

非可換ゲージ場の漸近的自由

非可換ゲージの場合でのくり込み群方程式から、running coupling constant を求めます。running coupling constant が知りたいなら、単純にくり込み群方程式の β についてだけを見ればいいので簡単に振る舞いを求めることができます。

非可換ゲージ場での 1 ループの計算のところで示したように、くり込み定数は

$$Z_1 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}(C_2(G) + C_2(F))$$

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}C_2(F)$$

$$Z_3 = 1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon}\left(\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{2}{3}N_f\right)$$

$$C_2(F) = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C_2(G) = N \quad (SU(N))$$

そして、結合定数へのくり込みの構造は QED と同じなので

$$g_B = \mu^{\epsilon/2} g Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2}$$

となります (g_B が裸の結合定数で、 g がくり込まれたものです)。QED と違うのは $Z_1 = Z_2$ となっていない点です。これに 1 ループでの Z_1, Z_2, Z_3 を入れれば、 g が微小だということから (QCD だと思って $SU(3)$ とし、 $C_2(F) = \frac{4}{3}, C_2(G) = 3$ 。また、フレーバー数 N_f は固定せずに行います)

$$\begin{aligned} g_B &= \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{13}{3}\right) \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{4}{3}\right)^{-1} \left(1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(5 - \frac{2}{3}N_f\right)\right)^{-1/2} \\ &\simeq \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{13}{3}\right) \left(1 + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{4}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(5 - \frac{2}{3}N_f\right)\right) \end{aligned}$$

ここから先は括弧の部分を展開していくんですが、これ以降 g^2 のオーダーまでしか拾わないようにして

$$\begin{aligned} g_B &\simeq \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{13}{3} + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{4}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(5 - \frac{2}{3}N_f\right)\right) \\ &= \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{13}{3} + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{4}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(5 - \frac{2}{3}N_f\right)\right) \\ &= \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{13}{3} + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(5 - \frac{2}{3}N_f\right)\right) \\ &= \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{9}{3} - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}N_f\right)\right) \\ &= \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{11}{2} + \frac{g^2}{8\pi^2\epsilon} \frac{1}{3}N_f\right) \\ &= \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} \left(11 - \frac{2}{3}N_f\right)\right) \end{aligned}$$

これを μ で微分すると (g_B は μ に依存してなく、 g は依存している。また $11 - 2N_f/3 = A$ と書きます)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\epsilon}{2} \mu^{\epsilon/2-1} g \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} A\right) + \mu^{\epsilon/2} \frac{\partial g}{\partial \mu} \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} A\right) - \mu^{\epsilon/2} \frac{\partial g}{\partial \mu} g \frac{2g}{16\pi^2\epsilon} A \\
&= \frac{\epsilon}{2} \mu^{\epsilon/2-1} g \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} A\right) + \mu^{\epsilon/2} \frac{\partial g}{\partial \mu} \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} A\right) - \mu^{\epsilon/2} \frac{\partial g}{\partial \mu} \frac{2g^2}{16\pi^2\epsilon} A \\
\frac{\partial g}{\partial \mu} \mu^{\epsilon/2} \left(1 - \frac{3g^2}{16\pi^2\epsilon} A\right) &= -\frac{\epsilon}{2} \mu^{\epsilon/2} g \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} A\right) \\
\frac{\partial g}{\partial \mu} &= -\frac{\epsilon}{2} \mu^{-1} g \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} A\right) \left(1 - \frac{3g^2}{16\pi^2\epsilon} A\right)^{-1} \\
&= -\frac{\epsilon}{2} \mu^{-1} g \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2\epsilon} A + \frac{3g^2}{16\pi^2\epsilon} A + \dots\right) \\
&\simeq -\mu^{-1} g \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{2g^2}{32\pi^2} A\right)
\end{aligned}$$

$\epsilon \rightarrow 0$ とすることで

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = -\mu^{-1} \frac{g^3}{16\pi^2} A$$

というわけで、 β は

$$\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3} N_f\right)$$

となります。ここで気が付くことがあって、 ϕ^4 理論や QED では β は正の値しかとらないような形をしていましたが、今度は違っています。式を見て分かるように、 N_f が 17 以上にならない限り、 β はマイナスの値を持っています。このことは、 ϕ^4 理論でのくり込み群方程式のところで触れたように、非可換ゲージでの結合定数は高いエネルギーで 0 に向かっていく漸近的自由になっていることを示しています。言い換えれば、QCD において、フレーバ数が 16 を超えない限り理論は漸近的自由になっているということです (今のところフレーバ数は 16 以下だと考えられている)。この点が QCD での利点で、摂動展開が高エネルギー側で何の問題もなく実行することができます。しかも、高エネルギーでなら相互作用が限りなく小さくなるために、自由粒子として記述できる状況も作れます (パートン模型)。

ここで問題になってくるのは、高エネルギーでは結合定数が小さくなってくれるが、低エネルギー側ではそんな上手いこと振舞ってくれてなく結合定数は大きくなっている (強結合) ということです。そのために、摂動論が低エネルギー側では使えなくなっています。しかし、低エネルギーで結合定数が大きくなるという性質によって現象を説明することができます。それが、現代物理の問題の 1 つであるハドロンの閉じ込めです。

低エネルギーというのは言い換えれば長距離での現象であるので、この低エネルギーで結合定数が大きくなるという振る舞いとハドロンの閉じ込められるというのが関連しているのが分かります。つまり、ハドロンの中にクォークとグルーオンが閉じ込められているという現象は、距離が開いてくると結合定数が大きくなり離れることが出来ずに閉じ込められるという解釈によって成り立たせることが出来ます。

しかし、摂動論から言えることはここまでで、いったいどんな構造を持って閉じ込めが働いているのかとか、振る舞いというのは見る事が出来ません。そのために、格子場の理論のような非摂動的方法が必要になり、現在でもいろいろな計算が行われている未解決領域の 1 つです。

ちなみに、摂動的、非摂動的と言っていますが、何がなんなのかというのを一応言っておきます。摂動的と言っているのは、分かりやすい状況で言えば、経路積分を結合定数が小さいとして展開し経路積分を計算しようというものです。それに対して非摂動的というのは、結合定数で展開せずに経路積分を計算しようというものです (n 点関数は経路積分から求められるのでやってることは同じ)。非摂動的な経路積分の最も直接的な計算方法が格子場

の理論です。経路積分は時空を微小区間で区切り、その連続極限として作られているために、数学的に連続極限を取る前の状況なら数値的に計算を行える（この状況でならプログラムを作るうえでの制約がない）という発想の元に格子場の理論は作られています。

他にも違うアプローチとして、最近では弦理論によって出てきた発想 (D ブレーン) を使った方法も発展してきています。AdS/CFT (Anti de Sitter/Conformal Field Theory) 対応というのを利用することで、QCD での低エネルギー側 (強結合領域) を記述できているだろうとされる Holographic QCD というのも作られています (例えば、酒井・杉本模型。酒井・杉本模型についての論文は hep-th/0412141 で見る事が出来ます)。

最後に、running coupling constant g がどのような格好しているのかも見ておきます。そのためには

$$\mu \frac{dg(\mu)}{d\mu} = -g^3(\mu)A' \quad (A' = \frac{1}{16\pi^2}(11 - \frac{2}{3}N_f))$$

を解けばいいです。 $\log \mu = s$ とすれば

$$\begin{aligned} \frac{dg(s)}{ds} &= -g^3(s)A' \\ \frac{1}{g^3} \frac{dg(s)}{ds} &= -A' \\ -\frac{1}{2} \frac{d}{ds} g^{-2} &= -A' \\ \frac{d}{ds} g^{-2} &= 2A' \\ g^{-2} &= 2A's + C \end{aligned}$$

$s = s_0$ で $g = g_0$ となるとすれば

$$g^{-2} = 2A's - 2A's_0 + g_0^{-2}$$

よって

$$\begin{aligned} g^{-2} &= g_0^{-2}(1 + 2g_0^2 A'(s - s_0)) \\ g^2 &= \frac{g_0^2}{1 + 2g_0^2 A'(s - s_0)} \end{aligned}$$

ここで、運動量 Q_μ を導入して運動量のスケール変換 s を

$$s = \log \frac{\sqrt{Q^2}}{\mu_0}$$

とすることで、運動量のスケールを定義します (μ_0 は適当な固定された運動量とします)。 s_0 は $Q^2 = \mu_0^2$ となる場合として $s_0 = 0$ 。これを使うことで

$$\begin{aligned}
g^2 &= \frac{1}{2g_0^2 A'} \frac{g_0^2}{\frac{1}{2g_0^2 A'} + s} \\
&= \frac{1}{2A'} \frac{1}{\frac{1}{2g_0^2 A'} + \log \frac{\sqrt{Q^2}}{\mu_0}} \\
&= \frac{1}{2A'} \frac{1}{\frac{1}{2g_0^2 A'} + \log \sqrt{Q^2} - \log \mu_0} \\
&= \frac{1}{2A'} \frac{1}{\log \sqrt{Q^2} - \log \Lambda} \quad (\log \Lambda = \log \mu_0 - \frac{1}{2A'g_0^2}) \\
&= \frac{1}{A'} \frac{1}{\log Q^2 - \log \Lambda^2} \\
&= \frac{1}{A'} \frac{1}{\log \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \\
&= \frac{16\pi^2}{(11 - \frac{2}{3}N_f) \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}}
\end{aligned}$$

ここで新しく作られたスケールパラメータ

$$\Lambda = \mu_0 \exp\left[-\frac{1}{2A'g_0^2}\right]$$

のことを QCD スケールと呼んでいます。このパラメータは実験によって決定されるものなので、理論的には決定できません。現在のところ大体 100 ~ 300MeV 程度だとされています。

また、この QCD スケールは式の形を見て分かるように、 g_0 を Λ によって表現することができます。そのために、ラグランジアンでの結合定数を Λ に置き換えることが出来ます。このようなことは無次元の量が、適当な次元のある量 (例えば質量。今の場合では Λ) を決めることで固定されてしまうために起きているものです。このように、次元のない量を次元のある量に置き換えることを dimensional transmutation と呼んでいます。

さらに QCD では、この QCD スケール Λ によって結合定数が制御されているということから、質量次元 d を持つ物理量は

$$C\Lambda^d$$

と表現できるという定理があります (C は定数)。