

不変振幅

散乱問題に必要な断面積を遷移確率でどう表現するのか見ていきます。断面積の形だけ分かればいいという人は結果に飛んでいいです。ついでに崩壊率を示しています。

後半でファインマン則を作っていますが、これも結果だけ分かればいいという人は飛ばしてください。

散乱過程を考えます。詳細を見ると面倒なので、細かいことは気にせずに摂動計算の形に持って行きます。まず、粒子として表現するために波束を使います。波束は

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \phi(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle \quad (E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$$

とします。 $|\mathbf{p}\rangle$ は相互作用ありでの 1 粒子状態です。規格化として

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \phi^*(\mathbf{p}') \phi(\mathbf{p}) \langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \phi^*(\mathbf{p}') \phi(\mathbf{p}) 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\phi(\mathbf{p})|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

を用いれば、 $\langle \phi | \phi \rangle = 1$ と規格化されます。波束を使って 2 体状態から n 体状態への確率は

$$P = |\langle \phi_{f_1}, \phi_{f_2}, \dots, \phi_{f_n} | \phi_{i_A}, \phi_{i_B} \rangle|^2$$

これから見ていくことをこの式に合わせて言えば、無限大の過去の始状態で独立だった 2 つの状態 ϕ_{i_A}, ϕ_{i_B} が何かしらの相互作用を受けて無限大の未来の終状態へ行く確率についてです。ただし、始状態と終状態では、複数の粒子がいてもお互いは影響をうけずに 1 粒子状態になっているとします。

始状態と終状態の決定された 3 次元運動量状態に対する振幅はハイゼンベルク描像で

$$\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots, \mathbf{p}'_n, out | \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B, in \rangle$$

と書くことにします。 in は無限大の過去、 out は無限大の未来での状態であることを表し、それぞれを in 状態、 out 状態と呼ぶことにします。これがそのまま S 行列として定義され

$$S = \langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \dots, \mathbf{p}'_n, out | \mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B, in \rangle$$

2 体から n 体への散乱としてますが、なんでもいいです。この構造に触れると大変なので、「 S 行列」と「簡約公式」を見てください。これらの状態は相互作用ありの真空 $|\Omega\rangle$ から構成されていて、 in, out 状態は相互作用項を含む全ハミルトニアンに従う $\phi(x)$ の $t = -\infty, +\infty$ の極限でのハイゼンベルク場 $\phi_{in}(x), \phi_{out}(x)$ による生成演

算子を真空に作用させることで作られます (in, out の真空は同じとして)。 $\phi_{in}(x), \phi_{out}(x)$ は漸近的なハイゼンベルク場や漸近場と呼ばれます。また、ハイゼンベルク描像なので時間依存性が状態にない、時間発展は演算子側で見れます。

このとき、演算子として

$$|\alpha; in\rangle = S|\alpha; out\rangle, \quad \langle\alpha; out| = \langle\alpha; in|S$$

というのを作れば、 S は $|\alpha; in\rangle$ と $|\alpha; out\rangle$ を結ぶ演算子なので、散乱過程の情報を全て持つことになります。これが S 行列演算子です。 S 行列演算子を使えば

$$S = \langle p'_1, p'_2, \dots, p'_n, in | S | p_A, p_B, in \rangle = \langle p'_1, p'_2, \dots, p'_n, out | S | p_A, p_B, out \rangle$$

となります。

S 行列演算子の中には時間発展に伴うあらゆる過程が含まれているので、相互作用が何もないということも含まれています。つまり、全体として S 行列演算子は

$$S = 1 + iT$$

このような構造になっているはずで、相互作用部分を iT としています。この iT について最初にわかることは、散乱においてエネルギーと運動量の保存を要求すれば

$$\langle p'_1 p'_2 \dots | iT | p_A p_B \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p'_f) \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p'_f)$$

このように保存則としてデルタ関数を含んでいるはずです。 $\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p'_f)$ は不変振幅 (invariant amplitude) と呼ばれます。

実際に断面積を求めるとき、これがどのように入ってくるのか大まかに見ていきます。始状態 $|\phi_{i_A} \phi_{i_B}\rangle_{in}$ から例えば、静止している標的 ϕ_{i_A} のいる面に対して ϕ_{i_B} が直進して入射し、それによって相互作用がおきて終状態へ移行したとします。この波束 $|\phi_{i_B}\rangle$ が入射するときの衝突パラメータを $\mathbf{b}$ (3次元ですが衝突方向に垂直な量なので実質2次元) として、始状態を書くと

$$|\phi_{i_A} \phi_{i_B}\rangle_{in} = \int \frac{d^3 p_A d^3 p_B}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{\phi_A(\mathbf{p}_A) \phi_B(\mathbf{p}_B)}{\sqrt{2E_A 2E_B}} e^{-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_B} |\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle_{in}$$

のようになります。横に長くなるので、 in, out は添え字にします。 ϕ_{i_B} は3次元空間において ϕ_{i_A} に対して、衝突パラメータ $\mathbf{b}$ による衝突コースで入ってくるので、位置空間では $\mathbf{b}$ で ϕ_{i_B} は区別され、それぞれ平行移動で繋がっています。このことを運動量空間に入れるために $\exp[-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}_B]$ をつけています。波動関数 $\phi_A(\mathbf{p}_A), \phi_B(\mathbf{p}_B)$ 自体には衝突パラメータがないとします。 $\mathbf{b} = 0$ とすれば同軸上のみでの衝突です。

実験としては静止している ϕ_{i_A} に対して多数の ϕ_{i_B} を入射させるので (ビームとして入射)、散乱の反応回数 N は単位面積あたりの粒子数を n_B とし、衝突パラメータに依存する遷移確率 $P(\mathbf{b})$ を使って

$$N = \int d^2 b \, n_B P(\mathbf{b})$$

知りたいのは、 $|\phi_{i_A} \phi_{i_B}\rangle_{in}$ から n 個の粒子の運動量が ${}_{out}\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n |$ となる状態への遷移なので、終状態は微小領域 $d^3 p_1 \dots d^3 p_n$ にいるとして、規格化も含めて

$$P(\mathbf{b})(A, B \rightarrow 1, 2, \dots, n) = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |_{out} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n | \phi_{i_A} \phi_{i_B} \rangle_{in} |^2$$

とします ($f = 1, 2, \dots, n$)。単純に言えば、 $|\langle \mathbf{p} | \psi \rangle|^2$ は確率密度なので、微小領域 $d^3 p$ をかけて確率にしたということです。

反応回数 N による断面積の定義は標的を A 、入射粒子を B として

$$\sigma = \frac{N}{n_A n_B s}$$

で与えられ、 σ は反応が起きる確率です。 s はビームの断面積、 n_A, n_B は面積密度です。こうなることを簡単に求めておきます。

入射してくる粒子の体積密度を ρ_B とすれば、時間 T の経過で反応を起こすとすれば、反応を起こせる粒子は $\rho_B v T s$ 個います (v は標的と入射粒子の相対速度)。標的との反応が起きる確率を σ' とすれば、 $\rho_B v T s \sigma'$ 回反応が起きます。面積を σ' に含めたものを σ とします。反応が起きる体積は $V = v T s$ で、標的の体積密度を ρ_A とすれば標的の数は $\rho_A V$ 個なので、全体の反応回数 N は

$$\begin{aligned} N &= \sigma \rho_B v T \rho_A V \\ &= \sigma n_B n_A s \\ \sigma &= \frac{N}{n_A n_B s} \end{aligned}$$

となります。

s を単位面積とし (大抵は単位面積として扱う)、標的は 1 個しかないとすれば ($\rho_A V = 1$)

$$N = \sigma \rho_B v T = \sigma n_B$$

となり

$$d\sigma = \frac{dN}{n_B} = \int d^2 b P(\mathbf{b})$$

粒子分布は一樣として n_B は定数としています。 σ, N は $d\sigma, dN$ と書いていきます。 $P(\mathbf{b})$ を入れれば

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\prod_f \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \int d^2 b \int \frac{d^3 p_A d^3 p_B}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{\phi_A(\mathbf{p}_A) \phi_B(\mathbf{p}_B)}{\sqrt{2E_A 2E_B}} \\ &\quad \times \int \frac{d^3 k_A d^3 k_B}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{\phi_A^*(\mathbf{k}_A) \phi_B^*(\mathbf{k}_B)}{\sqrt{2E_A 2E_B}} e^{i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}_B - \mathbf{p}_B)} {}_{out} \langle \mathbf{p}'_f | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_{in} ({}_{out} \langle \mathbf{p}'_f | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_{in})^* \end{aligned}$$

$E_{A,B}$ は $\mathbf{p}_{A,B}$ 、 $\bar{E}_{A,B}$ は $\mathbf{k}_{A,B}$ によるものです。 f は 1 から n で、 $\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \cdots \mathbf{p}'_n | = \langle \mathbf{p}'_f |$ とまとめています。衝突パラメータに関する積分は $\exp[i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}_B - \mathbf{p}_B)]$ だけなので、これはそのまま $(2\pi)^2 \delta^2(\mathbf{k}_{B\perp} - \mathbf{p}_{B\perp})$ となります。「 $\perp$ 」は $\mathbf{p}_B$ の 2 次元成分を表します。 ${}_{out} \langle \mathbf{p}'_f | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_{in}$ 部分は不変振幅を使えば

$${}_{out}\langle \mathbf{p}'_f | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_{in} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p'_f) \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p'_f)$$

$$({}_{out}\langle \mathbf{p}'_f | \bar{\mathbf{p}}_A \bar{\mathbf{p}}_B \rangle_{in})^* = -i(2\pi)^4 \delta^4(k_A + k_B - \sum_{f=1}^n p'_f) \mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p'_f)$$

となっています。

k_A, k_B 積分を実行します。積分部分を取り出せば

$$(2\pi)^6 \int d^3 k_A d^3 k_B \delta^2(k_{B\perp} - p_{B\perp}) \delta^4(k_A + k_B - \sum_{f=1}^n p'_f)$$

運動量の2次元方向とそれに垂直な z 軸方向に分けたとして

$$\int d^3 k_A d^3 k_B \delta^2(k_{B\perp} - p_{B\perp}) \delta^2(k_{A\perp} + k_{B\perp} - \sum_{f=1}^n p'_{f\perp}) \delta(k_A^z + k_B^z - \sum_{f=1}^n p'^z_f) \delta(\bar{E}_A + \bar{E}_B - \sum E_f)$$

そうすると、2次元部分は

$$\begin{aligned} \int d^2 k_A d^2 k_B \delta^2(k_{B\perp} - p_{B\perp}) \delta^2(k_{A\perp} + k_{B\perp} - \sum_{f=1}^n p'_{f\perp}) &= \int d^2 k_A \delta^2(k_{A\perp} + p_{B\perp} - \sum_{f=1}^n p'_{f\perp}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

1行目の右辺のデルタ関数は、 $\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p'_f)$ でのデルタ関数 $\delta^4(p_A + p_B - \Sigma p'_f)$ と比較すれば、 $k_{A\perp} = p_{A\perp}$ を与えます。 z 方向では、 $\delta^4(k_A + k_B - \Sigma p'_f)$ とデルタ関数の性質から

$$\begin{aligned} &\int dk_A^z dk_B^z \delta(k_A^z + k_B^z - \sum_f p'^z_f) \delta(\bar{E}_A + \bar{E}_B - \sum_f E_f) \\ &= \int dk_A^z \delta(\bar{E}_A + \bar{E}_B - \sum_f E_f) \Big|_{k_B^z = \sum p'^z_f - k_A^z} \\ &= \int dk_A^z \delta(\sqrt{\mathbf{k}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{\mathbf{k}_B^2 + m_B^2} - \sum_f E_f) \Big|_{k_B^z = \sum p'^z_f - k_A^z} \\ &= \int dk_A^z \delta(\sqrt{\mathbf{k}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{(\Sigma \mathbf{p}'_f - \mathbf{k}_A)^2 + m_B^2} - \sum_f E_f) \\ &= \frac{1}{\left| \frac{dX}{dk_A^z} \right|} \quad (X = \sqrt{\mathbf{k}_A^2 + m_A^2} + \sqrt{(\Sigma \mathbf{p}'_f - \mathbf{k}_A)^2 + m_B^2} - \sum_f E_f) \\ &= \frac{1}{\left| \frac{k_A^z}{\bar{E}_A} - \frac{k_B^z}{\bar{E}_B} \right|} \quad (k_B^z = \sum_f p'^z_f - k_A^z) \\ &= \frac{1}{|v_A - v_B|} \end{aligned}$$

最後へのは特殊相対論での速度 v と運動量の関係を使っています。

積分されたデルタ関数からの $k_{A\perp} = p_{A\perp}$, $k_{B\perp} = p_{B\perp}$, $k_A^z + k_B^z = \Sigma p_f^z$, $\bar{E}_A + \bar{E}_B = \Sigma E_f$ から

$$\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_f') \Rightarrow \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p_f')$$

そして、始状態の波束の運動量が $\mathbf{p}_{iA}, \mathbf{p}_{iB}$ に収束しているなら、不変振幅は p_A, p_B に依存しなくなるので、断面積は

$$\begin{aligned} d\sigma = & \left(\prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(p_{iA}, p_{iB} \rightarrow p_f')|^2}{|v_A - v_B|} \\ & \times \int \frac{d^3 p_A d^3 p_B}{(2\pi)^3 (2\pi)^3} \frac{1}{2E_A 2E_B} |\phi_A(\mathbf{p}_A)|^2 |\phi_B(\mathbf{p}_B)|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p_f') \end{aligned}$$

デルタ関数の中も同様に収束している運動量 $\mathbf{p}_{iA} + \mathbf{p}_{iB}$ に変えられることから、残りは規格化によって $d^3 p_A d^3 p_B$ の積分で 1 にできるので、最終的に

$$d\sigma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(p_{iA}, p_{iB} \rightarrow p_f')|^2}{2E_A 2E_B |v_A - v_B|} (2\pi)^4 \delta^4(p_{iA} + p_{iB} - \sum_{f=1}^n p_f')$$

このようになり、波束での $\phi_{A,B}$ の依存性が落ちます。

断面積は散乱する粒子に使われますが、素粒子では粒子が崩壊して別の粒子になる場合も重要になっており、その崩壊率が定義されます。崩壊率は粒子が単位時間あたりに崩壊する確率です。このため、崩壊を衝突回数とすれば、断面積の定義と同じです (ある状態から何かの影響で別の状態になる確率)。単純に言えば、1 個の粒子が散乱して複数の粒子になるとしたのが崩壊過程です。ただし、衝突速度は考えないので、そこだけなくしたものが崩壊率 $d\Gamma$ で

$$d\Gamma = \left(\prod_f \frac{d^3 p_f'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) \frac{|\mathcal{M}(p_i \rightarrow p_f')|^2}{2E_i} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - \sum_{f=1}^n p_f')$$

と与えられます。全崩壊率 Γ は運動量積分を行ったものです。

崩壊率と関係する量として平均寿命があり、崩壊率 Γ の逆になります。崩壊率は単位時間あたりに崩壊する確率なので、それと粒子数の積を取れば減少する粒子数になります。そうすると、時間 t での粒子数を $N(t)$ として、時間 dt で減少する粒子数 dN は

$$dN = -\Gamma N dt$$

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

この解は最初の粒子数を N_0 とすれば

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t}$$

$\exp$ 内が -1 になる時間を平均寿命 τ と定義し (下の補足参照)

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

このように崩壊率の逆となります。また、半減期 $t_{1/2}$ は粒子数が半分になる時間なので

$$N(t) = \frac{N_0}{2}, \log e^{-\Gamma t} = \log \frac{1}{2}$$

から、 $t_{1/2} = \Gamma^{-1} \log 2$ となります。

不変振幅の話に移ります。不変振幅は摂動論によって求めます。つまり、相互作用がある場合を相互作用のない真空中で書くことで不変振幅を求めます。このときに、不変振幅に対するファインマン図とファインマン則が作れます。

不変振幅を求めるには定義から分かるように、 S 行列が分かればいいです。なので、 S 行列を求めます。まともに S 行列の計算方法 (簡約公式) を求めるのは大変なので、手っ取り早く折衷した作り方をします (「 S 行列」参照)。相互作用ありとなしでの真空 $|\Omega\rangle, |0\rangle$ の関係は、「Gell-Mann-Low の定理」で求めたように

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} e^{-iHT} |0\rangle$$

真空中に生成演算子を作用させて作る状態も同じ構造を持つとして

$$|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT} |\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle_0$$

相互作用のない真空中であることを表すために $|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle_0$ と書いています。そして、真空間の関係が相互作用描像での時間発展演算子 U によって

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 2T} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2)^{-1} \langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle$$

となっていることから、相互作用描像での時間発展演算子 (H_I は $H = H_0 + H_{int}$ での H_{int} の相互作用描像)

$$U(t_2, t_1) = T \left(\exp \left[-i \int_{t_1}^{t_2} dt' H_I(t') \right] \right)$$

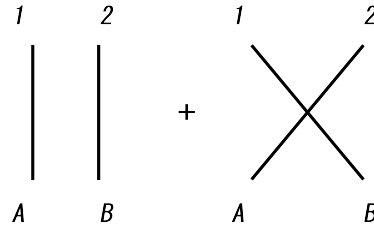
を使って

$$S = \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \cdots; out | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B; in \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} {}_0 \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \cdots | T \left(\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t) \right] \right) | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0$$

と出来 (真空 $|0\rangle, |\Omega\rangle$ の因子の差は消えるとしている)。 T は時間順序積です。余計なことを考えずに単純に言えば、相互作用は断熱的に起きるとし、 $\pm\infty$ の状態には相互作用が影響していないとすることで、自由粒子によって作られる散乱前の状態 $|\mathbf{p}_A \mathbf{p}_B\rangle_0$ と散乱後の状態 ${}_0 \langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \cdots |$ を作り、それらで時間発展演算子を挟んだということです。このような相互作用の断熱的操作を考慮せずに S 行列の計算を行うには簡約公式を使うことになります (「簡約公式」参照)。

S 行列は「相関関数でのファインマン則」と似た形になっているので、同じような方法で図が書けます。終状態も 2 粒子状態 $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ として S の右边を展開していきます。まず、 $\exp$ を展開したときの第一項は 1 なので、単純に

$$\begin{aligned}
{}_0\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0 &= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | a_1 a_2 a_A^\dagger a_B^\dagger | 0 \rangle \\
&= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | a_1 ((2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}'_2) a_B^\dagger + a_A^\dagger ((2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_B) + a_B^\dagger a_2)) | 0 \rangle \\
&= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}'_2) a_1 a_B^\dagger + (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_B) a_1 a_A^\dagger | 0 \rangle \\
&= \sqrt{2E_1 2E_2 2E_A 2E_B} \langle 0 | (2\pi)^6 \delta^3(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}'_2) \delta^3(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}'_1) + (2\pi)^6 \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_B) \delta^3(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}'_1) | 0 \rangle \\
&= 2E_A 2E_B (2\pi)^6 (\delta^3(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}'_2) \delta^3(\mathbf{p}_B - \mathbf{p}'_1) + \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_B) \delta^3(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}'_1))
\end{aligned}$$



これは始状態と終状態が同じことを表しているので、 $S = 1 + iT$ の 1 の部分に対応します。右側の図は真ん中が頂点となるように交わっているわけではなく、ずれて交差しています。頂点があるときは黒点を書きます。次の項を決めるために、 ϕ^4 理論として H_I を

$${}_0\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | T \left(-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \right) | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0$$

と与えます。 ϕ は相互作用描像です。ウィックの定理を使って縮約を作っていきますが、挟んでいる状態が真空 $|0\rangle$ ではないので、相関関数のときと状況が少し異なります。簡単に言えば、外側の状態とも縮約がとれるようになります。

ϕ を ϕ^+ と ϕ^- とに分離して、それぞれを

$$\begin{aligned}
\phi^+ | \mathbf{p} \rangle_0 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} e^{-ikx} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) | 0 \rangle \\
&= e^{-ipx} | 0 \rangle \\
{}_0\langle \mathbf{p} | \phi^- &= \langle 0 | e^{ipx}
\end{aligned}$$

と作用するとします。このことから図に寄与を与える外側との縮約を

$$\overline{\phi(x) | \mathbf{p}} = e^{-ipx} | 0 \rangle, \quad \langle \mathbf{p} | \phi(x) = \langle 0 | e^{ipx}$$

と作れます。これによって、図と外線の対応が相関関数でのファインマン則とは異なってきます。

というわけで、縮約を取っていきます。まず、外側との縮約を考えなければ

$$\overline{\phi\phi\phi\phi}, \overline{\phi\phi\phi\phi}, \phi\phi\phi\phi$$

この三つの形による項があるので

$$\begin{aligned} & -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x {}_0\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \overline{\phi\phi\phi\phi} | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0 \\ & -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x {}_0\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \overline{\phi\phi\phi\phi} | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0 \\ & -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x {}_0\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \phi\phi\phi\phi | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0 \end{aligned}$$

一番目は、場の演算子は縮約によってスカラーになるので、残りは ${}_0\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0$ によって構成され

$$8 \times \left(\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ A \quad B \end{array} + \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ A \quad B \end{array} \right)$$

図から分かるように、 ${}_0\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0$ の図に真空泡がかかったものなので、 S 行列の 1 に対応するどうでもいい部分です。

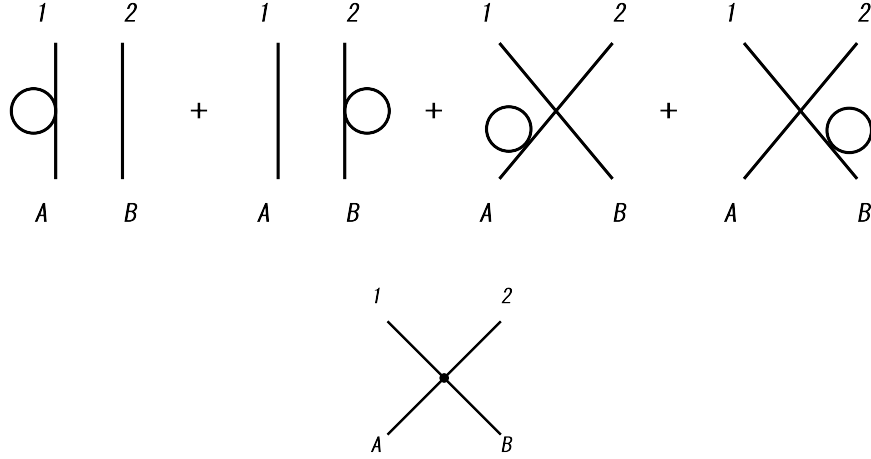
二番目は場の演算子が二個残っているので、これらが外側との縮約をとります。そのとき $\overline{\phi(x)|\mathbf{p}}\rangle$ や $\langle \mathbf{p}|\phi(x)$ は図として描くときは

$$\begin{array}{l} \bullet \longleftarrow \quad = \overline{\phi(x)|\mathbf{p}} \\ \longleftarrow \bullet \quad = \langle \mathbf{p}|\phi(x) \end{array}$$

このように外線として書かれます。適当に縮約をとってみると

$$\begin{aligned} & -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x D(x-x) {}_0\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \overline{\phi\phi} | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle_0 \\ & = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x D(x-x) e^{-i(p'_2 - p_A)x} {}_0\langle \mathbf{p}'_1 | \mathbf{p}_B \rangle_0 \\ & = -\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x D(x-x) e^{-i(p'_2 - p_A)x} {}_0\langle \mathbf{p}'_1 | \mathbf{p}_B \rangle_0 \\ & = -\frac{i\lambda}{4!} D(x-x) \delta^4(p'_2 - p_A) {}_0\langle \mathbf{p}'_1 | \mathbf{p}_B \rangle_0 \end{aligned}$$

なので、これも結局はループの頂点部分での保存則から、始状態と終状態が等しいことを表しているの、またどうでもいい部分です。他の縮約をとっても同じように始状態と終状態が等しくなっていて、図にすれば



三番目の図を先に書くと

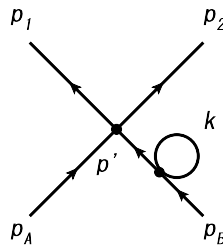
これだけしかなく、今度は真ん中で交わり頂点が現れていて、同じ図は $4!$ 個あります。これは式では

$$-\frac{i\lambda}{4!} \int d^4x e^{-i(p_A + p_B - p_1 - p_2)} = -\frac{i\lambda}{4!} (2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_1 - p_2)$$

他のと違い、全体のエネルギーと運動量が保存していると言っているだけで、始状態と終状態が同じとは言っていないことから、これが iT に関わってくる部分になります。つまり、全ての外線が他のと繋がっている場合だけが T に寄与することがわかります。全体としてはこれに $4!$ がかかり、 $-i\lambda(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - p_1 - p_2)$ で、尚且つこの式は不変振幅

$$i(2\pi)^4 \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p'_f) \delta^4(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p'_f)$$

での $\mathcal{M} = -\lambda$ になっています。問題になってくるのは、この図の外線にループがくっついた



こんな図の場合です。ファインマン則 (外線は $e^{\pm ipx}$ として使う) を使って式にしてみると

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y e^{-ip_A y} e^{ip_1 y} (-i\lambda) e^{ip_2 y} D(y-x) D(x-x) (-i\lambda) e^{-ip_B x} \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y e^{-i(p_A - p_1 - p_2)y} (-i\lambda) e^{-ip_B x} (-i\lambda) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2 - m^2} e^{-ip'(y-x)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2 - m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \int d^4x \int d^4y (-i\lambda) e^{-i(p_A + p' - p_1 - p_2)y} (-i\lambda) e^{-i(p_B - p')x} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2 - m^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p' - p_1 - p_2) (-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^4(p_B - p')
\end{aligned}$$

$(-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p' - p_1 - p_2)$ の部分が真ん中の頂点に対応する保存則で、 $(-i\lambda)(2\pi)^4 \delta^4(p_B - p')$ がループの頂点に対応しています。 p' に関する積分は $\delta^4(p_B - p')$ によって

$$\frac{i}{p'^2 - m^2} = \frac{1}{p_B^2 - m^2}$$

今の設定は、入射してくる粒子は p_B の運動量を持ち質量は m です。なので on-shell となり、 $p_B^2 = m^2$ から分母が 0 になるので、致命的な状況になります。しかし、この外線にループがくっつくことで起こる問題は真空泡と同じような発想で解決されます。真空泡は相互作用なしの真空から相互作用ありの真空への寄与として解釈されましたが、今度も同じように相互作用なしの $|\mathbf{p}\rangle_0$ から相互作用ありの $|\mathbf{p}\rangle$ への寄与として解釈されます。つまり、散乱過程への寄与としては含まれないものです。実際にどのように処理するのかは、問題の原因であるループを含んだ外線部分を切って



こうして出来た図を amputated diagrams と言います (今まで使っているのと同じ図ですが、もっと複雑な図の場合もある)。よって、不変振幅

$$\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | iT | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n \mathbf{p}'_f) \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p'_f)$$

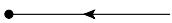
に対して、 $\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | iT | \mathbf{p}_A \mathbf{p}_B \rangle$ は今やってきたものなので

$$i(2\pi)^4 \mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p'_f) \delta^4(p_A + p_B - \sum_{f=1}^n \mathbf{p}'_f) = (\text{全ての connected と amputated の和})$$

となります。ここでの connected は、全ての外線が繋がっていることを意味し、日本語だと連結していると表現したりします (相関関数の場合と意味が違っている)。

ファインマン則は相関関数と基本的に同じで、図 1 です。運動量表示にすると、不変振幅の式は

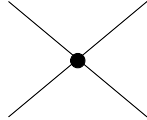
$$\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p'_f) = \text{全ての connected と amputated の和}$$

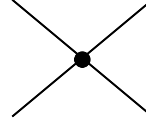
・ 外線  = 1

・ 外線  = e^{-ipx}

・ 伝播関数  = $D(x-y)$

・ 伝播関数  = $i/(p^2-m^2+i\epsilon)$

・ 頂点  = $-i\lambda \int d^4x$

・ 頂点  = $-i\lambda$

・ 対称因子で割る

・ 対称因子で割る

図 1

図 2

のように書き換えることができます。これは運動量表示に直すときのフーリエ変換によってうまいことデルタ関数を両辺から落とせるためです。運動量表示でのファインマン則は図 2 で、さらに

- ・ 頂点で保存則を満たすようにする
- ・ ループ (閉線) が有る場合は積分 $\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ を加える

というのが加わり、これが ϕ^4 理論での不変振幅に対するファインマン則になります。ループがある場合の問題は QED での話と同じです。また、相関関数と不変振幅でファインマン則が少し変更するのは、不変振幅での外線での取り扱いが $\phi|p\rangle$ となっていて、 ϕ に含まれる $\exp$ がそのまま生き残ってくるためです。相関関数では ϕ は縮約で全て潰れてしまっています。

ちなみに、 ϕ^4 理論でのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

ですが、これの第 1 項の演算子を運動量表示にし、第 2 項を加えて逆にすれば伝播関数になり、第 3 項の係数部分が頂点に対応します。なので、ラグランジアンから伝播関数と頂点がどうなっているのかはわかります。

相関関数から S 行列へは簡約公式によって繋げられることから変更される理由がわかります。大雑把に言えば、2 粒子の散乱において表われる 4 点相関関数は相関関数のファインマン則によって作られ、そして簡約公式によって不変振幅部分は 4 点相関関数にディラック方程式の演算子部分が作用する形で現れます (フェルミオンの場合)。その影響によって相関関数のファインマン則と不変振幅でのファインマン則が変更されます。

また、ここでは ϕ^4 理論について求めてきましたが、「QED」で示したファインマン則はそのまま何の変更もなく使えるので、散乱計算は規格化の定義による変更以外にはいじる必要がありません。

・ 補足

崩壊率 Γ の逆が粒子の平均寿命と言える理由を見ます。粒子が時間 t まで崩壊せず、 $t + \Delta t$ までに崩壊する確率を求めます (崩壊は 1 度のみ)。 Δt の間に崩壊する確率は $\alpha\Delta t$ (α は定数) で与えられるとします。そうすると、 t まで崩壊しない確率を $P(t)$ とすれば、 $t + \Delta t$ で崩壊する確率は $P(t)\alpha\Delta t$ です。言い換えれば、 $t + \Delta t$ まで崩壊しない確率 $P(t + \Delta t)$ は

$$P(t + \Delta t) = P(t)(1 - \alpha\Delta t)$$

左辺を展開して

$$P(t) + \frac{dP}{dt}\Delta t = P(t)(1 - \alpha\Delta t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = -\alpha P(t)$$

$$P(t) = Ce^{-\alpha t}$$

定数 C は、 $t = 0$ では崩壊が起きないとするなら $P(0) = 1$ なので、 $C = 1$ とします。よって、 $t + \Delta t$ で崩壊する確率は

$$P(t)\alpha\Delta t = \alpha e^{-\alpha t}\Delta t = f(t)\Delta t$$

$f(t)$ は確率分布 (指数分布) です。これによる平均時間を求めると

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty dt \, t f(t) = \alpha \int_0^\infty dt \, t e^{-\alpha t} = \alpha \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \left(t + \frac{1}{\alpha} \right) \right) \Big|_0^\infty = \alpha^{-1}$$

崩壊率は単位時間あたりの崩壊する確率なので $\Gamma\Delta t$ は $\alpha\Delta t$ です。よって、 Γ^{-1} は崩壊するまでの平均時間となります。