

## カイラル対称性と力学的破れ

シュウィンガー・ダイソン方程式の非摂動的な扱いの例として、QEDにおけるカイラル対称性の力学的破れによる質量生成を見ていきます。ここでは  $U(1)$  でのカイラル対称性を扱います。カイラル変換については雑にしか見ないので、もう少し細かいことは「カイラル対称性と PCAC」や「南部・Jona-Lasinio モデル」の方を見てください。

最初にカイラル対称性について大雑把に触れておきます。カイラル対称性は、 $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  による大局的カイラル変換

$$\psi \Rightarrow \exp[i\gamma^5\theta]\psi, \psi^\dagger \Rightarrow \psi^\dagger \exp[-i\gamma^5\theta]$$

に対してラグランジアンが不変であることを言います。この変換は群論的には  $U(1)$  変換です。カイラル変換は端的に言えば、右巻きと左巻きを別々に位相変換するものです。このカイラル変換に対してラグランジアンがどうなるのか見るために、ディラック場のラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi$$

を使ってみます。運動項は

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi &\Rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta}\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu e^{i\gamma^5\theta}\psi \\ &= i\psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta}e^{i\gamma^5\theta}\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\psi \end{aligned}$$

$\gamma_5$  は他のガンマ行列とは反交換するのでこのようになります。質量項は

$$\begin{aligned} m\bar{\psi}\psi &\Rightarrow m\psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta}\gamma_0 e^{i\gamma^5\theta}\psi \\ &= m\psi^\dagger(1 - i\gamma^5\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots)\gamma_0 e^{i\gamma^5\theta}\psi \\ &= m\psi^\dagger\gamma_0(1 + i\gamma^5\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots)e^{i\gamma^5\theta}\psi \\ &= m\psi^\dagger\gamma_0 e^{i\gamma^5\theta}e^{i\gamma^5\theta}\psi \\ &= m\bar{\psi}e^{2i\gamma^5\theta}\psi \end{aligned}$$

なので、質量項に対しては不変になっていません。

カイラル変換の重要な性質を示しておきます。カイラル変換として

$$i\bar{\psi}\gamma_5\psi \Rightarrow i\psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta}\gamma_0\gamma_5 e^{i\gamma^5\theta}\psi$$

このようなものを考えます。これを三角関数を使って変形していくと

$$\begin{aligned} \psi^\dagger e^{-i\gamma^5\theta}\gamma_0\gamma_5 e^{i\gamma^5\theta}\psi &= \psi^\dagger(1 - i\gamma^5\theta - \frac{1}{2}\theta^2 \dots)\gamma_0\gamma_5(1 + i\gamma^5\theta - \frac{1}{2}\theta^2 \dots)\psi \\ &= \psi^\dagger(\cos\theta - i\gamma^5\sin\theta)\gamma_0\gamma_5(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\psi \\ &= \bar{\psi}(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\gamma_5(\cos\theta + i\gamma^5\sin\theta)\psi \\ &= \bar{\psi}(\gamma_5\cos^2\theta - \gamma_5\sin^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta)\psi \\ &= \bar{\psi}(\gamma_5\cos 2\theta + i\sin 2\theta)\psi \quad (\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta, 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta) \end{aligned}$$

途中で三角関数の展開

$$\begin{aligned} \cos\theta &= 1 + \frac{-1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \\ \sin\theta &= \theta + \frac{-1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \end{aligned}$$

を使っています。 $\theta = \pi/4$  とすれば

$$i\bar{\psi}\gamma_5\psi \Rightarrow -\bar{\psi}\psi$$

これはカイラル変換前は擬スカラーだったのが、変換後はスカラーになっています。このように、カイラル変換は擬スカラーとスカラーを入れ替える性質を持っています ( $\bar{\psi}\psi$  を変換すれば  $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$  になる)。

カイラル変換は、右巻き成分と左巻き成分に独立に作用する変換とも言えます。場  $\psi$  を右巻きと左巻きに分解して、相対論的量子力学の「ワイル方程式」での右巻きと左巻きの射影演算子  $P_L, P_R$  を使えば

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi + \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi = P_L\psi + P_R\psi = \psi_L + \psi_R \\ \bar{\psi} &= \bar{\psi}P_R + \bar{\psi}P_L = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R \end{aligned}$$

$P_L, P_R$  は

$$P_L^2 = P_L, P_R^2 = P_R, P_L P_R = P_R P_L = 0$$

そして、右巻きと左巻き別々に作用する大局的な位相変換を

$$\psi_R \Rightarrow \exp[i\theta_R]\psi_R, \psi_L \Rightarrow \exp[i\theta_L]\psi_L$$

これらによって運動項は

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi &= i(\bar{\psi}P_R + \bar{\psi}P_L)\gamma_\mu\partial^\mu(P_L\psi + P_R\psi) = i\bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R \\ &\Rightarrow i\bar{\psi}_L e^{-i\theta_L}\gamma_\mu\partial^\mu e^{i\theta_L}\psi_L + i\bar{\psi}_R e^{-i\theta_R}\gamma_\mu\partial^\mu e^{i\theta_R}\psi_R \\ &= i\psi_L^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R \\ &= i\bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L + i\bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R \end{aligned}$$

質量項は

$$\begin{aligned} m\bar{\psi}\psi &= m(\bar{\psi}P_R + \bar{\psi}P_L)(P_L\psi + P_R\psi) = m(\bar{\psi}P_L P_L\psi + \bar{\psi}P_R P_R\psi) = m(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R) \\ &\Rightarrow m(\bar{\psi}_R e^{-i\theta_R} e^{i\theta_L}\psi_L + \bar{\psi}_L e^{-i\theta_L} e^{i\theta_R}\psi_R) \end{aligned}$$

明らかにもとの  $m\bar{\psi}\psi$  とは異なっています。これは質量項は右巻きと左巻き成分を混ぜてしまうからです。こちら辺はワイル方程式での話と同じです。

というわけで、ディラック場に対して大局的カイラル不変性を持たせるためには質量 0 である必要があります。現在の標準モデルにおいては、カイラル対称性とその自発的な破れが重要な要素となっており、クォーク質量、相互作用なんかの原因を担っています。例えば、パイオンの質量はカイラル対称性の自発的破れによって生成されるゴールドストーンボソンと考えられています。

他にもカイラル対称性が破られているとされる理由としては、質量が縮退しパリティ 2 重項となるものが存在していないためです。これは、パリティ変換は空間反転なので右巻きと左巻きを入れ替えるもので、カイラル変換は右巻き左巻き別々の変換であることから分かります。つまり、パリティ変換をしてもカイラル変換は影響を受けないので、パリティによって縮退を起こすということです。

例えばパリティ変換  $\exp[i\theta]\gamma_0$  とカイラル変換  $\exp[i\gamma^5\theta]$  とは反交換するために、パリティを反転させた固有状態が持てます。また、カイラル変換は擬スカラーとスカラーを入れ換えられるので、カイラル対称性があるなら擬スカラーとスカラーは同じ質量を持っていると簡単に言えます (スカラーでなくベクトルやスピン 1/2 を持っている場合も同じ)。パリティ 2 重項は例えば  $\rho$  と  $a_1$  によって作られます。記号として  $J^P$  というのを使って ( $J$  はスピン、 $P$  はパリティ)、 $\rho$  は  $1^-$ 、 $a_1$  は  $1^+$  のように書かれます。これらの質量は、 $\rho$  が 770(MeV)、 $a_1$  が 1260(MeV) でかなり差があります。このように実験的にパリティ 2 重項が観測されていないことからカイラル対称性は破れていると考えられています。

ただ今のような  $U(1)$  のカイラル対称性は特殊な問題を起こします (「カイラルアノマリー」参照)。他にも  $U(1)$  カイラル対称性の問題は「物理学最前線 5」の河原林研著:素粒子のカイラル対称性-U(1) 問題をめぐって、川村嘉春著:「例題形式で学ぶ現代素粒子物理学」なんかのっています。

QCD でのカイラル対称性の破れと言ったときには、フレーバによる  $SU(2)$  や  $SU(3)$  対称性を指し、これから見ていくのはそのカイラル対称性の破れの一つである力学的な破れ (dynamical breaking) についてです。力学的な破れは、もとのラグランジアンにヒッグス場のような後で質量と関係してくる場が入っていない場合に起きる対称性の破れです。ヒッグス場の時は、ヒッグス場の真空期待値が 0 でなくなるときに質量を獲得するという流れでした。それに対して、カイラル対称性の力学的破れでは、フェルミオン場  $\bar{\psi}\psi$  が真空期待値を持つようにさせます。こちら辺の話は南部・ジョナラシニオ (Jona-Lasinio) による超伝導でのクーパー対の類似としてのクォーク凝縮とかが関連してきていますが、飛ばします。

ここから本題のシュウィンガー・ダイソン方程式の解として、質量 0 のラグランジアンから質量を生成させるものがあることを見ていきます。ラグランジアンとしては QED の

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m - eA)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2$$

を使います。まだ質量は 0 とせずに残しておきます。くり込みについては気にしないでいきます (下の補足参照)。これの電子の自己エネルギーに対するシュウィンガー・ダイソン方程式は

$$\Sigma(p) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu D_{\mu\nu}(p-q) S(q) \Gamma^\nu(p, q)$$

$S, D_{\mu\nu}$  は厳密な電子と光子の伝播関数、 $\Gamma^\nu(p, q)$  は厳密な頂点です。「シュウィンガー・ダイソン方程式～QED～」で出したものとは光子と電子の伝播関数の変数を変えて取っていますが、こっちの方が便利なので、こうしています。

これを解くためにいろいろと小細工をします。まず、電子の厳密な伝播関数は自己エネルギー  $\Sigma(p^2)$  によって

$$S(p) = \frac{1}{p^\mu\gamma_\mu - \Sigma(p^2)}$$

これは「くり込み～ $\phi^4$ 理論～」の補足 1 とかで出てきたように、場のくり込み定数  $Z_2(p^2)$  と質量に対応する質量関数  $m(p^2)$  を使って

$$S(p) = \frac{Z_2(p^2)}{p^\mu\gamma_\mu - m(p^2)} \quad (1a)$$

とも書けます。この形でもいいですが、

$$S(p) = \frac{1}{A(p^2)p^\mu\gamma_\mu - B(p^2)} \quad (1b)$$

のように、2つのスカラー関数  $A(p^2), B(p^2)$  を使った形のほうが便利です ( $p^2$  依存にしているのはローレンツ不変性から)。(1a) と (1b) の関係は

$$Z(p^2) = \frac{1}{A(p^2)}, \quad m(p^2) = \frac{B(p^2)}{A(p^2)}$$

このままではどうにもならないので、シュウィンガー・ダイソン方程式の残りの部分に対しては近似を行います。

まず、頂点  $\Gamma^\nu(p, q)$  を最低次の頂点  $\gamma^\nu$  に変えます。そして、さらに光子の伝播関数を最低次の

$$D_{0\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu / q^2}{q^2} - \xi \frac{q_\mu q_\nu}{q^4}$$

に変えます。これをレインボー (rainbow) 近似と呼びます。頂点を最低次のものに変えただけのものをはしご (ladder) 近似と呼び、さらに光子の伝播関数を最低次に変えたものを quenched はしご近似と呼んだり、レインボー近似や quenched-レインボー近似と呼んだりもしているようです。場合によっては、頂点と光子の伝播関数を最低次に変えたものをはしご近似と呼んでいる場合もあります。ここでは面倒なので、はしご近似で通します。ちなみに、quenched は電子による真空偏極の寄与を無視するということです。

この近似を使うことでシュウィンガー・ダイソン方程式は

$$\Sigma(p) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \left( \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / k^2}{k^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right) \frac{1}{A(q^2)\gamma_\rho q^\rho - B(q^2)} \gamma^\nu \quad (k_\mu = (p - q)_\mu) \quad (2)$$

シュウィンガー・ダイソン方程式より求められる電子の厳密な伝播関数の逆は

$$S^{-1}(p) = \gamma_\mu p^\mu - m_0 - \Sigma(p)$$

なので、これに (1b) と (2) を入れると

$$\begin{aligned} A(p^2)\gamma_\mu p^\mu - B(p^2) &= \gamma_\mu p^\mu - m_0 - ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu D_{\mu\nu}(p - q) S(q) \gamma^\nu \\ &= \gamma_\mu p^\mu - m_0 - ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \left( \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / k^2}{k^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right) \frac{1}{A(q^2)\gamma_\rho q^\rho - B(q^2)} \gamma^\nu \\ &= \gamma_\mu p^\mu - m_0 - ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \left( \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / k^2}{k^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right) \frac{A(q^2)\gamma_\rho q^\rho + B(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)} \gamma^\nu \end{aligned} \quad (3)$$

両辺に対してトレース (スピノールに対するトレース) をとれば奇数個の  $\gamma_\mu$  を持つ項は消えるので

$$\begin{aligned} -4B(p^2) &= -4m_0 - 4ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left( \frac{-4 + 1}{k^2} - \xi \frac{k^2}{k^4} \right) \frac{B(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)} \quad (\gamma_\mu \gamma^\mu = 4I) \\ B(p^2) &= m_0 + ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-(3 + \xi)}{k^2} \frac{B(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)} \end{aligned}$$

これとは別に (3) に  $\gamma_\mu p^\mu$  をかけてトレースをとると

$$4A(p^2)p^2 = 4p^2 - ie^2 \text{tr} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \left( \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / k^2}{k^2} - \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^4} \right) \frac{A(q^2)\gamma_\rho q^\rho}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)} \gamma^\nu \gamma_\lambda p^\lambda$$

左辺第 2 項のトレースの計算は

$$\begin{aligned} \text{tr}[\gamma^\mu g_{\mu\nu} \gamma_\rho q^\rho \gamma^\nu \gamma_\lambda p^\lambda] &= q^\rho p^\lambda \text{tr}[\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\lambda] \\ &= 4q^\rho p^\lambda (g_{\nu\rho} g^\nu_\lambda + g_{\nu\lambda} g^\nu_\rho - g_\nu^\nu g_{\rho\lambda}) \\ &= 4(q_\nu p^\nu + q^\nu p_\nu - 4q^\rho p_\rho) \\ &= -8q \cdot p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}[\gamma^\mu k_\mu k_\nu \gamma_\rho q^\rho \gamma^\nu \gamma_\lambda p^\lambda] &= k_\mu k_\nu q^\rho p^\lambda \text{tr}[\gamma^\mu \gamma_\rho \gamma^\nu \gamma_\lambda] \\
&= 4k_\mu k_\nu q^\rho p^\lambda (g^\mu_\rho g^\nu_\lambda + g^\mu_\lambda g^\nu_\rho - g^{\mu\nu} g_{\rho\lambda}) \\
&= 4(k_\rho k_\lambda q^\rho p^\lambda + k_\lambda k_\rho q^\rho p^\lambda - k^\nu k_\nu q^\rho p_\rho) \\
&= 4((k \cdot q)(k \cdot p) + (k \cdot p)(k \cdot q) - (k \cdot k)(p \cdot q)) \\
&= 4(2(k \cdot q)(k \cdot p) - (k \cdot k)(q \cdot p))
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
4A(p^2)p^2 &= 4p^2 - ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( \frac{4q \cdot p + 8(k \cdot q)(k \cdot p)/k^2}{k^2} - \xi \frac{4(2(k \cdot q)(k \cdot p) - (k \cdot k)(q \cdot p))}{k^4} \right) \frac{A(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)} \\
&= 4p^2 - ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( \frac{4q \cdot p + 4\xi(q \cdot p)}{k^2} + \frac{8(k \cdot q)(k \cdot p) - 8\xi(k \cdot q)(k \cdot p)}{k^4} \right) \frac{A(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)} \\
&= 4p^2 - 4ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( \frac{(1 + \xi)(q \cdot p)}{k^2} + \frac{2(1 - \xi)(k \cdot q)(k \cdot p)}{k^4} \right) \frac{A(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)} \\
A(p^2) &= 1 - \frac{ie^2}{p^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( \frac{(1 + \xi)(q \cdot p)}{k^2} + \frac{2(1 - \xi)(k \cdot q)(k \cdot p)}{k^4} \right) \frac{A(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)}
\end{aligned}$$

というわけで、シュウイングー・ダイソン方程式は連立した積分方程式の組

$$\begin{aligned}
A(p^2) &= 1 - \frac{ie^2}{p^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left( \frac{(1 + \xi)(q \cdot p)}{k^2} + \frac{2(1 - \xi)(k \cdot q)(k \cdot p)}{k^4} \right) \frac{A(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)} \\
B(p^2) &= m_0 + ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-(3 + \xi)}{k^2} \frac{B(q^2)}{A^2(q^2)q^2 - B^2(q^2)}
\end{aligned}$$

となります。ちなみに  $Z(p^2)$  を使った形にしたければ  $Z(p^2) = A^{-1}(p^2)$ ,  $m(p^2) = B(p^2)/A(p^2)$  とすればいいです。

ここでは  $B$  を見ていくので、ユークリッド空間で  $A(p^2)$  の角度積分を実行した結果だけ示すと

$$A(x) = 1 + \frac{e^2 \xi}{16\pi^2 x^2} \int_0^x dy \frac{y^2 A(y)}{A^2(y)y + B^2(y)} + \frac{e^2 \xi}{16\pi^2} \int_x^\infty dy \frac{A(y)}{A^2(y)y + B^2(y)} \quad (x = p_E^2, y = q_E^2)$$

使っている積分は

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty dq^2 \int d\Omega \frac{1}{(p-q)^4} &= \int_0^x dy \frac{1}{|x-y|x} + \int_x^\infty dy \frac{1}{|x-y|y} \\
\int_0^\infty dq^2 \int d\Omega \frac{(p \cdot q)}{(p-q)^2} &= \int_0^x dy \frac{y}{2x} + \int_x^\infty dy \frac{x}{2y} \\
\int_0^\infty dq^2 \int d\Omega \frac{(p \cdot q)}{(p-q)^4} &= \int_0^x dy \frac{y}{|x-y|x} + \int_x^\infty dy \frac{x}{|x-y|y} \\
\int_0^\infty dq^2 \int d\Omega \frac{(p \cdot q)^2}{(p-q)^4} &= \int_0^x dy \frac{xy + 3y^2}{4|x-y|x} + \int_x^\infty dy \frac{xy + 3x^2}{4|x-y|y}
\end{aligned}$$

このとき  $p, q$  はユークリッド空間でのベクトル、 $x = p^2, y = q^2$ 。角度積分の表記は (4b) の下に書いてあります。 $A(p^2)$  はランダウゲージ  $\xi = 0$  で  $A(p^2) = 1$  と分かります。なので、ランダウゲージを取るなら  $B(p^2)$  は

$$B(p^2) = m_0 + ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-3}{k^2} \frac{B(q^2)}{q^2 - B^2(q^2)}$$

となり、これだけ解けばいいようになります。

今までのラグランジアンはカイラル対称性を持っていないものから始めましたが、 $m_0 = 0$  とすればカイラル対称性を持つので、カイラル対称性を持っている理論から始めるなら

$$B(p^2) = ie^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-3}{(p-q)^2} \frac{B(q^2)}{q^2 - B^2(q^2)} \quad (4a)$$

すぐ分かるように、 $B(p^2)$  は  $B(p^2) = 0$  という解を持っています。これは摂動論と同じように、質量 0 から始めればそのまま質量は 0 になることを表わします。しかし、この方程式は 0 以外にも解を持っています。

$B(p^2)$  の解を求めていきます。まずは、ウィック回転してユークリッド空間に移して

$$B(p_E^2) = e^2 \int \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} \frac{3}{(p_E - q_E)^2} \frac{B(q_E^2)}{q_E^2 + B^2(q_E^2)} \quad (4b)$$

ユークリッド化は

$$d^4q = id^4q_E$$

$$q^2 = -q_E^2, \quad (p - q)^2 = p^2 + q^2 - 2p \cdot q = -p_E^2 - q_E^2 + 2p_E \cdot q_E = -(p_E - q_E)^2$$

まずは素直に積分できるか試します。角度積分は、4次元ユークリッド空間においては、4次元ベクトル  $x, y$  の間の角度を  $\theta$  として

$$\int d^4x f((x-y)^2) = \int dx^2 d\Omega \pi^2 x^2 f(x^2 + y^2 - 2|x||y| \cos \theta)$$

$$d\Omega = \frac{2\pi \sin^2 \theta d\theta}{2\pi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta} = \frac{2\pi \sin^2 \theta d\theta}{\pi^2} = \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

これから

$$B(p_E^2) = \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2}{\pi} \pi^2 \int_0^\infty dq_E^2 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{3}{p_E^2 + q_E^2 - 2|p_E||q_E| \cos \theta} \frac{B(q_E^2)}{q_E^2 + B^2(q_E^2)}$$

$$B(x) = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dy \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{3y}{x + y - 2\sqrt{xy} \cos \theta} \frac{B(y)}{y + B^2(y)}$$

変数を  $p_E^2 = x, q_E^2 = y$  とかえています。このまま  $\theta$  積分を実行できますが、(4a) に戻って

$$\frac{1}{(p-q)^2} = \theta(p-q) \frac{1}{p^2} + \theta(q-p) \frac{1}{q^2}$$

と近似してもできます。これによって、ユークリッド空間における角度積分は単純に

$$\int d\Omega = 2\pi^2$$

となるので、4次元積分を

$$\int d^4q = \int_0^\infty dq_E q_E^2 \int d\Omega = 2\pi^2 \int_0^\infty dq_E^2 \frac{|q_E|^3}{2|q_E|}$$

とすることで

$$\begin{aligned} B(p_E^2) &= e^2 \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{|p_E|^2} dq_E^2 \frac{1}{2|q_E|} \frac{3|q_E|^3}{p_E^2} \frac{B(q_E^2)}{q_E^2 + B^2(q_E^2)} + e^2 \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_{|p_E|^2}^\infty dq_E^2 \frac{1}{2|q_E|} \frac{3|q_E|^3}{q_E^2} \frac{B(q^2)}{q_E^2 + B^2(q_E^2)} \\ B(x) &= \frac{3e^2}{16\pi^2} \frac{1}{x} \int_0^x dy \frac{yB(y)}{y + B^2(y)} + \frac{3e^2}{16\pi^2} \int_x^\Lambda dy \frac{B(y)}{y + B^2(y)} \\ &= \frac{3\alpha}{4} \frac{1}{x} \int_0^x dy \frac{yB(y)}{y + B^2(y)} + \frac{3\alpha}{4} \int_x^\Lambda dy \frac{B(y)}{y + B^2(y)} \quad (\alpha = \frac{e^2}{4\pi^2}) \end{aligned}$$

ここで発散をどうにかするために、積分の上限を制限する切断パラメータとして  $\Lambda$  を導入しています。下限も切る必要がありますが、それは後でいれます。

積分方程式から微分方程式に変えます。  $x$  で微分すれば (積分範囲の上限と下限に  $x$  がいることに注意)

$$\begin{aligned} \frac{dB(x)}{dx} &= \frac{\alpha}{4} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \right) \int_0^x dy \frac{3yB(y)}{y + B^2(y)} + \frac{\alpha}{4} \frac{1}{x} \frac{3xB(x)}{x + B^2(x)} - \frac{\alpha}{4} \frac{3B(x)}{x + B^2(x)} \\ &= \frac{\alpha}{4} \left( \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \right) \int_0^x dy \frac{3yB(y)}{y + B^2(y)} \end{aligned}$$

さらにもう1回微分すれば積分が消えて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{1}{\left( \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \right)} \frac{dB(x)}{dx} &= \frac{\alpha}{4} \frac{3xB(x)}{x + B^2(x)} \\ x \frac{d^2B(x)}{dx^2} + 2 \frac{dB(x)}{dx} + \frac{\alpha}{4} \frac{3B(x)}{x + B^2(x)} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

この方程式はシュツルム・リウビル (Sturm-Liouville) 系と呼ばれるものです。そして、境界条件は積分したら元の形に戻るということから、2階微分方程式 (5) より

$$\frac{1}{\left( \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \right)} \frac{dB(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{dB(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (6a)$$

もう1つの条件として同じように、1階微分方程式の段階のものを積分することで

$$\left| B(x) - \frac{\alpha}{4} \frac{1}{x} \int_0^x dy \frac{3yB(y)}{y+B^2(y)} \right|_{x=\Lambda} = \left| B(x) + x \frac{dB(x)}{dx} \right|_{x=\Lambda} = \left| \frac{d}{dx}(xB(x)) \right|_{x=\Lambda} = 0 \quad (6b)$$

ここまで来てはまだ厳密に解けないので、特定の領域に限定します。 $x$  が大きくて  $B(x)$  が小さいという場合を考えて、分母の  $B^2(x)$  を無視すれば (5) は

$$x^2 \frac{d^2 B(x)}{dx^2} + 2x \frac{dB(x)}{dx} + \frac{3\alpha}{4} B(x) = 0$$

このとき積分の上限を  $\Lambda$ 、下限を  $\Lambda_{IR}$  とします ( $\Lambda_{IR} \leq x \leq \Lambda$ )。この2階微分方程式の解としては、 $Cx^\lambda$  が考えられるので (正確には2階微分方程式なので定数は  $C_1, C_2$  のように2つないといけない)、これを使って

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 C \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} + 2Cx\lambda x^{\lambda-1} + \frac{3\alpha}{4} Cx^\lambda \\ &= C\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 2C\lambda x^\lambda + \frac{3\alpha}{4} Cx^\lambda \\ &= \lambda(\lambda-1) + 2\lambda + \frac{3\alpha}{4} \\ &= \lambda^2 + \lambda + \frac{3\alpha}{4} \end{aligned}$$

2次方程式なので解の公式から

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-3\alpha}}{2}$$

これによって  $x$  が大きな領域では、 $\alpha < 1/3$  なら  $x$  のべきとして振舞います。それに対して  $\alpha > 1/3$  では、ルートは虚数になるので振動します。その振動は

$$Cx^{\frac{-1 \pm i\sqrt{3\alpha-1}}{2}} = C \frac{1}{\sqrt{x}} x^{\pm \frac{i\sqrt{3\alpha-1}}{2}}$$

$x$  の  $i$  乗は

$$x = \exp[\log x] \Rightarrow x^{\pm ia} = \exp[\pm ia \log x] = \cos(a \log x) \pm i \sin(a \log x)$$

となるので、力学での単振動と同じように

$$\frac{C}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{\log x}{2} \sqrt{3\alpha-1}\right)$$

として振舞います。これで解の振る舞いは

$$Cx^{-\frac{1 \pm \sqrt{1-3\alpha}}{2}} \quad (1 > 3\alpha) \quad (7a)$$

$$\frac{C}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{\log x}{2} \sqrt{3\alpha - 1}\right) \quad (1 < 3\alpha) \quad (7b)$$

と出てきましたが、境界条件 (??) を満たすはどちらなのか確かめます。(7a) は正確に書けば、 $C_1, C_2$  を定数として

$$C_1 x^{-\frac{1+\sigma}{2}} + C_2 x^{-\frac{1-\sigma}{2}} \quad (\sigma = \sqrt{1-3\alpha})$$

なので

$$\begin{aligned} 0 &= \left| B(x) + x \frac{d}{dx} B(x) \right|_{x=\Lambda} \\ &= \left| C_1 x^{-\frac{1+\sigma}{2}} + C_2 x^{-\frac{1-\sigma}{2}} + \frac{-1+\sigma}{2} C_1 x^{-\frac{1+\sigma}{2}} + \frac{-1-\sigma}{2} C_2 x^{-\frac{1-\sigma}{2}} \right|_{x=\Lambda} \\ &= C_1 \Lambda^{-\frac{1+\sigma}{2}} + C_2 \Lambda^{-\frac{1-\sigma}{2}} + \frac{-1+\sigma}{2} C_1 \Lambda^{-\frac{1+\sigma}{2}} + \frac{-1-\sigma}{2} C_2 \Lambda^{-\frac{1-\sigma}{2}} \\ &= C_1 \Lambda^\sigma + C_2 + \frac{-1+\sigma}{2} C_1 \Lambda^\sigma + \frac{-1-\sigma}{2} C_2 \end{aligned}$$

もう1つの条件からは

$$\begin{aligned} \frac{-1+\sigma}{2} C_1 x^{-\frac{1+\sigma}{2}} \Big|_{x=\Lambda_{IR}} &= -\frac{-1-\sigma}{2} C_2 x^{-\frac{1-\sigma}{2}} \Big|_{x=\Lambda_{IR}} \\ C_1 &= -\frac{-1-\sigma}{2} \frac{2}{-1+\sigma} C_2 x^{-\sigma} \Big|_{x=\Lambda_{IR}} \\ &= -\frac{-1-\sigma}{-1+\sigma} C_2 \Lambda_{IR}^{-\sigma} \end{aligned}$$

なので、2つを合わせて

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{-1-\sigma}{-1+\sigma} C_2 \Lambda_{IR}^{-\sigma} \Lambda^\sigma + C_2 - \frac{-1+\sigma}{2} \frac{-1-\sigma}{-1+\sigma} C_2 \Lambda_{IR}^{-\sigma} \Lambda^\sigma + \frac{-1-\sigma}{2} C_2 \\ &= -\frac{-1-\sigma}{-1+\sigma} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}}\right)^\sigma + 1 - \frac{-1-\sigma}{2} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}}\right)^\sigma + \frac{-1-\sigma}{2} \\ 1 + \frac{-1-\sigma}{2} &= \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}}\right)^\sigma \left(\frac{-1-\sigma}{-1+\sigma} + \frac{-1-\sigma}{2}\right) \\ \frac{1-\sigma}{2(1+\sigma)} &= \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}}\right)^\sigma \frac{1+\sigma}{2(1-\sigma)} \\ \frac{(1-\sigma)^2}{(1+\sigma)^2} &= \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}}\right)^\sigma \end{aligned}$$

これを満たすのは  $\sigma = 0$  なので、 $\sigma > 0$  に対しては満たしません。このため、解としては  $B(x) = 0$  しか存在しなくなるので除外します。(7b) では (7a) による結果を

$$\sigma \Rightarrow i\rho \quad (\rho = \sqrt{3\alpha - 1} > 0)$$

と置き換えればいいので

$$\begin{aligned} \frac{(1 - i\rho)}{(1 + i\rho)} &= \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}}\right)^{i\rho/2} \\ &= \exp\left[\frac{i\rho}{2} \log \frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}}\right] \\ \frac{i + \rho}{i - \rho} &= \exp\left[\frac{i\rho}{2} \log \frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}}\right] \\ \log\left(\frac{i - \rho}{i + \rho}\right)^{-1} &= \frac{i\rho}{2} \log \frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}} \\ -\log\left(\frac{i - \rho}{i + \rho}\right) &= \frac{i\rho}{2} \log \frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}} \\ \frac{i}{2} \arctan \rho &= \frac{i\rho}{2} \log \frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}} \quad (\arctan z = -\frac{i}{2} \log \frac{i - z}{i + z}) \\ \arctan \rho &= \rho \log \frac{\Lambda}{\Lambda_{IR}} \end{aligned}$$

これだと境界条件を満たします (正確には  $\rho$  は  $n\pi$  個の解を持つ)。というわけで、解としては (7b) によるものだけとなり、 $\alpha$  は

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi^2} > \frac{1}{3}$$

でなければいけません。つまり、 $B(x) \neq 0$  の解を持つためには  $\alpha > 1/3$  である必要があり、これは QED での結合定数  $\alpha_{QED} = e^2/4\pi$  では

$$\alpha_{QED} > \frac{\pi}{3}$$

通常の結合定数が  $1/137$  であることを考えると、かなり大きな値になっています。このように、結合定数の値が大きいときは強結合と言います。つまり、 $B(x) \neq 0$  の解は強結合領域において存在していることになります。これは、結合定数のある値 (臨界点) を境に、カイラル対称性がある相 (ウィグナー相) からカイラル対称性が破れている相 (ゴールドストーン相) へ相転移すると言っています。

今見てきたのは  $x$  が  $x \gg B^2(x)$  での話でしたので、 $x$  が小さい場合ではどうなっているのを見れません。なので、今度は  $B(x=0)$  で  $B$  は定数になっているとし、それで積分中の  $B(x)$  を置き換えてしまいます。 $B(0) = m$  とすれば、上と同じように微分方程式として

$$x \frac{d^2 B(x)}{dx^2} + 2 \frac{dB(x)}{dx} + \frac{\alpha}{4} \frac{3B(x)}{x + m^2} = 0$$

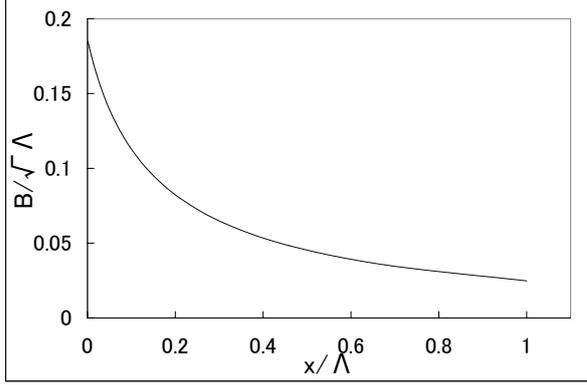


図 1

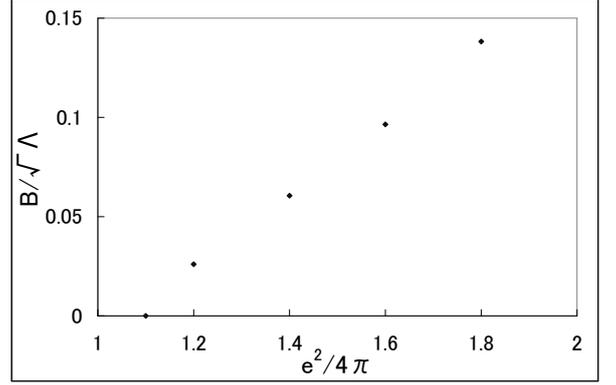


図 2

これは (5) での第 3 項の分母の  $B^2(x)$  を  $m^2$  に置き換えたものです。条件は

$$\frac{d}{dx}(xB(x))|_{x=0} = m, \quad \frac{d}{dx}(xB(x))|_{x=\Lambda} = 0$$

このときの解は超幾何関数 (hypergeometric function) を使って表現される面倒なものなので飛ばします。一応この話からも最終的には  $\alpha > 1/3$  のときに解を持つことが分かります。

これで分かったことは、厳密な振る舞いは分かりませんが、強結合領域で質量が生成されるだろうということです。実際にそうなのかを確かめるのに数値計算を行ってみます。シュウィンガー・ダイソン方程式は解析的にほとんど解けないので数値計算を使用した話が多いです。

もとの  $B(x)$  の積分

$$B(x) = \frac{\alpha}{4} \frac{1}{x} \int_0^x dy \frac{3yB(y)}{y + B^2(y)} + \frac{\alpha}{4} \int_x^\Lambda dy \frac{3B(y)}{y + B^2(y)} \quad (\alpha = \frac{e^2}{4\pi^2})$$

を数値的に計算します。よく使われる方法は、まず、 $B(x)$  が定数 (もしくは勝手に作った関数) として右辺の積分を実行します。 $B(x)$  が定数なら何の問題もなく実行できます。そうすると、 $x$  に対していくつかの点をとることで  $x$  に対する依存性が分かり、最初定数だった  $B$  は左辺での  $B(x)$  として  $x$  の関数となります。で、この求められた  $B(x)$  をまた右辺に入れて積分を行えば、それによって新しくまた  $B(x)$  が出てきます。この手順を繰り返していくうちにどんどん正確な  $B(x)$  に近づいていくと考え、どこかの値に収束すれば数値解の出来上がりというものです。この方法によって求められた結果を一応載せておきますが、精度を完全に無視しているので値は信用しないで下さい。

図 1 は  $\alpha_{QED} = e^2/4\pi = 2$  とした時の  $B(x)$  の振る舞いで、 $B(x)$  を紫外の切断パラメータ  $\sqrt{\Lambda} (\Lambda = 12)$  で割っています。赤外の切断は  $\Lambda_{IR} = 0.02$  としています。図 2 が  $\alpha_{QED}$  の値を変えたときの  $B(\Lambda_{IR})$  の振る舞いです。大体  $\alpha_{QED} \simeq 1.1$  の辺りで  $B(\Lambda_{IR}) = 0$  となっています。数値計算の結果でも赤外で  $B(x) \neq 0$  となっており、 $\alpha_{QED} \simeq \pi/3$  程度で相転移を起こすのが示されたこととなります。

ちなみに、シュウィンガー・ダイソン方程式の数値計算用のプログラム CrasyDSE が公開されています (要 Mathematica)。場所は <http://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/mqh/CrasyDSE/> で、プログラムの説明は「CrasyDSE: A framework for solving Dyson-Schwinger equations」(arXiv:1112.5622) に書いてあります。

このようにして求められた  $B(x)$  は高次の輻射補正を含められているので、有効質量と呼ばれます。物理的な質量は伝播関数において on-shell の場合に相当するので、有効質量を  $M_{eff}$  と書けば、 $p^2 - B^2(p^2) = 0$  から

$$M_{eff}^2 - B^2(M_{eff}^2) = 0$$

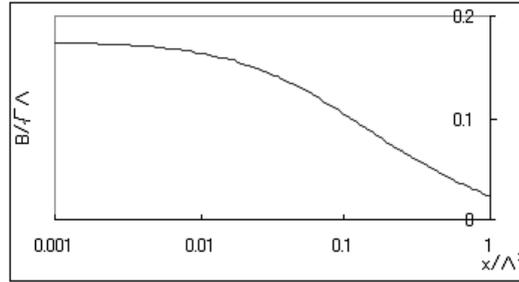


図 3

という式を満たします。注意ですが、ここで求められている  $B(x)$  はユークリッド空間で求めたものなので、ミンコフスキー空間でのものではないです。しかし、 $p_E^2 + B^2(p_E^2) = 0$  なんて解は存在しないので、ミンコフスキー空間にそのまま適用させています。

これでシュウィンガー・ダイソン方程式からカイラル対称性の力学的破れを見ることが一応できましたが、シュウィンガー・ダイソン方程式の扱いには問題が残っています。一番の問題はここで行った近似がどこまで信頼できるかです。ここでのしご近似では、本当は含まれているはずだったファインマン図をかなり無視しています。そうすると、ゲージ依存性の問題なんかが出てきて、この近似で求められた物理量は本当に信じていいのかということになります。実際にランダウゲージでなく、ファインマンゲージでやれば  $\alpha_{QED}$  の臨界点は変わります。これは(??)の形を見れば分かると思います。

ただ、このことに対しては一応回避する言い訳があります。それは、ランダウゲージでならはしご近似においてもワード・高橋恒等式を満たすということです。この理由のためにここではランダウゲージを選んで計算してきました。

さらに細かいことを言えば、シュウィンガー・ダイソン方程式は off-shell のグリーン関数に対する方程式です。これは、 $n$  点グリーン関数が入れ子構造になっているために、たとえどこかで外線だけの式に見えても、他のグリーン関数のところで内線の運動量を持つことになるためです(例えば、電子の伝播関数には内線の運動量を持った光子の伝播関数と電子-光子の頂点が入っていて、電子の伝播関数は内線の運動量を持って光子の伝播関数や頂点に入ってくる)。この性質から off-shell になっていると思えば、基本的に物理量にはなれない量です。つまり、明確にゲージ不変な形をしている必要性はないということです。しかし、フェルミオンの伝播関数はゲージ不変性の要求としてワード・高橋恒等式を満たしていなければいけません。つまり、フェルミオン伝播関数のシュウィンガー・ダイソン方程式から求められる物理量がゲージ不変だと言う以前に、理論の構造としてワード・高橋恒等式を満たさなければいけません。

ここからゲージ不変性の話をしていきますが、現状では趣味の領域の話なので、飛ばしていいです。

ランダウゲージでワード・高橋恒等式を満たすことを示しておきます。まずは単純な理由付けの方法を示します。はしご近似では最低次の頂点  $\gamma_\mu$  を使うので頂点に対するくり込み定数  $Z_1$  は 1 です。そうすると、ワード・高橋恒等式から求まる  $Z_1 = Z_2$  から  $Z_2$  も 1 です。 $Z_2$  はフェルミオンの波動関数に対するくり込みなので、上での  $Z(p^2)$  にあたります。つまり

$$Z(p^2) = \frac{1}{A(p^2)} = 1$$

なので、 $A(p^2)$  は 1 でなければいけないとなります。これは単純で分かりやすですが、はしご近似を取った枠組みと、近似をとっていない枠組みとで比較しているので文句をつけようと思えばつけられますし、そうなんだと思えばそうなんだとも思える理由です。

ワード・恒等式を実際にいじった場合でどうなるのかも示しておきます。一般的にワード・高橋恒等式として指す式 ( $S$  はフェルミオンの厳密な伝播関数) は

$$q^\mu \Gamma_\mu(p, p+q) = S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p)$$

この  $\Gamma^\mu$  を  $\gamma^\mu$  に変えることではしご近似でのワード・高橋恒等式として

$$q^\mu \gamma_\mu = S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p)$$

このとき、 $\Gamma^\mu$  を  $\gamma^\mu$  に変えるのは有効作用を  $\psi, \bar{\psi}, A_\mu$  で微分した 3 点関数は  $\gamma^\mu$  にしかならないと言ってるようなものです。なので、同じ枠組みで行うなら右辺も  $\Gamma^\mu$  を  $\gamma^\mu$  に変えるべきです。そして、厳密なフェルミオンの伝播関数の形を入れると

$$\begin{aligned} q^\mu \gamma_\mu &= A(k^2)k^\mu \gamma_\mu - B(k^2) - A(p^2)p^\mu \gamma_\mu + B(p^2) \quad (k = p+q) \\ &= A(k^2)k^\mu \gamma_\mu - A(p^2)p^\mu \gamma_\mu - B(k^2) + B(p^2) \end{aligned}$$

これを見ると、フェルミオンの伝播関数が最低次  $(p^\mu \gamma_\mu - m_0)^{-1}$  であればワード・高橋恒等式を満たすことが分かります (最低次でのワード・高橋恒等式として成立)。しかし、厳密な伝播関数では成立していません。これに対して、ランダウゲージを取ると、 $A(p^2) = 1$  であるために

$$q^\mu \gamma_\mu = k^\mu \gamma_\mu - p^\mu \gamma_\mu - B(k^2) + B(p^2)$$

そして、 $B(p^2)$  は上での図 3(図 1 の  $x$  軸を対数表示にしたもの)を見て分かるように低エネルギー ( $p^2 < B(p^2)$ ) でほぼ定数になるので (特に物理的な質量を与える  $p^2 = B(p^2)$  の領域以下で)、その領域において

$$q^\mu \gamma_\mu = k^\mu \gamma_\mu - p^\mu \gamma_\mu$$

となって、ワード・高橋恒等式は成立します。

しかし、こんなことでゲージ不変性がどこまで保証できるのかという問題があります。この関係は簡単に言えば、最低次のワード・高橋恒等式は  $A(p^2) = 1$  となるなら、フェルミオンの伝播関数が厳密なもの ( $\Gamma^\mu$  は  $\gamma^\mu$  に置き換える) であっても、ある領域でなら成立すると言ってるようなものです。そして、はしご近似 (光子の伝播関数も最低次にする) においてはランダウゲージで  $A(p^2) = 1$  となります。そんなゲージパラメータに思いっきり依存するゲージ不変性の要求としての恒等式が物理的に意味があるのかは不明です。

実際に、例えば  $\alpha$  が 1 次のオーダーでの摂動論の結果を流用すると、ランダウゲージでは成立しますが、ファインマンゲージでは成立しません。これは簡単にどういう構造なのか言っておきます。ワード・高橋恒等式を頂点の高次の補正を  $\Lambda^\mu$  として

$$q_\mu (\gamma^\mu + \Lambda^\mu) = S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p)$$

このように書いたとき、この  $\Lambda^\mu$  が上手いこと右辺の余計な項を消すか消さないかということになります。例として、1 次のオーダーでのファインマンゲージでの結果を利用します。1 次の摂動の寄与を加えると

$$\begin{aligned}
q_\mu(\gamma^\mu + \Lambda^\mu) &= k(1 + \delta) - m_0 - \delta m - \not{p}(1 + \delta) + m_0 + \delta m \\
&= k - \not{p} + (k - \not{p})\delta \\
&= \not{q} + \not{q}\delta
\end{aligned}$$

となつて、左辺の  $q_\mu \Lambda^\mu$  と右辺の  $\not{q}\delta$  が打ち消しあうことでワード・高橋恒等式は成立します。このための  $Z_1 = Z_2$  です。しかし、今見ているのは左辺に  $\Lambda^\mu$  は出てこないという状況なので、ファインマンゲージでは1次のオーダ（このオーダでは右辺のフェルミオンの伝播関数には元から  $\Gamma^\mu$  はいないので変更はされない）ですでに成立しなくなっています。また、ランダウゲージでは1次のオーダでフェルミオンの波動関数へのくり込みは出てこないで成立しています。

それでもはしご近似においては手がかりにできるものがこれぐらいしかないので、ワラみたいなつもりで掴んでいる雰囲気です（単純に  $A(p^2) = 1$  となつて便利というだけで使っているというもあるみたいですけど）。また、これを嫌って頂点の改良とかもしてるようです。

簡単に本来のワード・高橋恒等式の立ち位置も書いておきます。そもそもワード・高橋恒等式はシュウィンガー・ダイソン方程式の一種みたいなものです。細かくいうと、経路積分上（生成汎関数）での作用原理による運動方程式がシュウィンガー・ダイソン方程式、経路積分上でのゲージ不変性に対するネータの定理の保存カレントがワード・高橋恒等式。なので、実は  $A(p^2), B(p^2)$ （電子の自己エネルギーに対するシュウィンガー・ダイソン方程式）と、ワード・高橋恒等式という同じ枠組み内の3つの方程式の連立を解いているようなものです。その中でワード・高橋恒等式は丁度  $A(p^2), B(p^2)$  に対する制限（ゲージ不変性の要求）として存在するものです。

ちなみにQCDの場合でもはしご近似を使いますが、は結合定数をくり込み群における running coupling constant に変えた改善されたはしご（improved ladder）近似を使います。結合定数を running coupling constant に変えるというのはそうしたら上手くいったというだけで使われてきた都合のいい近似だったんですが、非摂動的くり込み群による方法から改善されたはしご近似の結果が出てくるということが示されてきているようです。

#### ・補足

くり込みについて見ておきます。くり込みを考慮して相殺項を含めたQEDのラグランジアンは「くり込み～QED～」で求めたように、くり込まれた量に  $r$  をつけて書けば

$$\mathcal{L} = Z_2 i \bar{\psi}_r \not{\partial} \psi_r - Z_2 Z_m m_r \bar{\psi}_r \psi_r - Z_3 \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^r F_r^{\mu\nu} - Z_1 e_r \bar{\psi}_r A_r \psi_r$$

このような形で書けます。  $Z_1$  は頂点のくり込み定数、  $Z_2$  はフェルミオン場のくり込み定数、  $Z_3$  はゲージ場の繰り込み定数、  $Z_m$  はフェルミオン質量のくり込み定数です。  $n$  点関数を求めるとき、発散の正則化には単に運動量の上限に切断  $\Lambda$  を入れているだけとします（上で計算したときに運動量の上限を切って正則化したため）。このため、くり込まれる前の  $n$  点関数は  $\Lambda$  に依存します。切断だけに依存されると物理量の定義ができなくなるので、くり込み定数によって適当なスケール  $\mu$  に置き換わるとしておきます。なので、くり込み定数は  $\Lambda$  と  $\mu$  に依存し、くり込まれた質量や結合定数は  $\mu$  に依存し、くり込まれていない質量や結合定数は  $\Lambda$  に依存します。  $\Lambda$  と  $\mu$  の依存性は書かないので、このようになっていることに注意してください。

くり込まれた生成汎関数は

$$Z_r[\eta_r, \bar{\eta}_r, J_r] = \int D A_r D \bar{\psi}_r D \psi_r \exp \left[ i \int d^4 x (\mathcal{L} + J_r(x) A_r(x) + \bar{\eta}_r \psi_r + \bar{\psi}_r \eta_r) \right]$$

となるだけなので、くり込み定数ありでのシュウィンガー・ダイソン方程式は単純に

$$G_r^{-1}(p) = S_r^{-1} - Z_1 i e_r^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu D_r^{\mu\nu}(p-q) G_r(q) \Gamma_\nu^r(p, q)$$

$$S_r^{-1}(p) = Z_2 p_\mu \gamma^\mu - Z_2 Z_m m_r = Z_2 (p_\mu \gamma^\mu - Z_m m_r)$$

厳密なフェルミオン伝播関数  $G_r$ 、厳密なグルーオン伝播関数  $D_r^{\mu\nu}$ 、厳密な頂点  $\Gamma_\nu^r$  はくり込まれたものです。この式の右辺で、フェルミオン場のくり込み定数  $Z_2$  を外に出したものを  $G^{-1}(p)$  とするなら (ワード・高橋恒等式が成立しているなら  $Z_1 = Z_2$ )

$$G_r^{-1}(p) = Z_2 G^{-1}(p) = Z_2 (S_0^{-1}(p) - \Sigma_r(p)) \quad (8)$$

と書けます。  $\Sigma_r(p)$  はシュウインガー・ダイソン方程式の積分部分なので、 $\Lambda$  のような正則化のパラメーターも持ちます。これは真空期待値での

$$G(p) = \int d^4 x \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle e^{ipx}$$

$$= Z_2 \int d^4 x \langle \Omega | T \psi_r(x) \bar{\psi}_r(0) | \Omega \rangle e^{ipx}$$

$$= Z_2 G_r(p)$$

に対応します。

厳密なフェルミオン伝播関数をスカラー関数  $A_r(p^2), B_r(p^2)$  によって

$$G_r(p) = \frac{1}{A_r(p^2) p^\mu \gamma_\mu - B_r(p^2)}$$

と書きます。くり込まれていない  $G(p)$  では、 $A, B$  です。これとくり込まれていないものを (8) に入れれば

$$A_r p^\mu \gamma_\mu - B_r = Z_2 (A p^\mu \gamma_\mu - B)$$

$$A_r (p^\mu \gamma_\mu - \frac{B_r}{A_r}) = A Z_2 (p^\mu \gamma_\mu - \frac{B}{A})$$

となるので、式の形から  $B_r/A_r$  はくり込みから独立な量であることが分かります。つまり、質量関数  $M(p^2) = B/A$  はくり込みの方法から独立な量です。

$G_r(p)$  をシュウインガー・ダイソン方程式に入れれば

$$A_r(p^2) p^\mu \gamma_\mu - B_r(p^2) = Z_2 (p^\mu \gamma_\mu - m_0 - \Sigma_r(p))$$

この  $A_r, B_r$  の式を形式的に取り出すと

$$A_r(p) = Z_2(1 - \Sigma_r^A(p))$$

$$B_r(p) = Z_2(Z_m m_r + \Sigma_r^B(p))$$

$\Sigma_r^A, \Sigma_r^B$  は  $\Sigma_r$  からのそれぞれの項です ( $p^\mu \gamma_\mu$  を含む項と含まない項)。  $A_r, B_r$  を決定させるために、質量のくり込み条件として質量関数  $M(p)$  が、 $\mu$  において

$$M(p = \mu) = m_r$$

となとします。  $B_r$  を求めるとき、  $Z_m$  の情報が必要になるように思えますが、  $Z_m$  によって上手いことくり込み条件が満たされるとします。 そうすれば、  $B_r$  の式を

$$\frac{B_r(p)}{A_r(p)} A_r(p) = M(p = \mu) A_r(p = \mu) + Z_2 \Sigma_r^B(p) - Z_2 \Sigma_r^B(p = \mu)$$

$$M(p) A_r(p) = M(\mu) A_r(\mu) + Z_2 (\Sigma_r^B(p) - \Sigma_r^B(\mu))$$

このようくり込み条件を満たすように変形させ、表面上は  $Z_m$  がいないようにできます。 なのでシュウインガー・ダイソン方程式から  $\Sigma_r^B(p)$  を求めて、  $\Sigma_r^B(\mu)$  を引いて、  $M(\mu) A_r(\mu)$  を足すことでくり込みが行われます。

$Z_2$  は、  $A_r$  が  $p = \mu$  で適当な値 (例えば  $A(p = \mu) = 1$ ) を持つとすれば

$$A_r(p = \mu) = Z_2(1 - \Sigma_r^A(p = \mu))$$

$$Z_2 = \frac{A_r(\mu)}{1 - \Sigma_r^A(\mu)}$$

とできるので、これを使えばいいです。