表記と定義

ここでは記号の定義や、計算する上で必要なもの、公式等を羅列しておきます。
基本的な定義

- 記号

c : 光速 , $\hbar$: プランク定数 , $\dagger$: エルミート共役 , I : 単位行列 (もしくは単に 1 と書きます)

4 元ベクトル : X_μ

共変ベクトル : X_μ

反変ベクトル : X^μ

3 元ベクトル : $X^i = \boldsymbol{X}$

$\not{a} = \gamma_\mu a^\mu$, $\not{\partial} = \gamma_\mu \partial^\mu = \gamma^0 \dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla$

ギリシャ文字の添え字 : 特に断らない限り 0〜3

ローマ文字の添え字 : 特に断らない限り 1〜3

アインシュタインの既約

$$\sum_{\mu=0}^{3} X_\mu Y^\mu = X_0 Y^0 + X_1 Y^1 + X_2 Y^2 + X_3 Y^3 = X_\mu Y^\mu = X \cdot Y$$

3 次元に限定するときは添え字の位置が無関係になるので、上付き下付きで区別せる同じ位置でも和を取るようにします。例えば

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

４元ベクトルと言っている場合は、ローレンツの 4 元ベクトルを意味しています (相対論的量子力学の「クライン・ゴルドン方程式」の始めの方参照)。

– ラグランジアン密度、ハミルトニアン密度をラグランジアン、ハミルトニアンと呼んでいることが多いです。
– ナブラ ∇ は特に断らない限り 3 次元空間の微分演算子です。
– あまり一般的ではないですが、exp の肩に乗っかっている $p \cdot x$ のようなものは「$\cdot$」を省いて

$$\exp[ip \cdot x] = \exp[ipx]$$

と書いています (単に面倒だったのと、e の肩の中に小さな点があってもなくても雰囲気で分かるだろうという勝手な判断からです)。
– n 次元積分において積分範囲が書いていないものは特に注意しない限り全空間積分です。例えば、3 次元では ($\boldsymbol{x}$ を 3 次元ベクトルとして)

$$\int d^3x = \int_0^\infty d|\boldsymbol{x}| \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \ |\boldsymbol{x}| \sin\theta$$

– フーリエ変換したものに対して同じ記号を使っています。例えば、$\psi(x)$ のフーリエ変換は $\psi(p)$、位置表示の伝播関数 $D(x-y)$ の運動量表示を $D(p)$ のようにして、変数で区別しています。
– ラグランジアンにおいて運動エネルギーに対応する項を運動項 (kinetic term) と呼びます。例えば $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ のような項のことです。
– 運動量と言ったときにエネルギーも含めていることもあります (4 元運動量の中にエネルギーが含まれているため)。特に、エネルギー・運動量保存は運動量保存としている場合が多いです。
– 演算子の真空期待値を基本的に $\langle 0|AB\cdots|0\rangle$ と書きます。もしくは、明確に相互作用がある場合の真空期待値ということを表したいときには $\langle \Omega|AB\cdots|\Omega\rangle$ と書きます。また、どちらの場合でも省略して $\langle AB\cdots\rangle$ と書く場合もあります。
– 電磁気ではヘヴィサイド・ローレンツ単位系を使っています。

- 計量

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_{\ \nu}$$

- ミンコフスキー時空でのベクトルと内積

  4 元位置ベクトル : $x_\mu = (ct, x_i) = (ct, -\boldsymbol{x})$, $x^\mu = (ct, x^i) = (ct, \boldsymbol{x})$

  4 元運動量ベクトル : $p_\mu = (p_0, p_i) = (p_0, -\boldsymbol{p})$, $p^\mu = (p^0, p^i) = (p_0, \boldsymbol{p})$, $p_0 = \dfrac{E}{c}$

  内積

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = (ct)^2 - \big((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2\big) = (ct)^2 - \boldsymbol{x}^2$$

$$p^\mu x_\mu = Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}$$

- 微分演算子

$$\partial^\mu = \Big(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\Big) = \Big(\frac{\partial}{c\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\Big) = \Big(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla\Big)$$

$$\partial_\mu = \Big(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\Big) = \Big(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\Big)$$

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = (\frac{\partial}{c\partial t})^2 - \nabla^2 \qquad \text{(ダランベルシャン)}$$

- レヴィ・チビタ記号

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(\begin{array}{l} +1 \text{ 偶置換（}\alpha,\beta,\gamma,\delta\text{の並びに対して)} \\ -1 \text{ 奇置換（〃)} \\ 0 \text{ それ以外の場合（〃)} \end{array}\right.$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = 2(\delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu - \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu)$$

  例えば

$$\epsilon^{0123} = \epsilon^{3012} = -\epsilon^{0132} \ , \ \epsilon^{0012} = \epsilon^{0122} = \epsilon^{1333} = 0$$

  3 次元の場合

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

- パウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  関係

$$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=I$$

$$\sigma_1\sigma_2=i\sigma_3\ ,\ \sigma_3\sigma_1=i\sigma_2\ ,\ \sigma_2\sigma_3=i\sigma_1$$

$$[\sigma_i,\sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

$$[\sigma_1,\sigma_2]=2i\sigma_3\ ,\ [\sigma_3,\sigma_1]=2i\sigma_2\ ,\ [\sigma_2,\sigma_3]=2i\sigma_1$$

$$\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i=2\delta_{ij}$$

$$(\sigma_iA_i)(\sigma_jB_j)=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

4 元ベクトルにしないで 3 次元だけならパウリ行列の添え字には上付きと下付きの区別はないです。

・4 元ベクトルのパウリ行列 $\sigma^\mu=(\sigma^0,\sigma^i)=(\sigma^0,\boldsymbol{\sigma})$

$$\sigma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\ \sigma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_\mu\sigma^\mu=-2\sigma_0$$

$$\mathrm{tr}[\sigma_\mu\sigma_\nu]=2\delta_{\mu\nu}$$

3 次元でのパウリ行列では σ_i と書いていたのを、ここでは 4 元ベクトルの定義に従って σ^i と書いています。

- トレース

トレース (対角和) は $N\times N$ 行列 A に対して

$$\mathrm{tr}[A]=\sum_{i=1}^{N}A_{ii}$$

関数 $F(x,y)$ のトレースと言ったとき、例えば 4 次元では

$$\mathrm{tr}[F(x,y)]=\int d^4xd^4yF(x,y)\delta^4(x-y)=\int d^4xF(x,x)$$

のことを意味します。

- 自然単位系

$$\hbar=c=1$$

$$\hbar = 1.055 \times 10^{-34}[\mathrm{J \cdot s}] \ , \ c = 2.998 \times 10^{8}[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$$

$$\text{ジュール：}[\mathrm{J}] = [\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}]$$

エネルギーの単位はエレクトロンボルト (電子ボルト)eV を使います。ジュールとの関係は

$$1[\mathrm{eV}] = 1.602 \times 10^{-19}[\mathrm{J}]$$

素粒子での典型的なエネルギーは 1[eV] より大きいので、$1[\mathrm{MeV}] = 10^6[\mathrm{eV}]$, $1[\mathrm{GeV}] = 10^9[\mathrm{eV}]$ が使われます。

この単位系によって全ての次元は、質量もしくは長さの次元によって表わせます。長さ、質量、時間の単位を、長さ L、質量 M、時間 T として、例えば時間 t の次元は

$$t[T] \ \Rightarrow \ ct = [L]$$

長さと質量の関係は

$$m[M] \ \Leftrightarrow \ \frac{mc}{\hbar}[L^{-1}] \ \ , \ \ \frac{1}{m}[M^{-1}] \ \Leftrightarrow \ \frac{\hbar}{mc}[L]$$

質量 m、運動量 mc、エネルギー mc^2 の単位は GeV で、長さは GeV^{-1}。

自然単位系と MKS 単位系での単位の関係は

$$1[\mathrm{kg}] = 5.61 \times 10^{26}[\mathrm{GeV}] = 5.61 \times 10^{26}\frac{\mathrm{GeV}}{c^3}$$

$$1[\mathrm{m}] = 5.07 \times 10^{15}[\mathrm{GeV^{-1}}] = 5.07 \times 10^{15}\frac{\hbar c}{\mathrm{GeV}}$$

$$1[\mathrm{s}] = 1.52 \times 10^{24}[\mathrm{GeV}] = 1.52 \times 10^{24}\frac{\hbar}{\mathrm{GeV}}$$

真ん中が自然単位系、一番右側のが MKS 単位系にするために $\hbar, c$ を戻した場合です。

長さと質量間の換算は

$$\frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2}$$

$$\hbar c = 197 \times 10^{-15}[\mathrm{MeV \cdot m}]$$

例えば $mc^2 = 1[\mathrm{GeV}]$ なら $1.97 \times 10^{-16}[\mathrm{m}]$。

＊これ以降は自然単位系を使用

- クライン・ゴルドン方程式

・ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (\text{実数})$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi \quad (\text{複素数})$$

・クライン・ゴルドン方程式

$$(\Box + m^2)\phi = 0$$

・伝播関数

$$\left(\Box + m^2 - i\epsilon\right) D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$$

$$D(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

運動量表示と位置表示はフーリエ変換で繋がっています。伝播関数での $i\epsilon$ は m を $m - i\epsilon$ と置き換えることで出てきます。

- ディラック方程式

・ラグランジアン密度
$\mathcal{L} = i\psi^\dagger\dot{\psi} + i\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi - m\psi^\dagger\beta\psi = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi$

ψ は 4 成分スピノール、$\boldsymbol{\alpha}(\alpha_i,\ i = 1,2,3), \beta$ の満たす関係は

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$$

γ_μ は 4×4 行列、$\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$、$\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta\alpha_i$(γ 行列の項参照)。α_i には添え字の上付き下付きの区別はないです。ディラック方程式の m には 4×4 単位行列がいますが、省略しています。

・ディラック方程式

$$i\dot{\psi} + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi - m\beta\psi = 0$$

$$i\dot{\psi}^\dagger + i\nabla\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha} + m\psi^\dagger\beta = 0$$

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0$$

$$\overline{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$$

・伝播関数

$$(i\not{\partial} - m)S(x-y) = i\delta^4(x-y)$$

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

・ψ の平面波

$$\psi^{1,2} = u^{1,2}e^{-ipx}\ ,\ \psi^{3,4} = v^{1,2}e^{ipx}$$

フーリエ係数 $u^s(s=1,2)$ は正エネルギー解、$v^s(s=1,2)$ は負エネルギー解に対応。
規格化を

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}$$

とした場合での u^s, v^s の関係 $(p_0 = E_{\boldsymbol{p}})$

$$\overline{u}^r(p)v^s(p) = \overline{v}^r(p)u^s(p) = 0\ ,\ u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(-\boldsymbol{p}) = v^{r\dagger}(-\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = 0$$

$$u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2E\delta^{rs}\ ,\ v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2E\delta^{rs}$$

$$\overline{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs}\ ,\ \overline{v}^r(p)v(p) = -2m\delta^{rs}$$

$$\sum_{r=1,2} u^r\overline{u}^r = \gamma_\mu p^\mu + m\ ,\ \sum_{r=1,2} v^r\overline{v}^r = \gamma_\mu p^\mu - m$$

・γ 行列の関係

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\ ,\ \gamma^0 = \gamma_0$$

$$(\gamma^i)^\dagger = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 = -\gamma^i\ ,\ (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$$

$$\gamma^{i\dagger} = (\gamma^i)^{-1}$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5\ ,\ \gamma^5 = \gamma_5\ ,\ (\gamma^5)^2 = 1$$

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$$

・内積

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma^\mu = 4I \\
&\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a} \\
&\gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma^\mu = 4a\cdot bI \\
&\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a} \\
&\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\not{d} \gamma^\mu = 2\not{d}\not{a}\not{b}\not{c} + 2\not{c}\not{b}\not{a}\not{d}
\end{aligned}$$

・ディラック・パウリ表現

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

パウリ行列は $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)$。

・ワイル表現

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}\ ,\ \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

パウリ行列は $\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i)$。

・トレース公式

$$\mathrm{tr}[\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_n]=0 \quad (n\text{ は奇数})$$

$$\mathrm{tr}[\not{a}\not{b}]=4a\cdot b$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^5]=0$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^5\not{a}\not{b}]=0$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma]=4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}+g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}-g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$$

$$\mathrm{tr}[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}]=4((a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c))$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma]=-4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}]=-4i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$$

$$\mathrm{tr}[\not{a}_1\not{a}_2\cdots\not{a}_{2n}]=\mathrm{tr}[\not{a}_{2n}\cdots\not{a}_2\not{a}_1]$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu\not{a}\gamma^\nu\not{b}]=4(a^\mu b^\nu+a^\nu b^\mu-(a\cdot b)g^{\mu\nu})$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{a}\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{b}]=2\mathrm{tr}[\gamma^\mu\not{a}\gamma^\nu\not{b}]-8i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta}a_\alpha b_\beta$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu\not{a}\gamma^\nu\not{b}]\times\mathrm{tr}[\gamma_\mu\not{c}\gamma_\nu\not{d}]=32[(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)]$$

$$\mathrm{tr}[\gamma^\mu(1-\gamma^5)\not{a}\gamma^\nu(1-\gamma^5)\not{b}]\times\mathrm{tr}[\gamma_\mu(1-\gamma^5)\not{c}\gamma_\nu(1-\gamma^5)\not{d}]=256(a\cdot c)(b\cdot d)$$

・双線形の C,P,T 変換

スカラー (S) : $\overline{\psi}\psi$、擬スカラー (P) : $\overline{\psi}i\gamma_5\psi$、ベクトル (V) : $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$、軸性ベクトル (A) : $\overline{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$、2 階のテンソル (T) : $\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi'$ $(\sigma_{\mu\nu}=i[\gamma_\mu,\gamma_\nu]/2)$ の C,P,T 変換の結果です。導出は「C,P,T 変換」を見てください。

・P 変換 (空間反転)

$$S\ :\ \overline{\psi}(x)\psi(x)\ \Rightarrow\ \overline{\psi}(t,-\boldsymbol{x})\psi(t,-\boldsymbol{x})$$

$$P\ :\ \overline{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)\ \Rightarrow\ -\overline{\psi}(t,-\boldsymbol{x})i\gamma_5\psi(t,-\boldsymbol{x})$$

$$V\ :\ \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\ \Rightarrow\ \overline{\psi}(t,-\boldsymbol{x})\gamma^{\mu\dagger}\psi(t,-\boldsymbol{x})$$

$$A\ :\ \overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x)\ \Rightarrow\ -\overline{\psi}(t,-\boldsymbol{x})\gamma_5\gamma^{\mu\dagger}\psi(t,-\boldsymbol{x})$$

$$T\ :\ \overline{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi'(x)\ \Rightarrow\ \overline{\psi}(t,-\boldsymbol{x})\gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_0\psi(t,-\boldsymbol{x})=\overline{\psi}(t,-\boldsymbol{x})\sigma^\dagger_{\mu\nu}\psi(t,-\boldsymbol{x})$$

・T 変換 (時間反転)

$$S \ : \ \overline{\psi}(x)\psi(x) \ \Rightarrow \ \overline{\psi}(-t,\boldsymbol{x})\psi(-t,\boldsymbol{x})$$

$$P \ : \ \overline{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x) \ \Rightarrow \ -\overline{\psi}(-t,\boldsymbol{x})i\gamma_5\psi(-t,\boldsymbol{x})$$

$$V \ : \ \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \ \Rightarrow \ \overline{\psi}(-t,\boldsymbol{x})\gamma_\mu^\dagger\psi(-t,\boldsymbol{x})$$

$$A \ : \ \overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) \ \Rightarrow \ \overline{\psi}(-t,\boldsymbol{x})\gamma_5\gamma_\mu^\dagger\psi(-t,\boldsymbol{x})$$

$$T \ : \ \overline{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi'(x) \ \Rightarrow \ -\overline{\psi}(-t,\boldsymbol{x})\sigma_{\mu\nu}^\dagger\psi(-t,\boldsymbol{x})$$

・C 変換 (荷電共役)

$$S \ : \ \overline{\psi}(x)\psi(x) \ \Rightarrow \ \overline{\psi}(x)\psi(x)$$

$$P \ : \ \overline{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x) \ \Rightarrow \ \overline{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)$$

$$V \ : \ \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \ \Rightarrow \ -\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

$$A \ : \ \overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) \ \Rightarrow \ \overline{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$$

$$T \ : \ \overline{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x) \ \Rightarrow \ -\overline{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)$$

- ワイル方程式

・ワイル方程式

$$i\gamma_\mu\partial^\mu\psi = \begin{pmatrix} 0 & i(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma^i\nabla_i) \\ i(\frac{\partial}{\partial t} - \sigma^i\nabla_i) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0$$

ψ_L : 左巻きフェルミオン

ψ_R : 右巻きフェルミオン

γ 行列はワイル表現

・ヘリシティ

ヘリシティ演算子 h

$$h = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \ \cdots \ (\text{スピンの運動量方向成分})$$

$$h\psi_L = -\psi_L \ , \ h\psi_R = \psi_R$$

ψ_L : ヘリシティ-1(左巻き) , ψ_R : ヘリシティ$+1$(右巻き)

ψ_L, ψ_R の射影演算子 P_L, P_R

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\ ,\ P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5)$$

$$P_L\psi = \psi_L\ ,\ P_R\psi = \psi_R$$

$$\psi = \psi_L + \psi_R = P_L\psi + P_R\psi$$

P_L, P_R の関係

$$\begin{aligned}
&(1+\gamma^5)(1-\gamma^5) = 0\\
&P_R^2 = P_R\ ,\ P_L^2 = P_L\\
&P_R P_L = \frac{1}{4}(1+\gamma^5)(1-\gamma^5) = \frac{1}{4}(1-1) = 0\\
&P_R + P_L = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) + \frac{1}{2}(1-\gamma^5) = 1
\end{aligned}$$

・カイラリティ演算子 γ_5

$$\gamma_5\psi_L = -\psi_L\ ,\ \gamma_5\psi_R = \psi_R$$

- マクスウェル方程式
  ヘヴィサイド・ローレンツ単位系を使います。電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 (磁束密度)$\boldsymbol{B}$、電荷密度 ρ、電流密度 $\boldsymbol{J}$。

・ベクトルポテンシャル

$$A_\mu = (A_0, -\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla A_0$$

・電磁場テンソル

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^*F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ B^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ B^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ B^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(双対テンソル)}$$

・ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$$

・真空でのマクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \ , \ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \ , \ \nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{J}$$

・ベクトルポテンシャルによるマクスウェル方程式

$$\Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = J^\nu$$

・電磁場テンソルによるマクスウェル方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = \partial_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0$$

・光子の伝播関数

$$\left(g_{\mu\nu}\Box + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\partial_\mu\partial_\nu\right)D^{\nu\lambda}(x-y) = \delta^4(x-y)\delta_\mu^\lambda$$

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon}\left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon}\right)$$

$\alpha = 1$ はファインマンゲージ、$\alpha = 0$ はランダウゲージ。

- プロカ方程式
  - ・ラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu$$

  - ・プロカ方程式

$$\Box A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) + m^2 A^\mu = J^\mu$$

  - ・伝播関数

$$(\Box - \partial^\mu \partial_\nu + m^2) D_{\mu\nu}(x-y) = \delta^4(x-y)\delta_{\mu\nu}$$

$$D_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2 - i\epsilon})$$

- 汎関数
  - ・汎関数微分

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \delta(x-y)$$

連鎖則

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} = \int dx \frac{\delta\phi(x)}{\delta J(y)}\frac{\delta}{\delta\phi(x)}$$

  - ・テーラー展開 ($\phi = 0$ まわり)

$$F[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \frac{\delta^n F[\phi]}{\delta\phi(x_1)\cdots\delta\phi(x_n)}|_{\phi=0}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)$$

- ガウス積分
  - ・n 次元ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \exp[-x_i A_{ij} x_j] = \pi^{n/2}(\det A)^{-\frac{1}{2}} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots n)$$

行列 A_{ij} は n 次元実数行列 (エルミート)

・経路積分でのガウス型積分

$$\text{ボソン ：} \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[-\int d^4x d^4y \phi(x) D(x,y) \phi(y)\Big] = N(\det D)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{フェルミオン ：} \int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\Big[-\int d^4x d^4y \overline{\psi}(x) D(x,y) \psi(y)\Big] = N \det D$$

$$\Big(\int \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi = \int d\overline{\psi}_1 d\psi_1 d\overline{\psi}_2 d\psi_2 \cdots\Big)$$

ψ はグラスマン数、N は定数。

- 知ってると便利な関係

・伝播関数の主値による関係式

$$\frac{1}{p^2 - m^2 \pm i\epsilon} = P\frac{1}{p^2 - m^2} \mp i\pi\delta^4(p^2 - m^2)$$

$$\Big(\frac{1}{x - y \pm i\epsilon} = P\frac{1}{x - y} \mp i\pi\delta(x - y)\Big)$$

P は主値を表します。

・行列 A に対して

$$\log\det A = \mathrm{tr}\log A$$