

カイラルアノマリー

アノマリーの代表的なものであるカイラルアノマリーについて説明します。ここではカレントの保存から導く方法 (演算子的な方法) と経路積分による方法の両方で行います。

アノマリーは簡単に言ってしまうと、古典的に成立していた保存則 (対称性) が量子効果によって保存しなくなるという話です。その保存則を壊す量子効果の項をアノマリーと呼んでいます。日本語だと量子異常項とも呼ばれますが、ここではアノマリーと呼ぶことにします。アノマリーで項そのものを指すんですが、分かりやすくするためにアノマリー項と書いたりもします。

ここではアノマリーの導出をするだけで物理的な影響 (ワインバーグ・サラムモデルとのからみとか) については触れていません。

$U(1)$ の可換ゲージ場 (電磁場) を使っていきますが、非可換でも同様に見ていくことが出来ます。

トライアングル図の計算は別のところですので、ここでは飛ばします。

最初にカレントの保存を見ておきます。普通のベクトルカレント (見て分かるようにベクトルになっているからベクトルカレント)

$$J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

を使います。これはディラック方程式 ($\bar{\psi}$ の方は左から微分がかかるように書いています)

$$i \gamma_\mu \partial^\mu \psi = m \psi$$

$$\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu = -\bar{\psi} m$$

を使うことで

$$\partial^\mu J_\mu = (\partial^\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi = i m \bar{\psi} \psi - i m \bar{\psi} \psi = 0$$

となって、カレントが保存していることが分かります。このとき、ディラック方程式としてゲージ場を含んだ

$$i \gamma_\mu \partial^\mu \psi = m \psi - e A_\mu \gamma^\mu \psi$$

$$\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu = -\bar{\psi} m + e \bar{\psi} A_\mu \gamma^\mu$$

でも同じ結果になります。

今度はベクトル型のカレントでなく軸性ベクトルでのカレントを考えてみます。軸性についていることから分かるようにカレントは

$$J_\mu^A = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$$

となります。 $\gamma_\mu \gamma_5$ は軸性ベクトルです (相対論的量子力学の「 γ 行列 ~ 双線形 ~」参照)。これに合わせて、 J_μ^A は軸性カレント (axial current) と呼ばれます (あまり軸性ベクトルカレントとは呼ばれません)。これに対してもディラック方程式を使うことで

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu J_\mu^A &= \partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) \\
 &= im \bar{\psi} \gamma_5 \psi + im \bar{\psi} \gamma_5 \psi \\
 &= 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi \\
 &= 2im J^P
 \end{aligned} \tag{1}$$

途中でガンマ行列の関係 $\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0$ を使っています。これを見て分かるように、 $m = 0$ でなければ軸性カレントは保存されません。

一応簡単に気が付く記号上の注意をしておきます。ここでは軸性カレントを $\gamma_\mu \gamma_5$ の並びで定義していますが、 $\gamma_5 \gamma_\mu$ で定義している場合があります。そのため軸性カレントに関する式の符号が逆になったりしています。

ここまでは古典的なカレントの保存に関する話です。次に量子論的なカレントの保存について見ていきます。量子論的なカレントの保存は n 点相関関数を通して表現されます。なので、3 点相関関数として

$$\begin{aligned}
 G_\mu(x, y, z) &= \langle 0 | T(J_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle \\
 &= \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) \langle 0 | J_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
 &\quad - \theta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) \langle 0 | J_\mu(x) \bar{\psi}(z) \psi(y) | 0 \rangle \\
 &\quad + \theta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - z_0) \langle 0 | \psi(y) J_\mu(x) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
 &\quad + \theta(y_0 - z_0) \theta(z_0 - x_0) \langle 0 | \psi(y) \bar{\psi}(z) J_\mu(x) | 0 \rangle \\
 &\quad - \theta(z_0 - y_0) \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) \psi(y) J_\mu(x) | 0 \rangle \\
 &\quad - \theta(z_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) J_\mu(x) \psi(y) | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

このようなカレントと場の演算子 (ハイゼンベルグ表示) による真空期待値を作ります (T は時間順序積)。これの微分を取ります (x に対する微分)。このとき、階段関数でなく、 $J_\mu(x)$ に直接かかる項は明らかに時間順序積によって表現できて

$$\langle 0 | T(\partial^\mu J_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle$$

となります。というわけで階段関数の微分がデルタ関数になることを使って

$$\begin{aligned}
\partial^\mu G_\mu(x, y_1, y_2) &= \partial^\mu \theta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) \langle 0 | J_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
&\quad - \partial^\mu \theta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) \langle 0 | J_\mu(x) \bar{\psi}(z) \psi(y) | 0 \rangle \\
&\quad + \partial^\mu \theta(y_0 - x_0) \theta(x_0 - z_0) \langle 0 | \psi(y) J_\mu(x) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
&\quad + \theta(y_0 - x_0) \partial^\mu \theta(x_0 - z_0) \langle 0 | \psi(y) J_\mu(x) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
&\quad + \theta(y_0 - z_0) \partial^\mu \theta(z_0 - x_0) \langle 0 | \psi(y) \bar{\psi}(z) J_\mu(x) | 0 \rangle \\
&\quad - \theta(z_0 - y_0) \partial^\mu \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) \psi(y) J_\mu(x) | 0 \rangle \\
&\quad - \partial^\mu \theta(z_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) J_\mu(x) \psi(y) | 0 \rangle \\
&\quad - \theta(z_0 - x_0) \partial^\mu \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) J_\mu(x) \psi(y) | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | T(\partial^\mu J_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) \langle 0 | J_0(x) \psi(y) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
&\quad - \delta(x_0 - y_0) \theta(x_0 - z_0) \langle 0 | \psi(y) J_0(x) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
&\quad + \delta(x_0 - y_0) \theta(z_0 - y_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) \psi(y) J_0(x) | 0 \rangle \\
&\quad - \delta(x_0 - y_0) \theta(z_0 - x_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) J_0(x) \psi(y) | 0 \rangle \\
&\quad - \delta(x_0 - z_0) \theta(z_0 - y_0) \langle 0 | J_0(x) \bar{\psi}(z) \psi(y) | 0 \rangle \\
&\quad + \delta(x_0 - z_0) \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) J_0(x) \psi(y) | 0 \rangle \\
&\quad + \delta(x_0 - z_0) \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \psi(y) J_0(x) \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
&\quad - \delta(x_0 - z_0) \theta(y_0 - z_0) \langle 0 | \psi(y) \bar{\psi}(z) J_0(x) | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | T(\partial^\mu J_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0) \theta(y_0 - z_0) \langle 0 | [J_0(x), \psi(y)] \bar{\psi}(z) | 0 \rangle \\
&\quad - \delta(x_0 - y_0) \theta(z_0 - y_0) \langle 0 | \bar{\psi}(z) [J_0(x), \psi(y)] | 0 \rangle \\
&\quad - \delta(x_0 - z_0) \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | [J_0(x), \bar{\psi}(z)] \psi(y) | 0 \rangle \\
&\quad + \delta(x_0 - z_0) \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \psi(y) [J_0(x), \bar{\psi}(z)] | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | T(\partial^\mu J_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle \\
&= \delta(x_0 - y_0) \langle 0 | T([J_0(x), \psi(y)] \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle \\
&\quad + \delta(x_0 - z_0) \langle 0 | T(\psi(y) [J_0(x), \bar{\psi}(z)]) | 0 \rangle \\
&\quad + \langle 0 | T(\partial^\mu J_\mu(x) \psi(y) \bar{\psi}(z)) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

[,] は交換関係の記号です。この同時刻交換関係は

$$\begin{aligned}
\delta(x_0 - y_0) [J_0(x), \psi(y)] &= \delta(x_0 - y_0) [\psi^\dagger(x) \psi(x), \psi(y)] \\
&= \delta(x_0 - y_0) (\psi^\dagger(x) \{\psi(x), \psi(y)\} - \{\psi^\dagger(x), \psi(y)\} \psi(x)) \\
&= -\delta(x_0 - y_0) \{\psi^\dagger(x), \psi(y)\} \psi(x) \\
&= -\delta(x_0 - y_0) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(x) \\
&= -\psi(x) \delta^4(x - y)
\end{aligned}$$

途中で、交換関係と反交換関係の関係

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$$

とフェルミオン場の同時刻反交換関係

$$\{\psi(t, \boldsymbol{x}), \psi^\dagger(t, \boldsymbol{y})\} = \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) , \quad \{\psi(t, \boldsymbol{x}), \psi(t, \boldsymbol{y})\} = 0$$

を使っています。同様にすることで

$$\delta(x_0 - y_0)[J_0(x), \bar{\psi}(y)] = \bar{\psi}(x)\delta^4(x - y)$$

この結果を入れることで

$$\begin{aligned} \partial^\mu G_\mu(x, y, z) = & -\delta^4(x - y)\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(z))|0\rangle + \delta^4(x - z)\langle 0|T(\psi(y)\bar{\psi}(x))|0\rangle \\ & + \langle 0|T(\partial^\mu J_\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z))|0\rangle \end{aligned}$$

そして、カレントの保存 $\partial^\mu J_\mu(x) = 0$ を課すことで

$$\begin{aligned} \partial^\mu G_\mu(x, y, z) = & -\delta^4(x - y)\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(z))|0\rangle + \delta^4(x - z)\langle 0|T(\psi(y)\bar{\psi}(x))|0\rangle \\ = & -\delta^4(x - y)S(x - z) + \delta^4(x - z)S(y, x) \end{aligned}$$

このようにワード・高橋恒等式の位置表示が出てきます (S はフェルミオンの伝播関数)。フーリエ変換すれば

$$q^\mu G_\mu(p, p') = -S(p') + S(p) \quad (q_\mu = p_\mu - p'_\mu)$$

となります。

正確には、 $G_\mu(x, y, z)$ が 1PI な 3 点関数 (頂点関数) になっていないので、完全に一般的に言われるワード・高橋恒等式に一致していませんが同じ意味です。対応させるには、簡単に言うと、 $G_\mu(x, y, z)$ にはフェルミオンの外線があるので、それをなくせばよくて

$$\Gamma_\mu(p, p'; q) = -\frac{G_\mu(p, p'; q)}{S(p)S(p')}$$

みたいにすればいいです (1PI な 3 点の頂点関数と connected な 3 点相関関数の関係からなんとなく分かると思います)。そうすれば

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, p') = -S^{-1}(p') + S^{-1}(p)$$

となって完全に一致します。

ここまではベクトルカレントを含んでいる 3 点関数を計算して、古典的なベクトルカレントの保存則を使った
らワード・高橋恒等式が出てきたというものです。これで、古典的なカレントの保存則から量子論的なカレントの
保存則へと繋がりました。

ここからが本題になります。今度は

$$L_{\mu\nu\rho}(x, y, z) = \langle 0 | T(J_\mu(x) J_\nu(y) J_\rho^A(z)) | 0 \rangle$$

このようにベクトルカレント 2 つと軸性カレント 1 つによる 3 点関数を考えます。これを同じように z で微分し
ます。

$$\partial^\rho L_{\mu\nu\rho}(x, y, z) = \partial^\rho \langle 0 | T(J_\mu(x) J_\nu(y) J_\rho^A(z)) | 0 \rangle$$

$L_{\mu\nu\rho}(x, y, z)$ のフーリエ変換を

$$L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = \int d^4x d^4y d^4z e^{ip_1x} e^{ip_2y} e^{-iqz} \langle 0 | T(J_\mu(x) J_\nu(y) J_\rho^A(z)) | 0 \rangle$$

とすれば

$$\begin{aligned} & \int d^4x d^4y d^4z e^{ip_1x} e^{ip_2y} e^{-iqz} \partial^\rho L_{\mu\nu\rho}(x, y, z) \\ &= - \int d^4x d^4y d^4z e^{ip_1x} e^{ip_2y} (\partial^\rho e^{-iqz}) L_{\mu\nu\rho}(x, y, z) \\ &= iq^\rho L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) \end{aligned}$$

部分積分によって表面項を落としています。これによって

$$iq^\rho L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = \int d^4x d^4y d^4z e^{ip_1x} e^{ip_2y} e^{-iqz} \partial^\rho \langle 0 | T(J_\mu(x) J_\nu(y) J_\rho^A(z)) | 0 \rangle$$

時間順序部分の微分を実行します。基本的な構造は同じなので計算を省略していきます。階段関数を微分したとき
に出てくる項は

$$\begin{aligned} & -\delta(z_0 - y_0) \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | J_\mu(x) J_\nu(y) J_0^A(z) | 0 \rangle + \delta(z_0 - y_0) \theta(x_0 - z_0) \langle 0 | J_\mu(x) J_0^A(z) J_\nu(y) | 0 \rangle \\ & + \delta(z_0 - y_0) \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | J_0^A(z) J_\nu(y) J_\mu(x) | 0 \rangle - \delta(z_0 - y_0) \theta(z_0 - x_0) \langle 0 | J_\nu(y) J_0^A(z) J_\mu(x) | 0 \rangle \\ & - \delta(z_0 - x_0) \theta(z_0 - y_0) \langle 0 | J_\mu(x) J_0^A(z) J_\nu(y) | 0 \rangle + \delta(z_0 - x_0) \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | J_0^A(z) J_\mu(x) J_\nu(y) | 0 \rangle \\ & - \delta(z_0 - x_0) \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | J_\nu(y) J_\mu(x) J_0^A(z) | 0 \rangle + \delta(z_0 - x_0) \theta(y_0 - z_0) \langle 0 | J_\nu(y) J_0^A(z) J_\mu(x) | 0 \rangle \end{aligned}$$

こんなのです。このとき必要となる交換関係は

$$\delta(z_0 - y_0) [J_\nu(y), J_0^A(z)]$$

このようなベクトルカレントと軸性カレントによるものです。で、この交換関係は 0 になります。これは単に交換関係を展開して行ってやればいいだけです。 γ^μ や γ^5 がいますが、これらは成分表示にして交換関係の外に出してしまえばいいです ($\psi_a^\dagger(x)\gamma_{ac}^5\psi_c(x)$ みたいにすればいい)。後はフェルミオン場の同時刻反交換関係と、 γ^5 は γ_μ と反交換するということを使えばいいです。

というわけで

$$iq^\rho L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = \int d^4x d^4y d^4z e^{ip_1x} e^{ip_2y} e^{-iqz} \langle 0 | T(J_\mu(x) J_\nu(y) \partial^\rho J_\rho^A(z)) | 0 \rangle$$

これに軸性カレントの保存 (1) を使うと

$$\begin{aligned} iq^\rho L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) &= \int d^4x d^4y d^4z e^{ip_1x} e^{ip_2y} e^{-iqz} \langle 0 | T(J_\mu(x) J_\nu(y) \partial^\rho J_\rho^A(z)) | 0 \rangle \\ &= 2im \int d^4x d^4y d^4z e^{ip_1x} e^{ip_2y} e^{-iqz} \langle 0 | T(J_\mu(x) J_\nu(y) J^P(z)) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

となります。これも導出方法から分かるように、ワード・高橋恒等式的一种です。これは軸性カレントに対してのものなので、軸性ワード・高橋恒等式、もしくはカイラルワード・高橋恒等式と呼ばれたりもし、(1) に対応する式です。

また、軸性カレントに対してでなくベクトルカレントに対して微分を作用させるなら

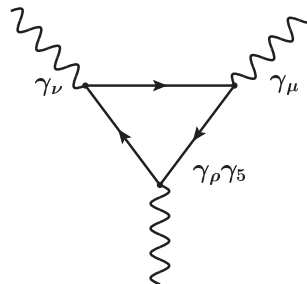
$$p_1^\mu L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = p_2^\nu L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = 0$$

となります。

なんで、このようなカレントを使った計算をしてきたのかを説明します。ここで出てきた $L_{\mu\nu\rho}$ にはカレントが 3 つあるので、フェルミオンの伝播関数が 3 ついる図に対応します。分かりやすくするために、カレントをフェルミオン場に変えて書けば

$$L_{\mu\nu\rho}(x, y, z) = \langle 0 | T(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma_\nu \psi(y) \bar{\psi}(z) \gamma_\rho \gamma_5 \psi(z)) | 0 \rangle$$

$\psi(y) \bar{\psi}(z)$ が伝播関数に対応するので、「経路積分 ~ QED の摂動展開 ~」の最後に説明したように並びをいじってやれば、3 つの伝播関数によって閉じるように構成されていることが分かります。このような図をトライアングル図と呼んでいます。名前の通り



このような三角形のループ部分がある図です。このトライアングル図を計算すると余計な項が現われて、(2) が満たされないことが分かります。これは言い換えれば、古典的 (ツリーレベル) な軸性カレントの保存の式が満たされ

ていないということです。その保存の式に現われる余計な項がアノマリー (anomaly) と呼ばれるもので、軸性カレントに対するアノマリーなので軸性アノマリー (axial anomaly)、もしくはカイラルアノマリー (chiral anomaly) と呼ばれます。

$m = 0$ だとしてトライアングル図を計算した結果は

$$q^\rho L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = 0 : \text{軸性ベクトル} \quad (3)$$

$$p_1^\mu L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = p_2^\nu L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = 0 : \text{ベクトル}$$

となっていることが、古典的な話から予想されるものです。しかし、計算結果は (3) となっておりません。結果は、軸性カレントの方は 0 にならず (計算過程で $L_{\mu\nu\rho}$ の定義が変更されますが)

$$q^\rho L_{\mu\nu\rho}(p, k, q) = \frac{-g^2}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\alpha p_\beta \quad (4)$$

$$p_1^\mu L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = p_2^\nu L_{\mu\nu\rho}(p_1, p_2, q) = 0$$

となっています ($\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ はレヴィ・チビタ記号)。結合定数は g としています。これをカレントの保存の式に適用すると ($m \neq 0$ の場合)

$$\begin{aligned} \partial^\mu J_\mu^A &= 2imJ^P - \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \\ &= 2imJ^P - \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta - \partial_\mu A_\nu \partial_\beta A_\alpha - \partial_\nu A_\mu \partial_\alpha A_\beta + \partial_\nu A_\mu \partial_\beta A_\alpha) \\ &= 2imJ^P - \frac{g^2}{4\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu A_\nu \partial_\alpha A_\beta \end{aligned} \quad (5)$$

のようになっています。このカイラルアノマリーのことを Adler-Bell-Jackiw (ABJ) アノマリーと呼んだりもします。というわけで、カイラルアノマリーの存在によって $m = 0$ でも軸性カレントは保存しなくなっています。

カイラルアノマリーがこのように書ける理由を感覚的に説明します。カレントの式は基本的にガンマ行列をフェルミオン場で挟むようにして作られます。つまり、カレントとカレントの頂点の間に

$$J_\mu^A \Leftrightarrow \gamma_\mu \gamma_5$$

$$J^P \Leftrightarrow \gamma_5$$

という対応があります。なので、アノマリー項もこの対応から予想できます。アノマリー項では (4) から、カレントの頂点として

$$\frac{1}{2\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_\alpha p_\beta$$

みたいな形をしているのだと考えます。そうすると、カレントの形としては、ベクトル場 (カレントでは添え字が全部潰れている必要があるため) と微分演算子 (フーリエ変換後に運動量になるため) によって構成されるはずで、なので、ゲージ場 A_μ によって

$$\frac{1}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_\nu\partial_\alpha A_\beta$$

というような形にすればいいことになります。この式はファインマン図で言えば、頂点の両側に運動量 k, p のゲージ場の線がくっついているものです。

まとめると、古典的な軸性カレントの保存の式を量子論的な場合で見ると、古典的な軸性カレントの保存の式に余計な項が現われるということです。そのため、ベクトルカレントのワード・高橋恒等式と同じように導出した軸性カレント版 (2) は成立していません。この軸性カレントの保存式を壊す余計な項がカイラルアノマリーで、それはトライアングル図によって作られます。ちなみに、(2) が間違っていて導出された理由は、(2) の導出過程で部分積分によって表面積分項を無視したことが関係しています。

別の方法で軸性カレントの保存式がこのようになっていることを見ます。ここまでは演算子の形式で行ってききましたが、今度は経路積分で行います。ここでも $U(1)$ の可換ゲージ場 (電磁場) で行います。使う経路積分は

$$Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_T \right]$$

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$$

結合定数は g とします。今考えるのはカイラル変換に対する保存則なので、ゲージ場はほぼ関与しません。

カイラル変換 ($\lambda(x)$ は微小量)

$$\psi \Rightarrow e^{i\gamma_5\lambda(x)}\psi = (1 + i\gamma_5\lambda(x))\psi$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 \Rightarrow \psi^\dagger e^{-i\gamma_5\lambda(x)}\gamma_0 = \bar{\psi}e^{i\gamma_5\lambda(x)} = \bar{\psi}(1 + i\gamma_5\lambda(x))$$

をラグランジアンに使えば

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi &\Rightarrow i\bar{\psi}e^{i\gamma_5\lambda(x)}\gamma^\mu D_\mu e^{i\gamma_5\lambda(x)}\psi - m\bar{\psi}e^{2i\gamma_5\lambda(x)}\psi \\ &= i\bar{\psi}e^{i\gamma_5\lambda(x)}\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\gamma_5\lambda(x)}\psi - igA_\mu\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}e^{2i\gamma_5\lambda(x)}\psi \\ &= i\bar{\psi}e^{i\gamma_5\lambda(x)}\gamma^\mu e^{i\gamma_5\lambda(x)}\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}e^{i\gamma_5\lambda(x)}\gamma^\mu(\partial_\mu e^{i\gamma_5\lambda(x)})\psi - igA_\mu\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}e^{2i\gamma_5\lambda(x)}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\bar{\psi}e^{i\gamma_5\lambda(x)}\gamma^\mu(\partial_\mu e^{i\gamma_5\lambda(x)})\psi - igA_\mu\bar{\psi}\psi - m\bar{\psi}e^{2i\gamma_5\lambda(x)}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi + i\bar{\psi}e^{i\gamma_5\lambda(x)}\gamma^\mu(\partial_\mu e^{i\gamma_5\lambda(x)})\psi - m\bar{\psi}e^{2i\gamma_5\lambda(x)}\psi \end{aligned}$$

と変換されるので、ラグランジアン密度の変化分は λ の一次までで

$$\begin{aligned}
\int d^4x \delta \mathcal{L}_T &= \int d^4x [i\bar{\psi}\gamma^\mu i\gamma_5(\partial_\mu \lambda(x))\psi - 2i\lambda(x)m\bar{\psi}\gamma_5\psi] \\
&= \int d^4x [\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu i\gamma_5\partial_\mu \lambda(x)\psi) + \lambda(x)\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) - 2i\lambda(x)m\bar{\psi}\gamma_5\psi] \\
&= \int d^4x \lambda(x) [\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) - 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi]
\end{aligned}$$

これを Z に乗せれば

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_T + \delta \mathcal{L}_T) \right] \\
&= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \left(1 + i \int d^4x \delta \mathcal{L}_T \right) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_T \right]
\end{aligned}$$

なので、 Z がカイラル変換に対して不変であるためには、 $\delta \mathcal{L}_T = 0$ であればいいので

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) - 2im\bar{\psi}\gamma_5\psi = 0$$

よって

$$\partial^\mu J_\mu^A = 2imJ^P$$

となり、(1)と同じ軸性カレントに対する保存の式になります。これは経路積分の中にある式なので、真空期待値で挟んで書くことも出来て(相互作用のいるラグランジアンなので真空を $|\Omega\rangle$ で書きますが、摂動展開すれば $|0\rangle$ になる)

$$\langle \Omega | \partial^\mu J_\mu^A | \Omega \rangle = \langle \Omega | 2imJ^P | \Omega \rangle \quad (6)$$

となっています。しかし、この式は間違っていることを最初の話でしてきました。それでは、今度は何がいけなかったのかということになります。

この軸性カレントの保存の式を出すために、一つの仮定をしています。それは経路積分の測度がカイラル変換に対して変化しないというものです。この仮定が正しいのか調べます。カイラル変換はフェルミオン場に対してのみ行うので、ゲージ場 A_μ の測度は無視していきます。

まずフェルミオン場を

$$\psi(x) = \sum_n a_n \phi_n(x), \quad \bar{\psi}(x) = \sum_n \phi_n^\dagger(x) b_n$$

$$\int d^4x \phi_m^\dagger(x) \phi_n(x) = \delta_{mn}, \quad \sum_n \phi_n(x) \phi_n^\dagger(y) = \delta^4(x-y)$$

このように基底による完全性によって展開します。 a_n, b_n は展開係数で、フェルミオン場なのでグラスマン数です。 $\phi_n(x)$ は見て分かるように直交関係を持っています。そして、 $\phi_n(x)$ は通常の波動関数のように

$$\phi_n(x) = \langle x|n \rangle, \quad \phi_n^\dagger(x) = \langle n|x \rangle$$

$$\left(\psi(x) = \langle x|\psi \rangle = \sum_n \langle x|n \rangle \langle n|\psi \rangle = \sum_n a_n \phi_n(x) \right)$$

と定義します。これを使って、 a_n, b_n の測度になるように測度を書き換えます。グラスマン数の変数変換は「経路積分～ディラック場～」で示したように

$$\eta_i = \sum_{j,i} M_{ij} \alpha_j$$

という変換に対して

$$d\eta_1 d\eta_2 \cdots = (\det M)^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots$$

となるので

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi &= [\det(\langle i|x \rangle) \det(\langle x|j \rangle)]^{-1} \prod_n db_n da_n \\ &= [\det(\langle i|x \rangle \langle x|j \rangle)]^{-1} \prod_n db_n da_n \\ &= [\det \langle i|j \rangle]^{-1} \prod_n db_n da_n \\ &= [\det \delta_{ij}]^{-1} \prod_n db_n da_n \\ &= \prod_n db_n da_n \end{aligned}$$

行列式は x に対する積分を含むので三行目にいけます。よって測度は

$$\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_n db_n da_n$$

となります。

カイラル変換を行った後のフェルミオン場 $\psi'(x)$ も同じように展開できるので

$$\psi'(x) = \sum_n a'_n \phi(x)$$

となって、線形変換の行列 c_{nm} を使えば

$$\psi'(x) = \sum_{n,m} c_{nm} a_m \phi(x)$$

と書けます。 c_{nm} は

$$\psi'(x) = \langle x|\psi' \rangle = \sum_n \langle x|n \rangle \langle n|\psi' \rangle = \sum_n \langle x|n \rangle \langle n|c|\psi \rangle$$

となっていることから

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \sum_n \langle x|n \rangle \langle n|c|\psi \rangle \\ &= \sum_{n,m} \langle x|n \rangle \langle n|c|m \rangle \langle m|\psi \rangle \\ &= \sum_{n,m} c_{nm} a_m \phi_n(x) \quad (c_{nm} = \langle n|c|m \rangle, \quad a_m = \langle m|\psi \rangle) \end{aligned}$$

c_{nm} を積分の形で書けば

$$\begin{aligned} c_{nm} = \langle n|c|m \rangle &= \int d^4x d^4y \langle n|x \rangle \langle x|c|y \rangle \langle y|m \rangle \\ &= \int d^4x d^4y \phi_n^\dagger(x) c(x,y) \phi_m(y) \end{aligned}$$

このとき、 $c(x)$ がカイラル変換の演算子だとすれば、 λ の一次までで

$$\psi'(x) = c(x)\psi(x) = (1 + i\lambda(x)\gamma_5)\psi(x)$$

となっているので

$$c_{nm} = \delta_{nm} + i \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \lambda(x) \gamma_5 \phi_m(x)$$

のようになります。

この c_{nm} によって測度の変換は

$$da'_n = (\det c_{nm})^{-1} da_n$$

$$db'_n = (\det c_{nm})^{-1} db_n$$

元の ψ の場合に戻せば

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = (\det c_{nm})^{-2} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$$

というわけで、計算すべきなのは $\det c_{nm}$ です。これが 1 でないなら、カイラル変換に対して経路積分の測度は不変でないことになります。実際に $\det c_{nm}$ は 1 でなく余計な項を作ります。そのため、カイラル変換に対して測度が不変だと仮定して求められた (6) は不正確です。

行列式を

$$\log \det A = \text{tr} \log A$$

を使って変形すると

$$\begin{aligned} \det c_{nm} &= \exp[\text{tr} \log c_{nm}] \\ &= \exp \left[\text{tr} \log (\delta_{nm} + i \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \lambda(x) \gamma_5 \phi_m(x)) \right] \\ &= \exp \left[i \text{tr} \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \lambda(x) \gamma_5 \phi_m(x) \right] \\ &= \exp \left[i \sum_n \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \lambda(x) \gamma_5 \phi_n(x) \right] \\ &= \exp[iC'] \end{aligned}$$

最初のトレースにはスピノール成分に対するものも含まれていますが、 n の和だけで書いてしまっています。これの -2 乗がカイラル変換後の Z に余分な項としてくっついてきます。つまり、ラグランジアンに

$$\int d^4x \delta \mathcal{L}_{extra} = -2C' = -2 \sum_n \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \lambda(x) \gamma_5 \phi_n(x)$$

となって現われます。

ここで問題なのは、 n の和が収束してくれない点です。そのため、ガウス型の正則化を考えて

$$C' = \sum_n \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \lambda(x) \gamma_5 \phi_n(x) = \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \sum_n \int d^4x \phi_n^\dagger(x) \lambda(x) \gamma_5 \phi_n(x) e^{(\frac{\alpha_n}{M})^2}$$

とします。exp にいる α_n によって減衰させるようになっています。そして、計算の後に $M^2 \rightarrow \infty$ とすることで、元の式に戻るようになっています。減衰させるなら、exp 内はマイナスでなければいけないように思えますが、後でユークリッド空間に接続するので ($\alpha_n^2 = p^2 = -p_E^2$)、ここではプラスで問題ないです。最初からユークリッド空間で行うならマイナスに取ります。この正則化によってゲージ不変性が壊れないようにするために、 α_n は共変微分の演算子

$$i \not{D} \phi_n = i \gamma^\mu (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi_n = \alpha_n \phi_n$$

の固有値だとします。

フーリエ変換して運動量表示に持っていくと

$$\begin{aligned}
C' &= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \sum_n \int d^4x \lambda(x) \phi_n^\dagger(x) \gamma_5 e^{(\frac{i\mathcal{D}}{M})^2} \phi_n(x) \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \sum_n \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} \phi_n^\dagger(p) \phi_n(q) e^{-ipx} \gamma_5 e^{(\frac{i\mathcal{D}}{M})^2} e^{iqx} \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p d^4q}{(2\pi)^8} (2\pi)^4 \delta^4(p-q) \text{tr}[e^{-ipx} \gamma_5 e^{(\frac{i\mathcal{D}}{M})^2} e^{iqx}] \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \lambda(x) \text{tr}[e^{-ipx} \gamma_5 e^{(\frac{i\mathcal{D}}{M})^2} e^{ipx}]
\end{aligned}$$

運動量表示にしたので (平面波展開したのと同じ)、このトレースはスピノール成分に対するものです。exp[ipx] の位置は演算子 $\mathcal{D}$ がかかっているなので動かさせません。($i\mathcal{D}$)² を展開すると

$$\begin{aligned}
(i\mathcal{D})^2 &= -\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu \\
&= -\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) D_\mu D_\nu \\
&= -\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} D_\mu D_\nu - \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) D_\mu D_\nu \\
&= -g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4}(\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu D_\mu D_\nu + \gamma^\mu \gamma^\nu D_\nu D_\mu - \gamma^\nu \gamma^\mu D_\nu D_\mu) \\
&= -g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4}(\gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu D_\mu D_\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu D_\nu D_\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu D_\nu D_\mu) \\
&= -g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \\
&= -g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu - \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][D_\mu, D_\nu] \\
&= -D_\mu D^\mu + \frac{ig}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F_{\mu\nu} \quad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
&= -D^2 + \frac{ig}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} \\
&= -D^2 + \frac{g}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu])
\end{aligned}$$

D_μ の交換関係

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= \partial_\mu \partial_\nu - ig \partial_\mu A_\nu - ig A_\nu \partial_\mu - ig A_\mu \partial_\nu - g^2 A_\mu A_\nu \\
&\quad - (\partial_\nu \partial_\mu - ig A_\nu \partial_\mu - ig \partial_\nu A_\mu - ig A_\mu \partial_\nu - g^2 A_\mu A_\nu) \\
&= -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)
\end{aligned}$$

を使っています。 D^2 は

$$\begin{aligned}
D^2 &= \square - ig\partial^\mu A_\mu - igA^\mu\partial_\mu - igA^\mu\partial_\mu - g^2 A^2 \\
&= \square - ig\partial^\mu A_\mu - 2igA^\mu\partial_\mu - g^2 A^2
\end{aligned}$$

なので、 $\exp[ipx]$ に作用させると

$$\begin{aligned}
D^2 \exp[ipx] &= (-p^2 - ig\partial^\mu A_\mu + 2gA^\mu p_\mu - g^2 A^2) \exp[ipx] \\
&= -(p_\mu - gA_\mu)^2 - ig\partial^\mu A_\mu \exp[ipx]
\end{aligned}$$

これらを使うことで

$$\begin{aligned}
C' &= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[e^{-ipx} \gamma_5 \exp \left[\frac{-D^2 + \frac{g}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{M^2} \right] e^{ipx} \right] \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_5 \exp \left[\frac{-D^2}{M^2} + \frac{g}{2} \frac{\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{M^2} \right] \right] \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_5 \exp \left[\frac{(p_\mu - gA_\mu)^2}{M^2} + \frac{ig\partial^\mu A_\mu}{M^2} + \frac{g}{2} \frac{\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{M^2} \right] \right] \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} M^4 \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_5 \exp \left[p'^2 + \frac{ig\partial^\mu A_\mu}{M^2} + \frac{g}{2} \frac{\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{M^2} \right] \right] \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} M^4 \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{p^2} \text{tr} \left[\gamma_5 \exp \left[\frac{ig\partial^\mu A_\mu}{M^2} + \frac{g}{2} \frac{\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{M^2} \right] \right]
\end{aligned}$$

途中で変数変換 $p_\mu - gA_\mu = Mp'_\mu$ を行っています。

残っているスピノール成分に対するトレースを計算します。トレース内の $\exp$ 部分は、 $M^2 \rightarrow \infty$ だとして展開します。 M^4 が外にいたので M^{-5} 以上の項は十分無視できます。また、 $\exp$ 内の第一項はトレースを取れば消えます ($\text{tr}\gamma_5 = 0$)。なので、第二項部分のトレースを計算するために $\exp$ 部分を展開すると

$$\gamma_5 \exp \left[\frac{ig}{2} \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}}{M^2} \right] = \gamma_5 \left(1 + \frac{ig}{2} \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu}}{M^2} - \frac{1}{2} \frac{g^2}{4} \frac{1}{M^4} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} - \dots \right)$$

このトレースを取って生き残れるのは第三項だけで

$$\text{tr}[\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta] = -4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$$

よって

$$\begin{aligned}
C' &= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} M^4 \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{p^2} \text{tr} \left[\gamma_5 \exp \left[\frac{g}{2} \frac{\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{M^2} \right] \right] \\
&= \lim_{M^2 \rightarrow \infty} M^4 \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{p^2} \left[-\frac{1}{2} \frac{g^2}{4} \frac{-4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{M^4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right] \\
&= \frac{ig^2}{2} \int d^4x \lambda(x) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{p^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

p の積分は

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{p^2} &= \frac{i}{16\pi^4} \int d^4p_E e^{-p_E^2} = \frac{i2\pi^2}{16\pi^4} \int_0^\infty dp_E p_E^3 e^{-p_E^2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{i2\pi^2}{16\pi^4} \int_0^\infty dp_E^2 p_E^2 e^{-p_E^2} \\
&= \frac{i}{16\pi^2}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
C' &= \frac{ig^2}{2} \frac{i}{16\pi^2} \int d^4x \lambda(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \\
&= -\frac{g^2}{32\pi^2} \int d^4x \lambda(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

よって $\det c_{nm}$ は

$$\det c_{nm} = \exp[iC'] = \exp \left[-\frac{ig^2}{32\pi^2} \int d^4x \lambda(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right]$$

つまりカイラル変換前と後での測度は $\lambda(x)$ の一次で

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' &= (\det c_{nm})^{-2} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \\
&= \exp \left[\frac{ig^2}{16\pi^2} \int d^4x \lambda(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right] \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \\
&= \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \left(1 + \frac{ig^2}{16\pi^2} \int d^4x \lambda(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right)
\end{aligned}$$

これを経路積分に使うことで、カイラル変換後の形として

$$\begin{aligned}
Z &= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_T \right] \\
&\Rightarrow \int \mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_T + \delta \mathcal{L}_T) \right] \\
&= \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \left(1 + \frac{ig^2}{16\pi^2} \int d^4x \lambda(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right) \left(1 + i \int d^4x \delta \mathcal{L}_T \right) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_T \right]
\end{aligned}$$

なので、 $\lambda(x)$ の一次まででの Z の変化分 δZ は

$$\begin{aligned}
\delta Z &= i \int d^4x \lambda(x) \left[\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) - 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi \right] \\
&= i \int d^4x \lambda(x) \left[\frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + \partial^\mu J_\mu^A - 2im J^P \right]
\end{aligned}$$

よって

$$\partial^\mu J_\mu^A = 2im J^P - \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$$

これは (5) と同じ結果です。というわけで、経路積分におけるアノマリーは測度が変換によって変化することによって生じています。ワード・高橋恒等式が QED で成立しているのは経路積分の測度がゲージ変換に対して不変だと出来るためです。つまり、カレントの保存式が量子論的に成立するためには、経路積分の測度の変換に対して不変でなければならないということです。

カイラル変換後の経路積分 Z' の形は

$$Z' = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}_T + \delta \mathcal{L}_T + \delta \mathcal{L}_{extra}) \right]$$

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi$$

$$\delta \mathcal{L}_T = \lambda(x) (\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) - 2im \bar{\psi} \gamma_5 \psi)$$

$$\delta \mathcal{L}_{extra} = \frac{g^2}{16\pi^2} \lambda(x) \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$$