

背景場の方法

生成汎関数をゲージ不変にして計算する背景場の方法を見ていきます。

通常のゲージ場のラグランジアンはゲージ不変性を持っていません。この原因はゲージ場を量子化するために導入されるゲージ固定項の存在によります。実際に、「ワード・高橋恒等式」で見たようにゲージ固定項がゲージ不変にならずに余計な項を出しています。そのため、生成汎関数が不変とならず、そこから求まる有効作用もゲージ不変性を明確に持っていません。摂動論の計算を行えばわかりますが、計算はゲージ依存性を持った状況で行われ、最終的な物理量に対応する結果までいくことでゲージ不変な結果が求められます。分かりやすい例が S 行列で、ファインマン図を個別に計算するとゲージ依存しますが、全部足すとゲージ不変な結果が導かれます (QED ではカレントとくつつくためゲージに依存する部分は消えてゲージ不変になる。 $q_\mu J^\mu = 0$)。

というわけで、計算の途中でゲージ不変性がないのは不便だということで、有効作用をゲージ不変な形に持っていこうとします。 S 行列は LSZ の簡約公式によって相関関数から求められ、その相関関数は生成汎関数や有効作用から求められます。なので、生成汎関数がゲージ不変な形を持っているなら、計算はゲージ不変性を保ったまま行えます。そのための方法が背景場の方法 (background field method) です。

この方法は単純にゲージ不変な形式を作るというだけでなく、有効作用の計算を簡単にしてくれるので、背景場を使った時は有効作用を計算しようとしています。

スカラー場を使って実際に見ていきます。場 ϕ による生成汎関数は

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}[\phi] + J\phi) \right] \quad (1)$$

このラグランジアンでの ϕ に対して背景場 (background field) Q というの加えます。それによって背景場を含めた生成汎関数として

$$\bar{Z}[J, Q] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}[\phi + Q] + J(x)\phi(x)) \right] \quad (2)$$

このようなものを作ります。「 $\bar{\cdot}$ 」は背景場を含んだものとします。ここから有効作用を作るために W として

$$W[J] = -i \log Z[J]$$

$$\bar{W}[J, Q] = -i \log \bar{Z}[J, Q]$$

と定義します。有効作用には後は古典的な場 $\phi_c, \bar{\phi}_c$ が必要で、これは

$$\phi_c = \frac{\delta W}{\delta J}$$

$$\bar{\phi}_c = \frac{\delta \bar{W}}{\delta J}$$

として、定義されます (自己エネルギーと有効作用」参照)。これらによって有効作用は

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x) \quad (3)$$

$$\bar{\Gamma}[\bar{\phi}_c, Q] = \bar{W}[J, Q] - \int d^4x J(x) \bar{\phi}_c(x) \quad (4)$$

これとは別に、違う見方をして背景場があるときとないときでの関係を出します。(1) と (2) を比較してみると、源の項を無視すれば、(2) において ϕ を $\phi - Q$ と変数変換すれば (1) になります。なので、(2) をこのように変数変換すれば

$$\bar{Z}[J, Q] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}[\phi] + J(x)(\phi(x) - Q(x))) \right]$$

そうすると、 Z を使って

$$\bar{Z}[J, Q] = Z[J] \exp \left[-i \int d^4x J(x) Q(x) \right]$$

と書けます。これの対数をとれば

$$\log \bar{Z}[J, Q] = \log Z[J] - i \int d^4x J(x) Q(x)$$

なので、 $\bar{W}$ は

$$\begin{aligned} \bar{W}[J, Q] &= -i \log \bar{Z}[J, Q] = -i \log Z[J] - \int d^4x J(x) Q(x) \\ &= W[J] - \int d^4x J(x) Q(x) \end{aligned}$$

そして、背景場があるときの古典的な場 $\bar{\phi}_c$ は定義によって

$$\bar{\phi}_c = \frac{\delta \bar{W}}{\delta J} = \frac{\delta W}{\delta J} - Q = \phi_c - Q \quad (5)$$

これらの関係を (4) に使用すると

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}[\bar{\phi}_c, Q] &= W[J] - \int d^4x J Q - \int d^4x J (\phi_c - Q) \\ &= W[J] - \int d^4x J \phi_c \end{aligned}$$

となり、この右辺は通常の有効作用になるので

$$\bar{\Gamma}[\bar{\phi}_c, Q] = \Gamma[\phi_c]$$

という関係を持ちます。さらに (5) より

$$\bar{\Gamma}[\bar{\phi}_c, Q] = \Gamma[\bar{\phi}_c + Q]$$

として、通常の有効作用を背景場のあるときで書けます。これの利点は、 $\bar{\phi}_c = 0$ としたときに

$$\bar{\Gamma}[0, Q] = \Gamma[Q]$$

と書ける点です。つまり、左辺を計算していき、 $Q = \phi_c$ とすれば通常の有効作用になるという対応関係ができています。で、具体的には見ませんが、左辺は通常の有効作用 $\Gamma[Q]$ を計算するよりも簡単な形になっているために楽になります。大雑把に言えば、左辺の有効作用 $\bar{\Gamma}[0, Q]$ には外線のついていない 1PI の図 (真空泡) しか出てこないためです。そのために、ゲージ不変性がどうこういう以前に、有効作用を簡単に計算する方法として背景場を導入することができます。

ここからゲージ不変性の問題に進んでいきます。ここでは非可換ゲージ場を使って話を進めていきます。記号は「ヤン・ミルズ理論」や「BRS 変換」と同じにし、その随伴表現は

$$(t^b)^{ac} = if^{abc}$$

$$\partial_\mu \phi^a - igA_\mu^b (t^b)^{ac} \phi^c = \partial_\mu \phi^a + gf^{abc} A_\mu^b \phi^c$$

と与えます。 t^a は生成子、 f^{abc} は構造定数、 A_μ^a はゲージ場です。

非可換ゲージでの生成汎関数はゴーストを出す前段階では

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \det \left| \frac{\delta G^a}{\delta \Lambda^b} \right| \mathcal{D}\eta \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}[A] - \frac{1}{2\alpha} (G^a)^2 + J^a \cdot A^a) \right]$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

G^a はゲージ条件の関数です。「 $\cdot$ 」はミンコフスキー空間での内積 $J_\mu A^\mu$ を表わし、ローマ文字の添え字は内部自由度で、同じローマ文字では和を取ります。非可換ゲージ場 A_μ^a に対するゲージ変換は (Λ^a は x に依存)

$$A_\mu^{a'} = A_\mu^a + \partial_\mu \Lambda^a + gf^{abc} A_\mu^b \Lambda^c = A_\mu^a + \partial_\mu \Lambda^a - gf^{abc} \Lambda^b A_\mu^c = A_\mu^a + \delta A_\mu^a$$

$\Lambda^b A_\mu^c$ としているのは A_μ が後にあった方が見やすいからというだけです。この変換に対してラグランジアンは不変になっていません。

次に背景場を加えます。背景場 Q_μ^a をゲージ場 A_μ^a に加えることで、生成汎関数は

$$\bar{Z}[J, Q] = \int \mathcal{D}A_\mu \det \left| \frac{\delta \bar{G}^a}{\delta \Lambda^b} \right| \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}[A + Q] - \frac{1}{2\alpha} (\bar{G}^a)^2 + J^a \cdot A^a) \right] \quad (6)$$

G^a の中には A_μ があるので、背景場がある形 $\bar{G}^a(A, Q)$ に書きます。ゲージ条件の微分 $\delta \bar{G}/\delta \Lambda^b$ の計算においては条件をゲージ変換したものが必要になりますが、このように背景場が入ってきたことによって $\bar{G}$ はゲージ変換として、 A_μ に対して

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \Lambda^a - g f^{abc} \Lambda^b (A_\mu^c + Q_\mu^c) \quad (7)$$

行列式 $|\delta \bar{G}^a/\delta \Lambda^b|$ は A_μ のゲージ自由度を失くすために入ってきているものなので、このように A_μ の変換を受けます (exp 内の $\bar{G}^a$ は別の変換を行う)。

まず分かるのは、最初にみた性質がそのまま使えるということで、有効作用はスカラー場のときと同じようにして

$$\bar{\Gamma}[A, Q] = \Gamma[A + Q; Q]$$

$$A_\mu^a = \frac{\delta \bar{W}[J, Q]}{\delta J_\mu^a} = \frac{\delta W[J]}{\delta J_\mu^a} - Q_\mu^a = \tilde{A}_\mu^a - Q_\mu^a$$

と書けます。 $\tilde{A}_\mu^a$ は背景場がないときの A_μ^a の真空期待値です。また、区別していませんが、有効作用に現われているのは W の汎関数微分から求められる真空期待値です。スカラー場と違うのはゲージ固定項の存在によって、生成汎関数の関係が

$$\bar{Z}[J, Q] = Z[J; Q] \exp \left[-i \int d^4x J(x) Q(x) \right]$$

と書けることです。これは $A_\mu \Rightarrow A_\mu - Q_\mu$ と変数変換したときに $\bar{G}^a$ が背景場 Q_μ を含むからです。これによって有効作用も $\Gamma[A + Q; Q]$ と書いています。

ここから変換を行っていきませんが、 Λ の1次まで取ることにします。背景場を使ったときの特徴はゲージ条件を

$$\bar{G}^a = \partial^\mu A_\mu^a + g f^{abc} Q_\mu^b A^{c\mu}$$

このように背景場がまぎれ込んだ形で設定する点です。この条件によってゲージ不変な形式での計算を行えるようになります。また、 $Z[J; Q]$ に含まれる形としては

$$\tilde{G}^a = \partial^\mu A_\mu^a - \partial^\mu Q_\mu^a + g f^{abc} Q_\mu^b A^{c\mu}$$

第3項が変更されないのは $f^{abc} Q^b \cdot Q^c$ は0だからです。

次に、通常のゲージ場でなく背景場 Q_μ^a が

$$\delta Q_\mu^a = \partial_\mu \Lambda^a - g f^{abc} \Lambda^b Q_\mu^c = \partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} Q_\mu^b \Lambda^c \quad (8)$$

このように通常のゲージ変換されるとします。これから、背景場での共変微分として

$$\overline{D}(Q) = \partial_\mu + g f^{abc} Q_\mu^b$$

というのが作れます。背景場があるときのラグランジアン部分は

$$\mathcal{L}[A + Q] = -\frac{1}{4} (\partial_\mu (A_\nu^a + Q_\nu^a) - \partial_\nu (A_\mu^a + Q_\mu^a) + g f^{abc} (A_\mu^b + Q_\mu^b) (A_\nu^c + Q_\nu^c))^2 \quad (9)$$

この形を見ると、 $A_\nu^a + Q_\nu^a$ が通常のゲージ変換の形になっていれば、ラグランジアンは不変になるのが分かります ($(F_{\mu\nu}^a)^2$ はゲージ不変)。つまり

$$\delta (A_\nu^a + Q_\nu^a) = \partial_\nu \Lambda^a - g f^{abc} \Lambda^b (A_\mu^c + Q_\mu^c)$$

であればいいです。これと δQ_μ^a を見比べると A_μ^a は

$$\delta A_\mu^a = -g f^{abc} \Lambda^b A_\mu^c \quad (10)$$

となり、(9) を不変にするためのゲージ場 A_μ^a の変換がこれになります。

問題のゲージ固定項は

$$\overline{G}^a = \partial^\mu A_\mu^a + g f^{abc} Q_\mu^b A^{c\mu} = (\overline{D}_\mu(Q) A^\mu)^a$$

として、背景場を使った共変微分の形になっています。今の変換規則を見ると、背景場がゲージ場のように変換し、ゲージ場が物質場 (フェルミオン場のような) として変換されています。そして、共変微分もその対応で作られています。なので、共変微分の定義から見れば $\overline{G}^a \cdot \overline{G}^a$ の項はこの変換に対して不変な量になっているはず (共変微分は運動項を不変にする)。実際に、 $\overline{G}^a$ を変換すると (Λ の 1 次まで)

$$\begin{aligned}
\overline{G}^a &= \partial^\mu A_\mu^a + g f^{abc} Q_\mu^b A^{c\mu} = (\partial^\mu \delta^{ac} + g f^{abc} Q_\mu^b) A^{c\mu} \\
&\Rightarrow (\partial^\mu \delta^{ac} + g f^{abc} (Q_\mu^b + \partial_\mu \Lambda^b - g f^{bmn} \Lambda^m Q_\mu^n)) (A^{c\mu} - g f^{cij} \Lambda^i A^{j\mu}) \\
&= (\partial^\mu \delta^{ac} + g f^{abc} (Q_\mu^b + \partial_\mu \Lambda^b - g f^{bmn} \Lambda^m Q_\mu^n)) (\delta^{cj} - g f^{cij} \Lambda^i) A^{j\mu} \\
&= (\partial^\mu \delta^{ac} + g f^{abc} Q_\mu^b + g f^{abc} (\partial_\mu \Lambda^b) - g^2 f^{abc} f^{bmn} \Lambda^m Q_\mu^n) (\delta^{cj} - g f^{cij} \Lambda^i) A^{j\mu} \\
&= \delta^{cj} (\partial^\mu \delta^{ac} + g f^{abc} Q_\mu^b + g f^{abc} (\partial_\mu \Lambda^b) - g^2 f^{abc} f^{bmn} \Lambda^m Q_\mu^n) \\
&\quad + (-g \delta^{ac} f^{cij} \partial^\mu \Lambda^i - g^2 f^{abc} Q_\mu^b f^{cij} \Lambda^i - g^2 f^{abc} (\partial_\mu \Lambda^b) f^{cij} \Lambda^i + g^3 f^{abc} f^{bmn} \Lambda^m Q_\mu^n f^{cij} \Lambda^i) A^{j\mu} \\
&= \delta^{cj} (\partial^\mu \delta^{ac} + g f^{abc} Q_\mu^b + g f^{abc} (\partial_\mu \Lambda^b) - g^2 f^{abc} f^{bmn} \Lambda^m Q_\mu^n) A^{j\mu} \\
&\quad + (-g \delta^{ac} f^{cij} \partial^\mu \Lambda^i - g^2 f^{abc} Q_\mu^b f^{cij} \Lambda^i - g^2 f^{abc} (\partial_\mu \Lambda^b) f^{cij} \Lambda^i) A^{j\mu} \\
&= \delta^{cj} (\partial^\mu \delta^{ac} + g f^{abc} Q_\mu^b - g^2 f^{abc} f^{bmn} \Lambda^m Q_\mu^n) A^{j\mu} + (-g \delta^{ac} f^{cij} \Lambda^i \partial^\mu - g^2 f^{abc} f^{cij} Q_\mu^b \Lambda^i) A^{j\mu} \\
&= (\partial^\mu \delta^{aj} + g f^{abj} Q_\mu^b A^{j\mu} - g f^{aij} \Lambda^i \partial^\mu A^{j\mu} + g^2 f^{aic} f^{cjb} Q_\mu^b \Lambda^i A^{j\mu}) \\
&= (\partial^\mu \delta^{aj} + g f^{abj} Q_\mu^b - g f^{aij} \Lambda^i \partial^\mu) A^{j\mu} + g^2 f^{aic} f^{cjb} Q_\mu^b \Lambda^i A^{j\mu} \\
&= \delta^{aj} \partial^\mu A^{j\mu} + g f^{abj} Q_\mu^b A^{j\mu} - g f^{aij} \Lambda^i \partial^\mu A^{j\mu} + g^2 f^{aic} f^{cjb} Q_\mu^b \Lambda^i A^{j\mu} \\
&= \partial^\mu A^{a\mu} + g f^{abj} Q_\mu^b A^{j\mu} - g f^{aij} \Lambda^i \partial^\mu A^{j\mu} - g^2 f^{aic} f^{cbj} Q_\mu^b \Lambda^i A^{j\mu} \\
&= (\delta^{ac} - g f^{aic} \Lambda^i) (\delta^{jc} \partial^\mu + g f^{cbj} Q_\mu^b) A^{j\mu} \\
&= (\delta^{ac} - g f^{aic} \Lambda^i) (\delta^{jc} \partial^\mu + g f^{cbj} Q_\mu^b) A^{j\mu} \\
&= (\delta^{ac} - g f^{aic} \Lambda^i) (\overline{D} \cdot A)^c \\
&= (\delta^{ac} - g f^{aic} \Lambda^i) \overline{G}^c
\end{aligned}$$

途中の g^2 の項をまとめるときに

$$f^{abc} f^{cmn} = -f^{amc} f^{cnb} - f^{anc} f^{cbm}$$

を使って

$$\begin{aligned}
& -\delta^{cj} f^{abc} f^{bm n} \Lambda^m Q_\mu^n A^{j\mu} - f^{abc} f^{cij} Q_\mu^b \Lambda^i A^{j\mu} \\
& = -f^{abj} f^{bm n} Q_\mu^n \Lambda^m A^{j\mu} - f^{abc} f^{cij} Q_\mu^b \Lambda^i A^{j\mu} \\
& = (-f^{abj} f^{bm n} Q_\mu^n \Lambda^m - f^{abc} f^{cij} Q_\mu^b \Lambda^i) A^{j\mu} \\
& = (-f^{abj} f^{bm n} Q_\mu^n \Lambda^m - (-f^{aic} f^{cjb} - f^{ajc} f^{cbi}) Q_\mu^b \Lambda^i) A^{j\mu} \\
& = (-f^{abj} f^{bm n} Q_\mu^n \Lambda^m + (f^{aic} f^{cjb} + f^{ajc} f^{cbi}) Q_\mu^b \Lambda^i) A^{j\mu} \\
& = (-f^{abj} f^{bm n} Q_\mu^n \Lambda^m + f^{ajc} f^{cbi} Q_\mu^b \Lambda^i + f^{aic} f^{cjb} Q_\mu^b \Lambda^i) A^{j\mu} \\
& = (-f^{abj} f^{bm n} Q_\mu^n \Lambda^m + f^{acj} f^{cib} Q_\mu^b \Lambda^i + f^{aic} f^{cjb} Q_\mu^b \Lambda^i) A^{j\mu} \\
& = f^{aic} f^{cjb} Q_\mu^b \Lambda^i A^{j\mu}
\end{aligned}$$

となるのを使っています。というわけで、 $\overline{G}^a$ の変換は

$$\delta \overline{G}^a = -g f^{aic} \Lambda^i \overline{G}^c$$

そして、 f^{aic} の入れ替えによって

$$\delta(\overline{G}^a \cdot \overline{G}^a) = -2g f^{aic} \Lambda^i \overline{G}^c \cdot \overline{G}^a = 0$$

となるので、ゲージ固定項が (8)(10) の変換において実際に不変になっています。

残っている項はゲージ条件の行列式です。(7) から

$$\begin{aligned}
\overline{G}^a &= \partial^\mu A_\mu^a + g f^{abc} Q_\mu^b A^{c\mu} \\
\Rightarrow \partial^\mu (A_\mu^a + \partial_\mu \Lambda^a - g f^{abc} \Lambda^b (A_\mu^c + Q_\mu^c)) &+ g f^{abc} Q_\mu^b (A_\mu^a + \partial_\mu \Lambda^a - g f^{abc} \Lambda^b (A_\mu^c + Q_\mu^c))
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \overline{G}^a}{\delta \Lambda^i} &= \partial^\mu (\partial_\mu \delta^{ai} - g f^{abc} \delta^{bi} (A_\mu^c + Q_\mu^c)) + g f^{abc} Q_\mu^b (\partial_\mu \delta^{ci} - g f^{cmn} \delta^{mi} (A_\mu^n + Q_\mu^n)) \\
&= \partial^\mu (\partial_\mu \delta^{ai} - g f^{aic} (A_\mu^c + Q_\mu^c)) + g f^{abc} Q_\mu^b (\partial_\mu \delta^{ci} - g f^{cin} (A_\mu^n + Q_\mu^n)) \\
&= \partial^\mu (\partial_\mu \delta^{ai} + g f^{aci} (A_\mu^c + Q_\mu^c)) + g f^{abc} Q_\mu^b (\partial_\mu \delta^{ci} + g f^{cni} (A_\mu^n + Q_\mu^n))
\end{aligned}$$

f^{abc} を $(t^b)^{ac} = i f^{abc}$ に変えたほうが見やすいので、変更して

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \bar{G}^a}{\delta \Lambda^i} &= \partial^\mu (\partial_\mu \delta^{ai} - ig(t^c)^{ai} (A_\mu^c + Q_\mu^c)) + gf^{abc} Q_\mu^b (\partial_\mu \delta^{ci} - ig(t^n)^{ci} (A_\mu^n + Q_\mu^n)) \\
&= \partial^\mu \bar{D}_\mu^{ai} (A + Q) + gf^{abc} Q^{b\mu} \bar{D}_\mu^{ci} (A + Q) \\
&= \delta^{ac} \partial \cdot \bar{D}^{ci} (A + Q) - ig(t^b)^{ac} Q^b \cdot \bar{D}^{ci} (A + Q) \\
&= \bar{D}^{ac} (Q) \cdot \bar{D}^{ci} (A + Q)
\end{aligned}$$

背景場の共変微分は

$$\begin{aligned}
\bar{D}_\mu^{ab} (Q) &= \partial_\mu \delta^{ab} - ig(t^c)^{ab} Q_\mu^c \\
\bar{D}_\mu^{ab} (A + Q) &= \partial_\mu \delta^{ab} - ig(t^c)^{ab} (A_\mu^c + Q_\mu^c)
\end{aligned}$$

としています。これを $\exp$ 内に入ればゴースト項として

$$C^{*a} \bar{D}^{ac} (Q) \cdot \bar{D}^{cb} (A + Q) C^b$$

というのが現われます。 C, C^* はゴースト場、反ゴースト場で、「 $\cdot$ 」で区別すると紛らわしいので「 $*$ 」にしています。表面積分と文字の入れかえによって

$$\begin{aligned}
C^{*a} (\partial \delta^{ac} - ig(t^b)^{ac} Q^b) \cdot \bar{D}^{cb} (A + Q) C^b &= (-\partial C^{*a} \delta^{ac} - ig(t^b)^{ac} Q^b C^{*a}) \cdot \bar{D}^{cb} (A + Q) C^b \\
&= (-\partial C^{*a} \delta^{ac} + ig(t^b)^{ca} Q^b C^{*a}) \cdot \bar{D}^{cb} (A + Q) C^b \\
&= -(\partial C^{*a} \delta^{ac} - ig(t^b)^{ca} Q^b C^{*a}) \cdot \bar{D}^{cb} (A + Q) C^b \\
&= -(\bar{D}^{ca} (Q) C^{*a}) \cdot (\bar{D}^{cb} (A + Q) C^b) \\
&= -(\bar{D} (Q) C^*)^c \cdot (\bar{D} (A + Q) C)^c
\end{aligned}$$

分解して書けば

$$\begin{aligned}
-(\bar{D} (Q) C^*)^c \cdot (\bar{D} (A + Q) C)^c &= -(\bar{D} (Q) C^*)^c \cdot (\partial_\mu \delta^{cb} - ig(t^a)^{cb} (A_\mu^a + Q_\mu^a)) C^b \\
&= -(\bar{D} (Q) C^*)^c \cdot (\bar{D}^{cb} (Q) C^b - ig(t^a)^{cb} A_\mu^a C^b) \\
&= -(\bar{D} (Q) C^*)^c \cdot (\bar{D}^{cb} (Q) C^b + gf^{cab} A^a C^b)
\end{aligned}$$

この状況で、ゴースト場の変換を

$$\delta C = -f^{abc} \Lambda^b C^c, \quad \delta C^* = -f^{abc} \Lambda^b C^{*c}$$

と設定すれば、 $\overline{G}$ と同じように考えられるので、(8),(10) の変換に対して不変にできます。

というわけで、ここで作った変換に対して、ゲージ固定項とゴースト項を含めた全ラグランジアンが不変になりました。ここでの重要な点はゲージ条件を

$$\overline{G}^a = \partial^\mu A_\mu^a + g f^{abc} Q^b \cdot A^c$$

と設定することと、背景場に対してゲージ変換を行っていることです。ちなみに、この条件によるゲージ場の量子化を背景場ゲージと呼んだりもしています。

また、生成汎関数自体は変換に対して不変になっていないので、源も変換します。源 J の項は今の変換に対して

$$J^a \cdot A^a \Rightarrow J^a \cdot A^a + J^a \cdot \delta A^a$$

となっているので、 J_μ^a も

$$\delta J_\mu^a = -f^{abc} \Lambda^b J_\mu^c$$

このように変換させます。そうすると

$$\begin{aligned} J^a \cdot \delta A^a + \delta J^a \cdot A^a &= -f^{abc} \Lambda^b J^a A_\mu^c - f^{abc} \Lambda^b J_\mu^c A^a \\ &= -f^{abc} \Lambda^b J^a A_\mu^c - f^{cba} \Lambda^b J_\mu^a A^c \\ &= -f^{abc} \Lambda^b J^a A_\mu^c + f^{abc} \Lambda^b J_\mu^a A^c \\ &= 0 \end{aligned}$$

となって不変になります。

まとめると、背景場のゲージ変換 (無限小) として

$$\text{ゲージ条件 : } \overline{G}^a = \partial^\mu A_\mu^a + g f^{abc} Q^b \cdot A^c$$

$$\text{背景場 : } \delta Q_\mu^a = \partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} Q_\mu^b \Lambda^c$$

$$\text{ゲージ場 : } \delta A_\mu^a = -g f^{abc} \Lambda^b A_\mu^c$$

$$\text{ゴースト場 : } \delta C = -g f^{abc} \Lambda^b C^c, \quad \delta C^* = -g f^{abc} \Lambda^b C^{*c}$$

これによって非可換ゲージ場のラグランジアンは不変になります。

そして、源に対しては

$$\delta J_\mu^a = -g f^{abc} \Lambda^b J_\mu^c$$

とすれば、生成汎関数は不変になります。ちなみに、フェルミオン場の変換は通常通りです。

この結果を見ると、背景場をゲージ変換しているのが本当の意味でのゲージ変換ではないように見えます。しかし、これを有効作用まで持っていくことで利点が見えてきます。

生成汎関数は今の変換で不変になっているので、有効作用 $\bar{\Gamma}[A, Q]$ も不変です (区別しませんが、有効作用で出てくる A, Q は背景場での源ありの真空期待値)。そして、上で見たように $\bar{\Gamma}[0, Q]$ が重要になっています。この場合、 A が 0 になっているので、 A の変換

$$\delta A_\mu^a = -g f^{abc} \Lambda^b A_\mu^c$$

が効いてこなくなります。しかも、この変換は A_μ^a のただの回転変換なので $A_\mu^a = 0$ になったところで害を与えません。なので、 $\bar{\Gamma}[0, Q]$ は Q の変換に対して不変です。この点が重要で、 Q の変換はゲージ変換そのものであるために、 $\bar{\Gamma}[0, Q]$ はゲージ不変性を持ちます。これによって、 Q に関して相関関数を求めれば、それは通常のゲージ場を用いた計算と対応させられるために、ワード・高橋恒等式や Slavnov-Taylor 恒等式を満たすようになります。これが背景場を使った時の特徴であり利点で、実際にゲージ不変な状況で計算を行っていきます。

背景場ありでのワード・高橋恒等式は、有効作用が背景場の変換に対して不変ということから求められます。すでに有効作用 $\bar{\Gamma}[A, Q]$ は無限小変換に対して不変となっているので、 $\Gamma[A + \delta A, Q + \delta Q]$ を展開したときに 1 次の部分が消えればよいことから

$$\int d^4x \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta Q_\mu^a} \delta Q_\mu^a + \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu^a} \delta A_\mu^a \right) = 0$$

となり、 δQ_μ^a と δA_μ^a を入れることで

$$-(\bar{D}^{ac}(Q) \frac{\delta}{\delta Q_\mu^a} - g f^{abc} A_\mu^b \frac{\delta}{\delta A_\mu^a}) \Gamma[A, Q] = 0$$

となります。共変微分を前に出しています。フェルミオン場の部分は何も変更されていないので、これに通常のワード・高橋恒等式のフェルミオン部分を足せば、今の場合でのワード・高橋恒等式になります。

ここでは背景場を $A_\mu^a + Q_\mu^a$ と加えましたが、別の見方でも同じことができます。背景場を加える前のもとのラグランジアンにいるゲージ場 A_μ^a がすでに背景場を含んでいると見て、

$$A_\mu^a = V_\mu^a + Q_\mu^a$$

と量子論的な V_μ^a と古典的な Q_μ^a に分離させる見方です。そうすると、ゲージ場と背景場の差として V_μ^a が入ってきます。この状態で始めると、 A_μ^a は通常の変換を受けることになります。つまり、ゲージ場に対する変換

$$A_\mu^a \Rightarrow A_\mu^a + \delta A_\mu^a = A_\mu^a + (D_\mu \Lambda)^a$$

が作られます。これに対応して、背景場は

$$Q_\mu^a \Rightarrow Q_\mu^a + \delta Q_\mu^a = Q_\mu^a + \partial_\mu \Lambda^a + g f^{abc} Q_\mu^b \Lambda^c$$

と変換されます。これによって、差 V_μ^a が

$$A_\mu^a - Q_\mu^a = V_\mu^a \Rightarrow V_\mu^a + \delta V_\mu^a = V_\mu^a - gf^{abc}V_\mu^b\Lambda^c$$

このように物質場としての変換を受けます。この対応関係から分かるように、今まで使ってきた A_μ^a がここでの V_μ^a に対応することになります。なので、ゲージ条件も変更されて

$$\bar{G}^a = (\bar{D}^\mu(Q)(A - Q)_\mu)^a = \partial^\mu(A_\mu^a - Q_\mu^a) + gf^{abc}Q^b \cdot (A^a - Q^a)$$

また、有効作用の関係は $V_\mu^a = 0$ に対応する $A_\mu^a = Q_\mu^a$ として成立します。

最後に電磁場での場合を示しておきます。電磁場への変更は簡単で非可換ゲージ場で表れる f^{abc} をなくせばいいです。なので、電磁場での背景場のゲージ変換は

$$\text{ゲージ条件: } \bar{G} = \partial^\mu A_\mu$$

$$\text{背景場: } \delta Q_\mu = \partial_\mu \Lambda$$

$$\text{ゲージ場: } \delta A_\mu = 0$$

電磁場ではゴーストは関係ないので無視しています。これらによって、ゲージ固定項も含めた電磁場のラグランジアンが不変になっていることはすぐに分かると思います。電磁場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

これに背景場を加えると

$$\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu Q_\nu - \partial_\nu Q_\mu$$

これを変換すれば、 A_μ の項は変化せずに Q_μ の方が動きますが、全体として見れば $\delta A_\mu + \delta Q_\mu = \partial_\mu \Lambda$ なので、ただのゲージ変換です。よって、 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ はこの変換に対して不変です。ゲージ固定項

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2\alpha}\bar{G} \cdot \bar{G} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu)(\partial^\nu A_\nu)$$

に対しては明らかに不変です。共変微分を含むフェルミオンの項は

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - g\gamma^\mu(A_\mu + Q_\mu) - m)\psi$$

$\bar{\psi}$ は $\psi^\dagger \gamma_0$ です。この場合でも結局、 $A_\mu + Q_\mu$ の部分が通常のゲージ変換を受けるので、通常のフェルミオンの変換を行うことで不変になります。

ゲージ条件の行列式 $|\delta\bar{G}/\delta\Lambda|$ は、ローレンツゲージのときと同じ格好なのでダランベール演算子 $\square$ がでてきます。これはどう見ても変換とは無関係なので、行列式は不変です。というわけで、生成汎関数を不変にすることができます。

ワード・高橋恒等式も簡単に求まって、 Q_μ の部分は

$$-\partial_\mu \frac{\delta\bar{\Gamma}}{\delta Q_\mu} = 0$$

となるので、全体として

$$-\partial_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta Q_\mu(x)} + ie\left(\psi(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi(x)} - \bar{\psi}(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}(x)}\right) = 0$$

となります。