf{R}(t_r)| = c(t - t_r)$$

これから

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r} - \mathbf{v} t_r| &= c(t - t_r) \\
|\mathbf{r} - \mathbf{v} t_r|^2 &= c^2(t - t_r)^2 \\
\mathbf{r}^2 + \mathbf{v}^2 t_r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} t_r &= c^2 t^2 + c^2 t_r^2 - 2c^2 t t_r \\
-(c^2 - \mathbf{v}^2) t_r^2 + 2(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) t_r + \mathbf{r}^2 - c^2 t^2 &= 0
\end{aligned}$$

$t_r$  は

$$t_r = \frac{c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \pm \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{r}^2 - c^2 t^2)}}{c^2 - \mathbf{v}^2}$$

と求まります。 $\mathbf{v} = 0$  のとき

$$t_r = \frac{c^2 t \pm \sqrt{(c^2 t)^2 + c^2(\mathbf{r}^2 - c^2 t^2)}}{c^2} = \frac{c^2 t \pm c|\mathbf{r}|}{c^2} = t \pm \frac{|\mathbf{r}|}{c}$$

なので、遅延時間と対応させるためにマイナスを選びます。 $t_r$  が  $t$  で書けたので

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{R} &= c|\mathbf{R}| - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \\ &= c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c| - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_c) \cdot \mathbf{v} \\ &= c^2(t - t_r) - (\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r) \cdot \mathbf{v} \\ &= c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - (c^2 - \mathbf{v}^2)t_r \\ &= c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - (c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{r}^2 - c^2 t^2)}) \\ &= \sqrt{(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{r}^2 - c^2 t^2)} \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} &(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - \mathbf{v}^2)(\mathbf{r}^2 - c^2 t^2) \\ &= (c^2 t)^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - 2c^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})t + c^2 \mathbf{r}^2 - c^4 t^2 - \mathbf{r}^2 \mathbf{v}^2 + c^2 \mathbf{v}^2 t^2 \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - \mathbf{r}^2 \mathbf{v}^2 + c^2(\mathbf{r}^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})t + \mathbf{v}^2 t^2) \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - \mathbf{r}^2 \mathbf{v}^2 + c^2|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|^2 \end{aligned}$$

とします。 $\mathbf{v}t$  は現在の時間  $t$  での点電荷の位置で、 $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t) = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$  です。 $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{R}(t)$  の間の角度を  $\theta$  として

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{v}t) &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v}^2 t \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v}^2 t &= |\mathbf{v}||\mathbf{r} - \mathbf{v}t| \cos \theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}^2 t)^2 - 2\mathbf{v}^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})t}{\mathbf{v}^2|\mathbf{R}(t)|^2} \end{aligned}$$

$\sin \theta$  は

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}^2 t)^2 - 2\mathbf{v}^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})t}{\mathbf{v}^2|\mathbf{R}(t)|^2} = \frac{\mathbf{v}^2|\mathbf{R}(t)|^2}{\mathbf{v}^2|\mathbf{R}(t)|^2} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}^2 t)^2 - 2\mathbf{v}^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})t}{\mathbf{v}^2|\mathbf{R}(t)|^2} \\ &= \frac{\mathbf{v}^2(\mathbf{r}^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})t + \mathbf{v}^2 t^2)}{\mathbf{v}^2|\mathbf{R}(t)|^2} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{v}^2 t)^2 - 2\mathbf{v}^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})t}{\mathbf{v}^2|\mathbf{R}(t)|^2} \\ &= -\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - \mathbf{r}^2 \mathbf{v}^2}{\mathbf{v}^2|\mathbf{R}(t)|^2} \end{aligned}$$

よって

$$1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta = 1 + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - r^2 v^2}{c^2 |\mathbf{R}(t)|^2} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - r^2 v^2 + c^2 |\mathbf{R}(t)|^2}{c^2 |\mathbf{R}(t)|^2}$$

となるので

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{R} = \sqrt{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 - r^2 v^2 + c^2 |\mathbf{R}(t)|^2} = c |\mathbf{R}(t)| \sqrt{1 - \eta^2 \sin^2 \theta}$$

そして、 $|\mathbf{R}|\mathbf{u}$  は

$$|\mathbf{R}|\mathbf{u} = c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t_r)) - |\mathbf{R}|\mathbf{v} = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r) - c(t - t_r)\mathbf{v} = c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$$

よって、電場は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\alpha c^2 Q}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{R})^3} |\mathbf{R}|\mathbf{u}(1 - \eta^2) \\ &= \frac{\alpha c^2 Q}{c^3 |\mathbf{r} - \mathbf{v}t|^3} \frac{c(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{(1 - \eta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} (1 - \eta^2) \\ &= \alpha Q \frac{\mathbf{R}(t)}{|\mathbf{R}(t)|^3} \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

電場は  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t)$  の方向を向いているので、点電荷から放射状に伸びていて、 $|\mathbf{R}(t)|^{-2}$  で減少していきます。sin は 0 から 90 度に向かって値が大きくなるので ( $\theta$  は  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{R}(t)$  の角度)、点電荷の進行方向から垂直な方向にいくにつれて電場は大きくなります。これは速度が  $c$  に近づくことでよりはっきりします。そして、 $\mathbf{v} = 0$  でクーロンの法則になります。

磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta_b}{c} \frac{\mathbf{R}(t_r) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{|\mathbf{R}(t_r)|}$$

これは

$$\frac{\mathbf{R}(t_r)}{|\mathbf{R}(t_r)|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_c(t_r)}{|\mathbf{R}(t_r)|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t_r}{|\mathbf{R}(t_r)|} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + (t - t_r)\mathbf{v}}{|\mathbf{R}(t_r)|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v}t}{|\mathbf{R}(t_r)|} + \frac{\mathbf{v}}{c}$$

から、 $\mathbf{E}$  の分子の  $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$  とで  $(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \times \mathbf{E} = 0$  となり

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta_b}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t))$$

となります。

$t_r$  を  $t$  の関数として求めましたが、 $\mathbf{R}(t_r)$  を  $\mathbf{R}(t)$  に置き換えるようにしたほうが簡単です。遅延時間での  $\mathbf{R}(t_r)$  と現在の時間での  $\mathbf{R}(t)$  とは ( $\mathbf{R}$  は点電荷の位置から位置  $\mathbf{r}$  の点へのベクトル)

$$\mathbf{R}(t_r) = \mathbf{R}(t) + \mathbf{v}(t - t_r) = \mathbf{R}(t) + \frac{1}{c}|\mathbf{R}(t_r)|\mathbf{v}$$

これと  $\mathbf{v}$  のベクトル積をとると

$$\mathbf{R}(t_r) \times \mathbf{v} = \mathbf{R}(t) \times \mathbf{v}$$

なので、 $\mathbf{R}(t_r), \mathbf{R}(t)$  と  $\mathbf{v}$  の角度をそれぞれ  $\theta_r, \theta$  とすれば

$$|\mathbf{R}(t_r) \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{R}(t_r)|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta_r = |\mathbf{R}(t_r)|^2 |\mathbf{v}|^2 (1 - \cos^2 \theta_r) = |\mathbf{R}(t_r)|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{R}(t_r) \cdot \mathbf{v})^2$$

$$|\mathbf{R}(t) \times \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{R}(t)|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{R}(t)|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{v})^2$$

から

$$|\mathbf{R}(t_r)|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{R}(t_r) \cdot \mathbf{v})^2 = |\mathbf{R}(t)|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{v})^2$$

そして

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}(t_r) - |\mathbf{R}(t_r)| \frac{\mathbf{v}}{c} \\ \mathbf{R}^2(t) &= \mathbf{R}^2(t_r) + \frac{1}{c^2} |\mathbf{R}(t_r)|^2 \mathbf{v}^2 - \frac{2}{c} |\mathbf{R}(t_r)| (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t_r))\end{aligned}$$

を使うと

$$|\mathbf{R}(t_r)| \mathbf{u}(t_r) = c(\mathbf{R}(t_r) - |\mathbf{R}(t_r)| \frac{\mathbf{v}}{c}) = c\mathbf{R}(t)$$

と

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t_r))^2 &= (c|\mathbf{R}(t_r)| - \mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t_r))^2 \\ &= c^2 |\mathbf{R}(t_r)|^2 + (\mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t_r))^2 - 2c|\mathbf{R}(t_r)|(\mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t_r)) \\ &= c^2 (|\mathbf{R}(t_r)|^2 + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t_r))^2 - \frac{2}{c} |\mathbf{R}(t_r)| (\mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t_r))) \\ &= c^2 (|\mathbf{R}(t)|^2 - \frac{1}{c^2} |\mathbf{R}(t_r)|^2 \mathbf{v}^2 + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}(t_r) \cdot \mathbf{R}(t_r))^2) \\ &= c^2 (|\mathbf{R}(t)|^2 - \frac{1}{c^2} |\mathbf{R}(t)|^2 \mathbf{v}^2 + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}(t))^2) \\ &= c^2 |\mathbf{R}(t)|^2 - |\mathbf{R}(t)|^2 |\mathbf{v}|^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

となり

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\alpha c^3 Q \boldsymbol{R}(t)}{(c^2 |\boldsymbol{R}(t)|^2 - |\boldsymbol{R}(t)|^2 |\boldsymbol{v}|^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} (1 - \eta^2) = \alpha Q \frac{\boldsymbol{R}(t)}{|\boldsymbol{R}(t)|^3} \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

と求まります。