BRS 変換

ゲージ場のラグランジアンはゲージ固定項とゴースト項の存在によって局所ゲージ不変性を持っていません。この状況において、ゲージ場の局所ゲージ変換による余計な項をゴースト場も変換させることで打ち消させラグランジアンを不変にする大局的変換が BRS(Becchi-Rouet-Stora) 変換です (もしくは Tyutin も加えて BRST 変換)。ここでは BRS 変換を行う記号を δ と書きます。クロネッカーデルタは δ^{ab} のように書いているので、混乱はしないと思います。
ギリシャ文字は 4 次元時空の添え字、ローマ文字は適当な内部自由度 (カラーとか) によるものだとします。ローマ文字の同じ添え字は上付き下付き関係なしに和を取るようにします。

非可換ゲージ場のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(F^a)^2 - \overline{\eta}^a M_{ab}\eta^b = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{FP}$$

ローレンツゲージだとして

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2$$

$$M_{ab} = -gf^{abc}\partial^\mu A^c_\mu - gf^{abc}A^c_\mu\partial^\mu + \delta^{ab}\partial^\mu\partial_\mu$$

$\mathcal{L}_{FP}$ は「経路積分～非可換ゲージ場～」でやった変形と全微分は表面積分で落とせるということから

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{FP} &= -\overline{\eta}^a M_{ab}\eta^b \\
&= -\overline{\eta}^a\Box\eta^a - gf^{abc}(\partial^\mu\overline{\eta}^a)A^c_\mu\eta^b \\
&= -\partial^\mu(\overline{\eta}^a\partial_\mu\eta^a) + \partial^\mu\overline{\eta}^a\partial_\mu\eta^a - gf^{abc}(\partial^\mu\overline{\eta}^a)A^c_\mu\eta^b \\
&= \partial^\mu\overline{\eta}^a(\partial_\mu\eta^a - gf^{abc}A^c_\mu\eta^b) \\
&= \partial^\mu\overline{\eta}^a(\partial_\mu\eta^a + gf^{abc}A^b_\mu\eta^c) \\
&= \partial^\mu\overline{\eta}^a(D_\mu\eta)^a \\
&= \partial^\mu(\overline{\eta}^a(D_\mu\eta)^a) - \overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a \\
&= -\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a
\end{aligned}$$

D_μ は共変微分で

$$(D_\mu\eta)^a = \partial_\mu\eta^a + gf^{abc}A^b_\mu\eta^c$$

と定義し、ローマ文字の添え字の付き方も含めています。一応簡単に言っておくと、共変微分といえるのは生成子 t^a の随伴表現が

$$(t^b)_{ac} = if^{abc}$$

このように行列で表現されるので、随伴表現での共変微分が

$$\partial_\mu \phi^a - igA^b_\mu (t^b)^{ac}\phi^c = \partial_\mu \phi^a + gf^{abc}A^b_\mu \phi^c$$

となっているからです。

これでラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 - \overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu \eta)^a$$

A^a_μ に対するゲージ変換は

$$A^a_\mu \ \Rightarrow \ A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \Lambda^a + f^{abc}A^b_\mu \Lambda^c = A^a_\mu + \Delta A^a_\mu$$

となっているので、ゲージ変換による変化 ΔA^a_μ は共変微分 D_μ によって

$$\Delta A^a_\mu = \frac{1}{g}(D_\mu \Lambda)^a$$

このように書けます。

電磁場のときはゲージ固定項によってゲージ不変でなくなりましたが、ここでも同じようにゲージ固定項とゴースト項のせいで、ゲージ変換のもとでラグランジアンは不変になりません。これはこれとして、今度はゴースト場も変換されると考えてしまい、そのゴースト場の変換を合わせることでラグランジアンを不変にしてしまう変換を考えます。それはどのような変換なのか見ていきます。まず任意の Λ を

$$\Lambda^a = -\eta^a \lambda$$

このようにゴースト場に比例するように選びます。λ は無限小なグラスマン数で、x^μ に依存しないパラメータです ($\lambda^2 = 0$)。このときの A^a_μ の変化は

$$\delta A^a_\mu = -\frac{1}{g}(D_\mu \eta)^a \lambda \tag{1}$$

この変換をラグランジアンに行えば、ゲージ固定項とゴースト項によって余計な項が現れます。それを打ち消すように $\eta, \overline{\eta}$ の変換を決めます。つまり、ゲージ固定項とゴースト項も変換されるとした

$$\delta\mathcal{L}_G + \delta\mathcal{L}_{FP} = -\frac{1}{\alpha}(\partial^\mu \delta A^a_\mu) - \delta\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu \eta)^a - \overline{\eta}^a \delta(\partial^\mu D_\mu \eta)^a$$

これが 0 になればラグランジアンは不変になります。そのためには $\eta, \overline{\eta}$ を

$$\eta \ \Rightarrow \ \eta - \frac{1}{2}f^{abc}\eta^b\eta^c\lambda = \eta + \delta\eta \tag{2}$$

$$\overline{\eta} \ \Rightarrow \ \overline{\eta} - \frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A^a_\mu)\lambda = \overline{\eta} + \delta\overline{\eta} \tag{3}$$

このように変換させます。(1),(2),(3) の変換のことを BRS 変換 (Becchi-Rouet-Stora transformation) と呼びます (大抵の場合で BRS 変換というと下の (5a)〜(5d) の形で表わされています)。この変換の特徴は、ゲージ場をゴースト場へ、1 つのゴースト場が 2 つのゴースト場に、反ゴースト場がスカラー場となっているように、ゴースト場の数を増やすように作用していることです。今はゲージ場だけでやっていますが、粒子との相互作用を考えるならディラック場 (物質場) と結合させたものが必要になります。この場合では、BRS 変換はゲージ固定項とゴースト項による影響をお互いで打ち消すように作ったということと、加わる項である $\overline{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_a)\psi$ はゲージ不変であることから、物質場のゲージ変換において単に $\Lambda^a = -\eta^a\lambda$ を適用させればいいだけです。ディラック場に対しては、今の場合なら

$$\psi \ \Rightarrow\ e^{-i\eta^a t^a \lambda}\psi = (1 - i\eta^a t^a \lambda)\psi$$

この BRS 変換のもとでラグランジアンが不変になっていることを示します。$\mathcal{L}_0$ は A^a_μ のゲージ変換のもとで不変なので特に何も起きません (物質場と結合している時も同様)。ゲージ固定項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 \ \Rightarrow\ & \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu - \frac{1}{g}\partial^\mu((D_\mu\eta)^a\lambda))^2 \\
&= \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{g^2}(\partial^\mu((D_\mu\eta)^a\lambda))^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{g}(\partial^\mu A^a_\mu)\partial^\mu((D_\mu\eta)^a\lambda) \\
&= \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 + \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{g^2}\partial^\mu(D_\mu\eta)^a\partial^\nu(D_\nu\eta)^a\lambda^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{1}{g}(\partial^\mu A^a_\mu)\partial^\mu(D_\mu\eta)^a\lambda \\
&= \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)^2 - \frac{1}{\alpha}(\partial^\mu A^a_\mu)\frac{1}{g}\partial^\mu(D_\mu\eta)^a\lambda
\end{aligned}$$

λ はグラスマン数なので λ^2 は 0 です。よってゲージ固定項の変化 $\delta\mathcal{L}_G$ は

$$\delta\mathcal{L}_G = \frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A^a_\mu)\partial^\mu(D_\mu\eta)^a\lambda$$

ゴースト項は

$$\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a \ \Rightarrow\ (\overline{\eta} + \delta\overline{\eta})^a\partial^\mu((D_\mu + \delta D_\mu)(\eta + \delta\eta))^a$$

なので計算するのは

$$\begin{gathered}
\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\delta\eta)^a + \overline{\eta}^a(\partial^\mu\delta D_\mu\eta)^a + \overline{\eta}^a(\partial^\mu\delta D_\mu\delta\eta)^a + \delta\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a \\
+ \delta\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\delta\eta)^a + \delta\overline{\eta}^a(\partial^\mu\delta D_\mu\eta)^a + \delta\overline{\eta}^a(\partial^\mu\delta D_\mu\delta\eta)^a
\end{gathered}$$

ですが、$\lambda^2 = 0$ であることから

$$\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\delta\eta)^a + \overline{\eta}^a(\partial^\mu\delta D_\mu\eta)^a + \delta\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a$$

この 3 つですみます。なので、ゴースト項 $\mathcal{L}_{FP}$ は

$$\delta\mathcal{L}_{FP} = -\delta\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a - \overline{\eta}^a(\partial^\mu\delta D_\mu\eta)^a - \overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\delta\eta)^a$$

これの第一項は

$$-\delta\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a = \frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A_\mu^a)\lambda(\partial^\mu D_\mu\eta)^a$$

第二項と第三項は

$$-\overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\delta\eta)^a - \overline{\eta}^a(\partial^\mu\delta D_\mu\eta)^a = -\overline{\eta}^a\partial^\mu\delta(D_\mu\eta)^a$$

と変形できるので、$\delta(D_\mu\eta)^a$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu\eta)^a &= \delta(\partial_\mu\eta^a + gf^{abc}A_\mu^b\eta^c) \\
&= \partial_\mu\delta\eta^a + gf^{abc}\delta A_\mu^b\eta^c + gf^{abc}A_\mu^b\delta\eta^c \\
&= -\frac{1}{2}f^{abc}\partial_\mu(\eta^b\eta^c)\lambda - f^{abc}(D_\mu\eta)^b\lambda\eta^c - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda \\
&= -\frac{1}{2}f^{abc}((\partial_\mu\eta^b)\eta^c + \eta^b\partial_\mu\eta^c)\lambda - f^{abc}(D_\mu\eta)^b\lambda\eta^c - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda \\
&= -\frac{1}{2}f^{abc}((\partial_\mu\eta^b)\eta^c - (\partial_\mu\eta^c)\eta^b)\lambda - f^{abc}(D_\mu\eta)^b\lambda\eta^c - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda \\
&= -\frac{1}{2}f^{abc}((\partial_\mu\eta^b)\eta^c + (\partial_\mu\eta^b)\eta^c)\lambda - f^{abc}(D_\mu\eta)^b\lambda\eta^c - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda \\
&= -f^{abc}(\partial_\mu\eta^b)\eta^c\lambda - f^{abc}(D_\mu\eta)^b\lambda\eta^c - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda
\end{aligned}$$

下から 3 行目の第一項の変形は η がグラスマン数であることを使っています。第二項は

$$f^{abc}(D_\mu\eta)^b\lambda\eta^c = f^{abc}(\partial_\mu\eta^b + gf^{bmn}A_\mu^m\eta^n)\lambda\eta^c$$

なので

$$\begin{aligned}
\delta(D_\mu\eta)^a &= -f^{abc}(\partial_\mu\eta^b)\eta^c\lambda - f^{abc}(\partial_\mu\eta^b + gf^{bmn}A_\mu^m\eta^n)\lambda\eta^c - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda \\
&= -f^{abc}(\partial_\mu\eta^b)\eta^c\lambda + f^{abc}(\partial_\mu\eta^b + gf^{bmn}A_\mu^m\eta^n)\eta^c\lambda - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda \\
&= -f^{abc}(\partial_\mu\eta^b)\eta^c\lambda + f^{abc}(\partial_\mu\eta^b + gf^{bmn}A_\mu^m\eta^n)\eta^c\lambda - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda \\
&= gf^{abc}f^{bmn}A_\mu^m\eta^n\eta^c\lambda - \frac{g}{2}f^{abc}A_\mu^b f^{cmn}\eta^m\eta^n\lambda
\end{aligned}$$

構造関数はヤコビの恒等式を満たすので

$$f^{abc}f^{cmn} = -f^{amc}f^{cnb} - f^{anc}f^{cbm}$$

より

$$
\begin{aligned}
\delta(D_\mu\eta)^a &= gf^{abc}f^{bmn}A_\mu^m\eta^n\eta^c\lambda + \frac{g}{2}(f^{amc}f^{cnb} + f^{anc}f^{cbm})A_\mu^b\eta^m\eta^n\lambda \\
&= gf^{abc}f^{bmn}A_\mu^m\eta^n\eta^c\lambda + \frac{g}{2}f^{amc}f^{cnb}A_\mu^b\eta^m\eta^n\lambda + \frac{g}{2}f^{anc}f^{cbm}A_\mu^b\eta^m\eta^n\lambda \\
&= gf^{abc}f^{bmn}A_\mu^m\eta^n\eta^c\lambda + \frac{g}{2}f^{amc}f^{cnb}A_\mu^b\eta^m\eta^n\lambda + \frac{g}{2}f^{amc}f^{cbn}A_\mu^b\eta^n\eta^m\lambda \\
&= gf^{abc}f^{bmn}A_\mu^m\eta^n\eta^c\lambda + \frac{g}{2}f^{amc}f^{cnb}A_\mu^b\eta^m\eta^n\lambda + \frac{g}{2}f^{amc}f^{cnb}A_\mu^b\eta^m\eta^n\lambda \\
&= gf^{abc}f^{bmn}A_\mu^m\eta^n\eta^c\lambda + gf^{amc}f^{cnb}A_\mu^b\eta^m\eta^n\lambda \\
&= gf^{abj}f^{bik}A_\mu^i\eta^k\eta^j\lambda + gf^{ajb}f^{bki}A_\mu^i\eta^j\eta^k\lambda \\
&= (-gf^{abj}f^{bik} + gf^{ajb}f^{bki})A_\mu^i\eta^j\eta^k\lambda \\
&= 0
\end{aligned}
$$

というわけで、$\delta\mathcal{L}_{FP}$ は

$$
\delta\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A_\mu^a)\lambda(\partial^\mu D_\mu\eta)^a
$$

これはゲージ固定項 $\delta\mathcal{L}_G$ と

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_G + \delta\mathcal{L}_{FP} &= \frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A_\mu^a\partial^\mu(D_\mu\eta)^a\lambda) + \frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A_\mu^a)\lambda(\partial^\mu D_\mu\eta)^a \\
&= \frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A_\mu^a)\partial^\mu(D_\mu\eta)^a\lambda - \frac{1}{\alpha g}(\partial^\mu A_\mu^a)(\partial^\mu D_\mu\eta)^a\lambda \\
&= 0
\end{aligned}
$$

として、打ち消しあいます。

よって、BRS 変換のもとでラグランジアンは不変になっていることが確かめられ、非可換ゲージ場は BRS 対称性を持つことになり、電磁場 (可換ゲージ場) も当然 BRS 対称性を持ちます。電磁場の場合は、(1),(2),(3) で f^{abc} の項を消すことで

$$
\begin{aligned}
&\delta A_\mu = -\frac{1}{g}(\partial_\mu\eta)\lambda \\
&\delta\eta = 0 \\
&\delta\overline{\eta} = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{g}(\partial^\mu A_\mu^a)\lambda
\end{aligned}
$$

というわけで、ゲージ固定項とゴースト項を含めたラグランジアンはゲージ不変性がなくなる代わりに、別の不変性としてこの BRS 不変性が存在することになります。また、この BRS 変換はゲージ固定項とゴースト項というゲージ場を量子化するのに必要なものを含めたラグランジアンを不変にするので、量子論的なゲージ変換と呼ばれます。

BRS 不変性があることから、ワード・高橋恒等式の一般化されたもの (というかゴースト場を含んだもの) が求められることが予想できます。ワード・高橋恒等式は (ゲージ固定項を無視して) ラグランジアンがゲージ不変であり、生成汎関数 (グリーン関数) もゲージ不変であるべきだということから、源による余計な項が 0 になるようにすることで求められたものです。これはゲージ不変という部分を BRS 不変に置き換えてやれば平行した話になり、それによって求められるのが Slavnov-Taylor 恒等式です。

BRS 変換の大事な性質を見ておきます。BRS 変換を起こす演算子を Q(BRS 演算子) と表わすことにして、例えばゲージ場 A_μ は

$$QA_\mu^a = \frac{1}{g}(D_\mu\eta)^a$$

このようになるとします。δA_μ^a との関係は

$$\delta A_\mu^a = \lambda Q A_\mu^a \tag{4}$$

λ を左側に来るように動かしているので符号が変わっています ($\eta, \overline{\eta}$ では左側に動かしてもゴースト場の数の関係で符号は変わらない)。さらにもう 1 回 BRS 変換した Q^2A では、$D_\mu\eta$ の変化が起きるんですが、上で計算したように、これは 0 になるので

$$Q^2A_\mu^a = 0$$

もしくは

$$\delta^2A_\mu^a = 0$$

これが BRS 変換の特徴で、2 回変換したら何も起きないという性質を持ちます。つまり BRS 演算子 Q は

$$Q^2 = 0$$

というベキ零 (nilpotent) になります。この Q は変換の生成子となっているので、ネーターの定理から保存電荷に対応していることになります。というわけで、BRS 対称性に対応するネーターカレントを求めます。

ネーターカレントに行く前に、今使っているラグランジアンを変更します。変更といっても中西-Lautrup の補助場 B(スカラー場) を消す前の段階に戻すだけで

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF^{a\mu\nu} + B^a\partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2}(B^a)^2 - \overline{\eta}^a(\partial^\mu D_\mu\eta)^a$$

こちらの形で BRS 変換を行っているものが多いのでこっちでも行うことにします。この形での BRS 変換は

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{g}(D_\mu \eta)^a \lambda \tag{5a}$$

$$\delta \eta = -\frac{1}{2} f^{abc} \eta^b \eta^c \lambda \tag{5b}$$

$$\delta \overline{\eta} = \frac{1}{g} B^a \lambda \tag{5c}$$

$$\delta B = 0 \tag{5d}$$

となり、これでラグランジアンが不変になっていることは簡単に確かめられます。なぜなら、$\delta(D_\mu \eta)^a$ は消えることは分かっているので、$\mathcal{L}_{eff}$ の第二項と第四項の変化は

$$B^a \partial^\mu (\delta A_\mu^a) = -\frac{1}{g} B^a \partial^\mu (D_\mu \eta)^a \lambda$$

$$-\delta \overline{\eta}^a (\partial^\mu D_\mu \eta)^a = -\frac{1}{g} B^a \lambda (\partial^\mu D_\mu \eta)^a = +\frac{1}{g} B^a (\partial^\mu D_\mu \eta)^a \lambda$$

となり、この二つが打ち消しあうのでラグランジアンは不変になっています。このラグランジアンを使ってネーターカレントを求めるんですが、この変換の形だと g が煩わしいので、

$$\delta A_\mu^a = -(D_\mu \eta)^a \lambda \tag{6a}$$

$$\delta \eta = -\frac{1}{2} g f^{abc} \eta^b \eta^c \lambda \tag{6b}$$

$$\delta \overline{\eta} = B^a \lambda \tag{6c}$$

$$\delta B = 0 \tag{6d}$$

という形に変えます ($\lambda \to g\lambda$)。当たり前ですがこの形の変換でもラグランジアンは不変です。

電磁場でゲージ変換による保存カレントを求める時、物質場 (ディラック場) を加えた状況で行うことでディラック場のカレントが出てきたように、BRS 変換でも本当は全ラグランジアンとして

$$\mathcal{L}_{eff} = \overline{\psi}^a (i\gamma^\mu D_\mu - m_a)\psi^a - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + B^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{\alpha}{2}(B^a)^2 - \overline{\eta}^a (\partial^\mu D_\mu \eta)^a$$

ここから始めないと全体としてどうなっているのかわかりません。ψ の BRS 変換は $\Lambda = -\eta^a \lambda$ とすればいいだけなので

$$\delta \psi = -ig\eta^a t^a \lambda \psi$$

これですみます。ただ、計算していくと、この物質場による影響は全て打ち消しあって、結局最初からないとしていったものと同じ結果になるので無視して計算していきます。つまり、最後にカレントを構成しているものは補助場 B とゴースト場 $\eta, \overline{\eta}$ だけです。これは電磁場でも同じで、BRS 対称性によるカレントは物質場を含めず、補助場とゴースト場による形で現れます。

後で使うので、オイラー・ラグランジュ方程式から A_μ^a に対する運動方程式を求めておきます。オイラー・ラグランジュ方程式に必要な微分は

$$\frac{\partial}{\partial A_\beta^i}\partial^\mu\overline{\eta}^a(D_\mu\eta)^a = \partial^\mu\overline{\eta}^a gf^{abc}g_\mu^\beta\delta^{ib}\eta^c = gf^{aic}\partial^\beta\overline{\eta}^a\eta^c$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial A_\beta^i}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) &= \frac{\delta}{\partial A_\beta^i}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{amn}A^{m\mu}A^{n\nu}) \\
&= (gf^{abc}g^\beta{}_\mu\delta^{bi}A_\nu^c + gf^{abc}A_\mu^b g^\beta{}_\nu\delta^{ci})(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{amn}A^{m\mu}A^{n\nu}) \\
&\quad + (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)(gf^{amn}g^{\beta\mu}\delta^{im}A^{n\nu} + gf^{amn}A^{m\mu}g^{\beta\nu}\delta^{ni}) \\
&= gf^{aic}A_\nu^c(\partial^\beta A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\beta} + gf^{amn}A^{m\beta}A^{n\nu}) + gf^{abi}A_\mu^b(\partial^\mu A^{a\beta} - \partial^\beta A^{a\mu} + gf^{amn}A^{m\mu}A^{n\beta}) \\
&\quad + (\partial^\beta A_\nu^a - \partial_\nu A^{a\beta} + gf^{abc}A^{b\beta}A_\nu^c)gf^{ain}A^{n\nu} + (\partial_\mu A^{a\beta} - \partial^\beta A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A^{c\beta})gf^{ami}A^{m\mu} \\
&= gf^{aic}A_\nu^c(4\partial^\beta A^{a\nu} - 4\partial^\nu A^{a\beta} + gf^{amn}A^{m\beta}A^{n\nu}) + g^2f^{abi}f^{amn}A_\mu^b A^{m\mu}A^{n\beta} \\
&\quad + g^2f^{abc}f^{ain}A^{b\beta}A_\nu^c A^{n\nu} + g^2f^{abc}f^{ami}A_\mu^b A^{c\beta}A^{m\mu} \\
&= 4gf^{aic}A_\nu^c(\partial^\beta A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\beta}) + g^2f^{aic}f^{amn}A_\nu^c A^{n\nu}A^{m\beta} + g^2f^{abi}f^{amn}A_\mu^b A^{m\mu}A^{n\beta} \\
&\quad + g^2f^{ain}f^{abc}A_\nu^n A^{c\nu}A^{b\beta} + g^2f^{ami}f^{abc}A_\mu^m A^{b\mu}A^{c\beta} \\
&= 4gf^{aic}A_\nu^c(\partial^\beta A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\beta}) + 4g^2f^{aic}f^{amn}A_\nu^c A^{n\nu}A^{m\beta} \\
&= 4gf^{aic}A_\nu^c\big(\partial^\beta A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\beta} + gf^{amn}A^{m\beta}A^{n\nu}\big) \\
&= 4gf^{aic}A_\nu^c F^{a\beta\nu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta^i)}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\
&= \partial_\alpha\big[(g^\alpha{}_\mu g^\beta{}_\nu\delta^{ai} - g^\alpha{}_\nu g^\beta{}_\mu\delta^{ai})(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + gf^{amn}A^{m\mu}A^{n\nu}) \\
&\quad + (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)(g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\delta^{ai} - g^{\alpha\nu}g^{\mu\beta}\delta^{ai})\big] \\
&= \partial_\alpha\big[(\partial^\alpha A^{i\beta} - \partial^\beta A^{i\alpha} + gf^{imn}A^{m\alpha}A^{n\beta}) - (\partial^\beta A^{i\alpha} - \partial^\alpha A^{i\beta} + gf^{imn}A^{m\beta}A^{n\alpha}) \\
&\quad + (\partial^\alpha A^{i\beta} - \partial^\beta A^{i\alpha} + gf^{ibc}A^{b\alpha}A^{c\beta}) - (\partial^\beta A^{i\alpha} - \partial^\alpha A^{i\beta} + gf^{ibc}A^{b\beta}A^{c\alpha})\big] \\
&= \partial_\alpha\big[4\partial^\alpha A^{i\beta} - 4\partial^\beta A^{i\alpha} + 2gf^{imn}A^{m\alpha}A^{n\beta} + 2gf^{ibc}A^{b\alpha}A^{c\beta}\big] \\
&= 4\partial_\alpha(\partial^\alpha A^{i\beta} - \partial^\beta A^{i\alpha} + gf^{ibc}A^{b\alpha}A^{c\beta}) \\
&= 4\partial_\alpha F^{i\alpha\beta}
\end{aligned}$$

$$\partial_\alpha \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A^i_\beta)}(B^a \partial^\mu A^a_\mu) = g^{\alpha\mu} g^\beta{}_\mu \partial_\alpha B^i = \partial^\beta B^i$$

というわけで、A_μ による運動方程式はオイラー・ラグランジュ方程式から

$$\begin{aligned} gf^{aic}\partial^\beta \overline{\eta}^a \eta^c - gf^{aic} A^c_\nu F^{a\beta\nu} + \partial_\alpha F^{i\alpha\beta} - \partial^\beta B^i &= \partial_\alpha F^{i\alpha\beta} - gf^{aic} A^c_\alpha F^{a\beta\alpha} - \partial^\beta B^i + gf^{aic}\partial^\beta \overline{\eta}^a \eta^c \\ &= \partial_\alpha F^{i\alpha\beta} + gf^{ica} A^c_\alpha F^{a\alpha\beta} - \partial^\beta B^i + gf^{aic}\partial^\beta \overline{\eta}^a \eta^c \end{aligned}$$

よって、共変微分を使えば

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a - \partial^\nu B^a - gf^{abc}\partial^\nu \overline{\eta}^b \eta^c = 0$$

ネーターカレントは今の場合では場の変化だけなので、場を ϕ_r(スカラー場とスピノール場) のように書けば

$$j_\mu(x) = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} \delta\phi_r(x)$$

ただし今の場合、BRS 変換と場にはグラスマン数があるために、グラスマン数の微分は左からかかるのでなく右から微分が作用するようになっています ($\delta\phi_r(x)$ が右側にいるように定義しているため)。これだと面倒なので、全てを左から作用しているようにするために

$$j_\mu(x) = \delta\phi_r(x) \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu \phi_r)}$$

のように変更します。そうすると、$\delta\phi_r$ が左側にいるので $\delta\phi_r$ の中の λ を左側に持ってくれば、ただの比例定数みたいになります (λ を左に持っていくときに δA^a_μ とかの符号が変わる)。このことに関係して、左辺を $j_\mu(x)$ と書いていますが、正確には $\lambda j_\mu(x)$ となっています。このことは (4) を見れば分かりますが、BRS 変換 δ の生成子は Q でなく λQ になっているためです。しかし、今言ったように右辺の λ を左側に持っていけば消せるので、そのまま $j_\mu(x)$ と書いてしまっています。なので、これ以降の BRS 変換 δ に関しては λ を左側に持っていって、消したものになります。

ここでの変化する場は $A^a_\mu, \eta^a, \overline{\eta}^a$ なので

$$\begin{aligned} j^\mu &= \delta A^a_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} + \delta\eta^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta^a)} + \delta\overline{\eta}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\eta}^a)} \\ &= -\delta A^a_\nu F^{a\mu\nu} + \delta A^a_\nu g^{\mu\nu} B^a - \delta\eta^a \partial^\mu \overline{\eta}^a \\ &= -(D_\nu \eta)^a F^{a\mu\nu} + (D^\mu \eta)^a B^a + \frac{1}{2} gf^{abc}\eta^b \eta^c \partial^\mu \overline{\eta}^a \\ &= -\partial_\nu(\eta F^{\mu\nu})^a + \eta^a (D_\nu F^{\mu\nu})^a + (D^\mu \eta)^a B^a + \frac{1}{2} gf^{abc}\eta^b \eta^c \partial^\mu \overline{\eta}^a \end{aligned}$$

運動方程式より

$$(D_\mu F^{\mu\nu})^a = \partial^\nu B^a + gf^{abc}\partial^\nu \overline{\eta}^b \eta^c$$

であることを代入して

$$
\begin{aligned}
j^\mu &= \eta^a(D_\nu F^{\mu\nu})^a + (D^\mu\eta)^a B^a + \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c\partial^\mu\overline{\eta}^a - \partial_\nu(\eta F^{\mu\nu})^a \\
&= -\eta^a(D_\nu F^{\nu\mu})^a + (D^\mu\eta)^a B^a + \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c\partial^\mu\overline{\eta}^a - \partial_\nu(\eta F^{\mu\nu})^a \\
&= -\eta^a(\partial^\mu B^a + gf^{abc}\partial^\mu\overline{\eta}^b\eta^c) + (D^\mu\eta)^a B^a + \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c\partial^\mu\overline{\eta}^a - \partial_\nu(\eta F^{\mu\nu})^a \\
&= -\eta^a\partial^\mu B^a - gf^{abc}\eta^a\partial^\mu\overline{\eta}^b\eta^c + (D^\mu\eta)^a B^a - \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b(\partial^\mu\overline{\eta}^a)\eta^c - \partial_\nu(\eta F^{\mu\nu})^a \\
&= -\eta^a\partial^\mu B^a + B^a(D^\mu\eta)^a - gf^{abc}\eta^a\partial^\mu\overline{\eta}^b\eta^c + \frac{1}{2}gf^{bac}\eta^b(\partial^\mu\overline{\eta}^a)\eta^c - \partial_\nu(\eta F^{\mu\nu})^a \\
&= -\eta^a\partial^\mu B^a + B^a(D^\mu\eta)^a - \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^a\partial^\mu\overline{\eta}^b\eta^c - \partial_\nu(\eta F^{\mu\nu})^a
\end{aligned}
$$

これが BRS 対称性に対するネーターカレントです。BRS 電荷は

$$
\begin{aligned}
Q = \int d^3x j^0 &= \int d^3x[-\eta^a\partial^0 B^a + B^a(D^0\eta)^a - \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^a\partial^0\overline{\eta}^b\eta^c - \partial_\nu(\eta F^{0\nu})^a] \\
&= \int d^3x[-\eta^a\partial^0 B^a + B^a(D^0\eta)^a - \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^a\partial^0\overline{\eta}^b\eta^c]
\end{aligned}
$$

最後の項は $F^{00}=0$ と $\partial_i(\eta F^{0i})$ が三次元表面積分によって消えることから落とせます。これの BRS 変換を行ってみると

$$
\begin{aligned}
\delta Q = &\int d^3x\big(- \delta\eta^a\partial^0 B^a + B^a\delta(D^0\eta)^a - \frac{1}{2}gf^{abc}\delta\eta^a\partial^0\overline{\eta}^b\eta^c - \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^a\delta\partial^0\overline{\eta}^b\eta^c - \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^a\partial^0\overline{\eta}^b\delta\eta^c\big) \\
= &\int d^3x\big(\frac{1}{2}gf^{abc}\eta^b\eta^c\lambda\partial^0 B^a + \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{amn}\eta^m\eta^n\lambda\partial^0\overline{\eta}^b\eta^c \\
&\qquad - \frac{1}{2}gf^{abc}\eta^a\partial^0 B^b\lambda\eta^c - \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{cmn}\eta^a\partial^0\overline{\eta}^b\eta^m\eta^n\lambda\big) \\
= &\int d^3x\big(\frac{1}{2}gf^{abc}\partial^0 B^a\eta^b\eta^c\lambda + \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{amn}\eta^m\eta^n\partial^0\overline{\eta}^b\eta^c\lambda \\
&\qquad - \frac{1}{2}gf^{bac}\partial^0 B^b\eta^a\eta^c\lambda - \frac{1}{4}g^2 f^{cba}f^{cmn}\eta^m\eta^n\partial^0\overline{\eta}^b\eta^a\lambda\big) \\
= &\,0
\end{aligned}
$$

なので BRS 電荷はベキ零性 $Q^2=0$ を持っていることがわかります。

このQ は保存電荷と BRS 変換の生成子になっているというだけでなく、状態空間を 3 つに分割します (3 つの部分空間 (subspace) に分ける)。どういうことかというと、ハミルトニアンの固有状態 $|\psi\rangle$ があるとすれば (Q は保存量なのでハミルトニアンと交換する)、Q が作用すると別の状態になる部分空間

$$
Q|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle
$$

そして、この状態 $|\psi_2\rangle$ は Q のベキ零性より

$$Q|\psi_2\rangle = Q^2|\psi_1\rangle = 0$$

Q が作用すると一発でハミルトニアンの固有状態が消える部分空間

$$Q|\psi_0\rangle = 0$$

$|\psi_0\rangle$ は $|\psi_2\rangle$ のような形には書けないとします。このように、ハミルトニアン H の固有状態を 3 つの部分空間 H_0, H_1, H_2 に分類します。H_2 の部分空間での内積は

$$\langle\psi_2^a|\psi_2^b\rangle = \langle\psi_1^a|Q|\psi_2^b\rangle = 0$$

H_0 と H_1 による内積も

$$\langle\psi_2^a|\psi_0^b\rangle = \langle\psi_1^a|Q|\psi_0^b\rangle = 0$$

これで何がわかるのかというと、物理的状態というのは

$$Q|\psi_0\rangle = 0$$

を満たしているということです。
　大雑把な理由を可換ゲージ場の変換

$$\delta A_\mu = -(\partial_\mu\eta)\lambda \tag{7a}$$

$$\delta\psi = -ig\eta^a t^a\lambda \tag{7b}$$

$$\delta\eta = 0 \tag{7c}$$

$$\delta\overline{\eta} = B\lambda \tag{7d}$$

$$\delta B = 0 \tag{7e}$$

から見れます。この変換を状態に施すということを対応させてみます。ゲージ場 A_μ は変換によってゴースト場に、ゴースト場 η は 0 に、反ゴースト場は B になっていることから、ゲージ場 A_μ は 2 回の変換で消え、1 回の変換でゴースト場 η のいる状態に、反ゴースト場は 1 回の変換で B のいる状態になっていると考えられます。なので、ゴースト場は H_2 に、ゲージ場 A_μ は H_1 に、反ゴースト場は H_1 に、B は H_2 にいます。B というのは、ローレンツゲージにおいて

$$\alpha B = -\partial_\mu A^\mu$$

なのでこの場 B は、偏極ベクトル ϵ_μ と運動量が $k\cdot\epsilon \neq 0$ となる A_μ の成分に対応しています。これでわかったように、ゴーストとゲージ場の横偏極でない成分という非物理的なものは H_1 か H_2 に分類されます。こんなことから物理的な状態に対しての条件

$$Q|\psi_0\rangle = Q|Phys\rangle = 0$$

というのが出てき、物理的状態は BRS 変換に対して不変であることになります。この条件のことを九後・小嶋の補助条件と言い、電磁場においては Gupta-Bleuler による条件と同じものです。