

カイラル対称性の破れ～QCD～

QCD のモデルである南部-Jona-Lasinio モデルではフェルミオン凝縮が起きてカイラル対称性を破ることを見ることが出来ました。ここではモデルではなく QCD のラグランジアンから出発してもカイラル対称性の破れが起きるのかというのを見てみます。このような摂動論が使えない強結合での QCD のことを strong QCD と呼んでいます。カイラル対称性を扱う前にひと手間あるので、それがどうでもいいという人は一気に (5) まで飛んでください。また、ここでは QCD でのシュウィンガー・ダイソン方程式を作って解くというのを目的としているので、QCD とカイラル対称性の関係については触れていません。単に質量 0 のクォークを含む QCD ラグランジアン (カイラル対称性を持っている) からカイラル対称性の破れが起きるというのを示しています。なので、QCD でのカイラル変換についての話は飛ばしています。この話は「カイラル対称性と PCAC」や「南部-Jona-Lasinio モデル」の方でしているので、気になる人はそっちを先に見てください。

QCD でのカイラル対称性を扱う方法はいろいろありますが、QED と同じようにシュウィンガー・ダイソン方程式を使います。生成汎関数の汎関数微分として QCD のシュウィンガー・ダイソン方程式を導くこともできますが、諸々の事情から Cornwall-Jackiw-Tomboulis (CJT) 有効ポテンシャルを使って導きます。ちなみに、QCD でのクォークに対するシュウィンガー・ダイソン方程式のファインマン図の形は変わらないので、そこに非可換ゲージ場のファインマン則を当てはめただけで求めることもできます。

QED の時から変更する事情を簡単に言っておくと、はしご近似をそのまま使うと、質量が運動量に依存しなくなることからです。この原因は QCD が QED に比べて複雑なゲージ構造を持っていることによります。で、摂動論の段階でそんな状況になっていないので、はしご近似ではまずいということです。その改良をどういう発想で行うかというのを見るために、CJT 有効ポテンシャルを使います。

CJT 有効ポテンシャルは複合場 (composite field) を使った場合での有効ポテンシャルです (ここで言う複合場は $K(x, y)\phi(x)\phi(y)$ のようになっているものです)。具体的に書くと (実数スカラー場)

$$Z[J, K] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L} + \phi(x)J(x) + \frac{1}{2} \int d^4y \phi(x)K(x, y)\phi(y)) \right] \quad (1)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi + \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} \phi i D_0^{-1} \phi + \mathcal{L}_{int}$$

のように、二つの場と関連する源 $K(x, y)$ を差し込みます (N は規格化定数)。場が 2 つあることから予想できるように、 K は伝播関数と絡む源です (bilocal source と言います)。複合場を加えて作られる CJT 有効作用は、通常の有効作用による真空の関係

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c, G_0]}{\delta \phi_c} = 0 \quad (J = 0, K = 0)$$

に加えて (ϕ_c は $\phi(x)$ の源ありでの真空期待値、「自己エネルギーと頂点関数」参照)、 $T\phi(x)\phi(y)$ の $J = K = 0$ での真空期待値 $G_0(x, y)$ は $K(x, y)$ のルジャンドル変換の相方として

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c, G_0]}{\delta G_0} = 0 \quad (J = 0, K = 0)$$

このような関係を持っているはずですが (正確には G_0 は $T\phi(x)\phi(y)$ の connected な部分として定義されます)。CJT 有効ポテンシャルを細かく見るのは面倒なので、必要なところだけ大雑把に見ていきます。真空期待値を単に $\langle \phi \phi \rangle$ のように書いていきますが、特に注意しない限り源 J, K が 0 でない場合での真空期待値をさすことにします。

Z を (1) のように作ったので、これから W を作ります。 W は

$$W[J, K] = -i\hbar \log Z[J, K]$$

「有効作用と有効ポテンシャル」や「1ループでの有効ポテンシャル」でやったのと構造は同じなので、一気にルジャンドル変換まで行きます。ルジャンドル変換には W の J と K に対する汎関数微分が必要なんですが、それらは

$$\frac{\delta W[J, K]}{\delta J(x)} = \phi_c(x)$$

$$\frac{\delta W[J, K]}{\delta K(x, y)} = \frac{1}{2}(\phi_c(x)\phi_c(y) + \hbar G(x, y))$$

として、これによって $\phi_c(x)$ と $G(x, y)$ を定義します。そして、この式の右边が源の相方になります (つまり、 J には ϕ_c 、 K には $(\phi_c\phi_c + \hbar G)/2$ がくっつく)。 J に関しては通常通りです (「自己エネルギーと頂点関数」参照)。 K の場合は、(1) の式から分かるように、 K の汎関数微分は場を 2 つ exp の外に持ってくるために 2 点関数を作ります。そのため、 $T\phi(x)\phi(y)$ の真空期待値によるものを対応させればいいです。ただし、少しひねって ϕ の真空期待値 ϕ_c による項を付け足します。これによって定義される $G(x, y)$ は connected なものになります (connected にしたくないなら単に $\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ を使えばいい)。また、 $\hbar$ は通常自然単位系を使うために分かりづらいですが伝播関数の次元を考えればくっついてきます。

connected な理由はまじめに計算していけば分かります。 W の K による汎関数微分は

$$\frac{\delta W[J, K]}{\delta K(x, y)} = -i\hbar \frac{\delta}{\delta K(x, y)} \log Z = -i\hbar \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta K(x, y)} = \frac{1}{2} \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle$$

そして W を J で汎関数微分すれば connected なものが出てくるので

$$\begin{aligned} \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle_{con} = G_{con}(x, y) &= \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W[J, K]}{\delta J(x) \delta J(y)} \\ &= -\hbar \frac{\delta^2 \log Z}{\delta J(x) \delta J(y)} \\ &= -\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta \log Z}{\delta Z} \frac{\delta Z}{\delta J(y)} \\ &= -\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(\frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J(y)} \right) \\ &= \hbar \frac{1}{Z^2} \frac{\delta Z}{\delta J(x)} \frac{\delta Z}{\delta J(y)} - \frac{\hbar}{Z} \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x) \delta J(y)} \\ &= -\frac{1}{\hbar} \phi_c(x)\phi_c(y) + \frac{1}{\hbar} \langle T\phi(x)\phi(y) \rangle \end{aligned}$$

添え字の con は connected な図しかないことを表します。よって、この二つから

$$-\frac{1}{\hbar} \phi_c(x)\phi_c(y) + \frac{2}{\hbar} \frac{\delta W}{\delta K(x, y)} = G_{con}(x, y)$$

となっていることが分かります。このことから分かるように $G_{con}(x, y)$ は近似なしの厳密な伝播関数です ($J = K = 0$ とすることで)。これ以降は $G_{con}(x, y)$ は単に $G(x, y)$ と書きます。また、係数 2 はラグランジアンでの源の係数 $1/2$ から来ているので、定義によっては出てきません。

CJT 有効作用はルジャンドル変換から

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_c, G] &= W[J, K] - \int d^4x \phi_c(x) J(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi_c(y) - \frac{1}{2} \hbar \int d^4x d^4y G(x, y) K(y, x)\end{aligned}\quad (2)$$

$\Gamma[\phi_c, G]$ に対する汎関数微分は

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c, G]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x) - \int d^4y \phi_c(y) K(x, y)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c, G]}{\delta G(x, y)} = -\frac{1}{2} \hbar K(x, y)$$

$J = K = 0$ で源のない真空での方程式になります。というわけで、 $\Gamma[\phi_c, G]$ は $J = K = 0$ で物理的なものとなります。

$W[J, K]$ を求めるために作用

$$\begin{aligned}S[\phi, J, K] &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi(\square + m^2) \phi + \mathcal{L}_{int} + \phi(x) J(x) + \frac{1}{2} \int d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) \right] \\ &= S[\phi] + \int d^4x \phi(x) J(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y)\end{aligned}$$

において、 ϕ を $\phi + \phi_c$ に置き換えて

$$S[\phi + \phi_c] = S[\phi + \phi_c] + S[\phi_c] - S[\phi_c]$$

とすることで

$$\begin{aligned}Z[J, K] &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi + \phi_c] + \int d^4x (\phi(x) + \phi_c(x)) J(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y (\phi(x) + \phi_c(x)) K(x, y) (\phi(y) + \phi_c(y)) \right) \right] \\ &= \frac{1}{N} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi_c] + \int d^4x \phi_c(x) J(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi_c(y) \right) \right] \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi + \phi_c] - S[\phi_c] + \int d^4x \phi(x) J(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi(y) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi_c(y) \right) \right] \\ &= \frac{1}{N} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi_c] + \int d^4x \phi_c(x) J(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi_c(y) \right) \right] Z_1\end{aligned}$$

この対数を取って $W[J, K]$ にすると

$$\begin{aligned}
W[J, K] &= -i\hbar \log Z = S[\phi_c] + \int d^4x \phi_c(x) J(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi_c(y) - i\hbar \log Z_1 + i\hbar \log N \\
&= S[\phi_c] + \int d^4x \phi_c(x) J(x) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi_c(y) + W_1 + i\hbar \log N \quad (3)
\end{aligned}$$

ルジャンドル変換の式 (2) に入れば

$$\Gamma[\phi_c, G] = S[\phi_c] + W_1 - \frac{1}{2} \hbar \int d^4x d^4y G(x, y) K(y, x) + i\hbar \log N$$

後は W_1 がどうなっているの分かればいいです。

(3) を J で汎関数微分すれば $\phi_c(x)$ になることから

$$\begin{aligned}
\phi_c(x) &= \frac{\delta W[J, K]}{\delta J(x)} = \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta J(x)} + \phi_c(x) + \int d^4x' \frac{\delta \phi_c(x')}{\delta J(x)} J(x) + \frac{\delta W_1}{\delta J(x)} \\
&= \phi_c(x) + \int d^4x' \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x')} \frac{\delta \phi_c(x')}{\delta J(x)} + \int d^4x' \frac{\delta \phi_c(x')}{\delta J(x)} J(x) + \frac{1}{2} \int d^4x' d^4y' \frac{\delta \phi_c(x')}{\delta J(x)} K(x', y') \phi_c(y') \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4x' d^4y' \phi_c(x') K(x', y') \frac{\delta \phi_c(y')}{\delta J(x)} + \int d^4x' \frac{\delta W_1}{\delta \phi_c(x')} \frac{\delta \phi_c(x')}{\delta J(x)} \\
&= \phi_c(x) \\
&\quad + \int d^4x' \left(\frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x')} + J(x) + \frac{1}{2} \int d^4y' K(x', y') \phi_c(y') + \frac{1}{2} \int d^4y' \phi_c(y') K(y', x') + \frac{\delta W_1}{\delta \phi_c(x')} \right) \frac{\delta \phi_c(x')}{\delta J(x)}
\end{aligned}$$

$\delta W[J, K]/\delta J(x)$ によって $\phi_c(x)$ は定義されるので $J(x)$ に依存するとしています。この式から

$$\frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x')} + J(x) + \frac{1}{2} \int d^4y' K(x', y') \phi_c(y') + \frac{1}{2} \int d^4y' \phi_c(y') K(y', x') + \frac{\delta W_1}{\delta \phi_c(x')} = 0 \quad (4)$$

という関係式が求まります。これを Z_1 の $\exp$ 部分に適用させれば

$$\begin{aligned}
&S[\phi + \phi_c] - S[\phi_c] + \int d^4x \phi(x) \left(-\frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} - \frac{\delta W_1[J, K]}{\delta \phi_c(x)} \right) - \frac{1}{2} \int d^4y' K(x, y') \phi_c(y') - \frac{1}{2} \int d^4y' \phi_c(y') K(y', x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi(y) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi_c(y) \\
&= S[\phi + \phi_c] - S[\phi_c] - \int d^4x \phi(x) \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} + \int d^4x \phi(x) \frac{\delta W_1[J, K]}{\delta \phi_c(x)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi_c(y) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(y) K(y, x) \phi(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_c(x) K(x, y) \phi(y) + \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi_c(y) \\
&= S[\phi + \phi_c] - S[\phi_c] - \int d^4x \phi(x) \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4x \phi(x) \frac{\delta W_1[J, K]}{\delta \phi_c(x)} + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y)
\end{aligned}$$

第一項 $S[\phi + \phi_c]$ を ϕ_c まわりで展開したとき

$$S[\phi + \phi_c] = S[\phi_c] + \int d^4x \phi(x) \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \phi(y)$$

なので

$$\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \phi(y) - \int d^4x \phi(x) \frac{\delta W_1[J, K]}{\delta \phi_c(x)} + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y)$$

ここで

$$i\Delta^{-1}(x, y) = \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} = -(\square + m^2)\delta^4(x - y) + \frac{\delta^2 S_{int}}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \quad (5)$$

という記号を定義して

$$\log Z_1 = \log \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) i\Delta^{-1}(x, y) \phi(y) - \int d^4x \phi(x) \frac{\delta W_1}{\delta \phi_c(x)} + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) K(x, y) \phi(y) \right) \right]$$

さらに (4) からの

$$\begin{aligned} -K(x, y) &= \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} + \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} + \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \\ &= \frac{\delta S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} + \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J(x) J \delta(y)} \right)^{-1} + \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \\ &= i\Delta^{-1}(x, y) + \frac{1}{i} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) J \delta(y)} \right)^{-1} + \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \\ &= i\Delta^{-1}(x, y) - iG^{-1}(x, y) + \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \end{aligned} \quad (6)$$

という関係を使えば

$$\begin{aligned} \log Z_1 &= \log \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) iG^{-1}(x, y) \phi(y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int d^4x \phi(x) \frac{\delta W_1}{\delta \phi_c(x)} - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \phi(y) \right) \right] \end{aligned}$$

この式の第一項は最低次での寄与のように見えます。なので、第一項部分の寄与を分離させるために

$$\begin{aligned}
\log Z_1 &= \log \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) iG^{-1}(x, y) \phi(y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int d^4x \phi(x) \frac{\delta W_1}{\delta \phi_c(x)} - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \phi(y) \right) \right] \\
&\quad - \log \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) iG^{-1}(x, y) \phi(y) \right] \\
&\quad + \log \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) iG^{-1}(x, y) \phi(y) \right] \\
&= \log \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) iG^{-1}(x, y) \phi(y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int d^4x \phi(x) \frac{\delta W_1[J, K]}{\delta \phi_c(x)} - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} \phi(y) \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \log(-iG^{-1}(x, y)) - \frac{1}{2} \text{tr} \log(-iG^{-1}(x, y))
\end{aligned}$$

これと (6) から CJT 有効作用は

$$\begin{aligned}
\Gamma[\phi_c, G] &= S[\phi_c] + W_1 - \frac{1}{2} \hbar \int d^4x d^4y G(x, y) K(y, x) + i \hbar \log N \\
&= S[\phi_c] + W_1 - \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \log(-iG^{-1}(x, y)) + \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \log(-iG^{-1}(x, y)) \\
&\quad + \frac{1}{2} \hbar \int d^4x d^4y G(x, y) (i\Delta^{-1}(y, x) - iG^{-1}(y, x) + \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(y) \delta \phi_c(x)}) + i \hbar \log N \\
&= S[\phi_c] + \frac{i}{2} \text{tr} \log(-iG^{-1}(x, y)) + \frac{i}{2} \hbar \int d^4x d^4y G(x, y) \Delta^{-1}(y, x) - \frac{i}{2} \hbar \text{tr} 1 + i \hbar \log N \\
&\quad + W_1 - \frac{i}{2} \text{tr} \log(-iG^{-1}(x, y)) + \frac{1}{2} \hbar \int d^4x d^4y G(x, y) \frac{\delta^2 W_1}{\delta \phi_c(y) \delta \phi_c(x)} \\
&= S[\phi_c] + \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \log(-iG^{-1}(x, y)) + \frac{i}{2} \hbar \text{tr} G(x, y) \Delta^{-1}(x, y) - \frac{i}{2} \hbar \text{tr} 1 + i \hbar \log N + \Gamma_2
\end{aligned}$$

最後に第三項をトレースに置き換えているのは、積分の構造がトレース (汎関数の意味でのトレース) に相当するためです。このようにトレースにしておけばスピノールのような自由度があったときにまとめてトレースに押し込めることができます。\$S[\phi_c]\$ と \$i\Delta^{-1}(x, y; \phi_c)\$ は

$$i\Delta^{-1}(x, y; \phi_c) = \frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} = -(\square + m^2)\delta^4(x - y) + \frac{\delta^2 S_{int}}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)} = iD_0^{-1}(x, y) + \frac{\delta^2 S_{int}}{\delta \phi_c(x) \delta \phi_c(y)}$$

$$S[\phi_c] = \int d^4x \mathcal{L}[\phi_c] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \phi_c (\square + m^2) \phi_c + \mathcal{L}_{int} \right), \quad S_{int}[\phi_c] = \int d^4x \mathcal{L}_{int}[\phi_c]$$

と定義されます。天下り的に定義していますが、\$\Gamma_2[\phi_c, G]\$ は \$\hbar^2\$ のオーダー以上での寄与です。これは後で簡単に説明します。規格化定数は、相互作用のない最低次のものなので

$$N = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int d^4x \frac{1}{2} \phi (-iD_0^{-1}) \phi \right]$$

から

$$N = (\det(-iD_0^{-1}))^{-\frac{1}{2}}$$

よって規格化を含めれば

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_c, G] &= S[\phi_c] + \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \log(-iG^{-1}) + \frac{i}{2} \hbar \text{tr}[\Delta^{-1}G] - \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \log(-iD_0^{-1}) - \frac{i}{2} \hbar \text{tr} 1 + \Gamma_2[\phi_c, G] \\ &= S[\phi_c] + \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \log(G^{-1}D_0) + \frac{i}{2} \hbar \text{tr}[\Delta^{-1}G] - \frac{i}{2} \hbar \text{tr} 1 + \Gamma_2[\phi_c, G]\end{aligned}\quad (7)$$

ちなみに、 Δ^{-1} は (5) の第二項を無視すれば ($i\Delta^{-1} = iD_0^{-1}$)

$$\begin{aligned}i\Delta^{-1} &= -(\square + m^2) \\ \frac{\Delta^{-1}}{i} &= (\square + m^2)\end{aligned}$$

なので、 Δ^{-1} は i で割ることで元の方程式の演算子部分になります。そのため、 i を含めない最低次の伝播関数 $\Delta'_F(x)$ の式において

$$\begin{aligned}(\square + m^2) \Delta'_F(x-y) &= -\delta^4(x-y) \\ -i\Delta^{-1} \Delta'_F(x-y) &= -\delta^4(x-y) \\ \Delta^{-1} i \Delta'_F(x-y) &= \delta^4(x-y)\end{aligned}$$

このようになるので、 Δ^{-1} が i を含めた伝播関数の逆に対応します (なので当然 D_0 は i を含めた最低次での伝播関数)。というわけで、CJT 有効作用にいる Δ^{-1} , G^{-1} は i を含んだ伝播関数の逆として定義されます。

上で出したように (2) から

$$\frac{\delta\Gamma[\phi, G]}{\delta G} = -\frac{1}{2} \hbar K$$

となっているので、(7) を $G(y, x)$ で汎関数微分すると (汎関数でのトレースは 4 次元積分を含んでいる)

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \hbar K(x, y) &= -\frac{i}{2} \hbar \frac{\delta}{\delta G(y, x)} \text{tr} \log G + \frac{i}{2} \hbar \frac{\delta}{\delta G(y, x)} \int d^4x' d^4y' \Delta^{-1}(x', y') G(y', x') + \frac{\delta\Gamma_2[\phi_c, G]}{\delta G(y, x)} \\ &= -\frac{i}{2} \hbar G^{-1}(x, y) + \frac{i}{2} \hbar \Delta^{-1}(x, y; \phi_c) + \frac{\delta\Gamma_2[\phi_c, G]}{\delta G(y, x)}\end{aligned}$$

となり、見やすく整理すると

$$G^{-1}(x, y; K) = \Delta^{-1}(x, y; \phi_c) - iK(x, y) + \frac{2}{i\hbar} \frac{\delta\Gamma_2[\phi_c, G]}{\delta G(x, y)}$$

そして、真空に対する方程式

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c, G]}{\delta G(x, y)} = 0$$

というのは $J = K = 0$ にあたるので、この方程式は $K = 0$ で

$$G^{-1}(x, y; K = 0) = \Delta^{-1}(x, y; \phi_c) + \frac{2}{i\hbar} \frac{\delta\Gamma_2[\phi_c, G]}{\delta G(y, x)} \Big|_{J=K=0} = \Delta^{-1}(x, y; \phi_c) - \Sigma(x, y) \quad (8)$$

となります。 $\Gamma_2[\phi_c, G]$ の正体を気にしないで形だけを見ると、これはシュウィンガー・ダイソン方程式です。後で実際にこれからシュウィンガー・ダイソン方程式を導きます。 $\Delta^{-1}(x, y; \phi_c)$ は $\phi_c = 0$ で最低次の伝播関数になります。

唐突に $\Gamma_2[\phi, G]$ を導入しましたがこれがなんなのか説明します。細かい解析をするのは大変なので、直感的な説明だけをします。まず、(8) で2点関数 G の汎関数微分が $\Gamma_2[\phi, G]$ にかかっていることから、1粒子既約な図でなく2粒子既約 (2PI) 以上の図によって構成されていることは予想できます。なぜなら、2PI は1PIと違い伝播関数の線を1本切っても disconnected な図にならないものことだからです (2回切ると disconnected になる)。そして、 $\Gamma_2[\phi, G]/\delta G$ というのはシュウィンガー・ダイソン方程式との対応を考えれば自己エネルギーの図になるはずで、ファインマン図を伝播関数で微分するというの線は一本切ることなので、2PI以上の真空泡の図になっていることが分かります。

別の方向から直感的に2PIの図しかないと理解することもできます。 $\Gamma_2[\phi, G]$ で使われる伝播関数は厳密な伝播関数であるために、図は厳密な伝播関数で構成されます。そして真空泡の図しかないと、もし2粒子可約 (内線を切って図を分離できるもの) な図が紛れ込んでいると、外線が現われ自己エネルギーで使われる図が出てきます。そうすると、自己エネルギーの図は伝播関数に補正を与えることから、厳密な伝播関数にさらに補正がかかります。で、このことは明らかにおかしいので、2PIの図しか寄与しないはずだということになります。

もっと厳密に2PIの図の集まりだと知るためには、(7) を $\Gamma_2 + const = \sim$ の式に変えて右辺が実際に2PIの図の全ての集まりであることを示せばいいです。元々、CJT有効作用は(7)の形を作ってから、この形なら Γ_2 が2PIの図の集まりであることが証明できるという流れで導出されたようなので、本来ならそれを示すべきですが、面倒なので省きます。ちなみに、途中で、 $\text{tr} \log(-G^{-1})$ の式を分離するようにしていたのは、 $\text{tr} \log(-G^{-1})$ が1ループの真空泡、つまり1PIの寄与になっているからです。

有効ポテンシャルの形にしたいので、(7) で4次元積分を分離します。フーリエ変換もついで行った形で書けば

$$\Gamma[\phi_c, G] = -V(\phi_c, G) \int d^4x$$

より

$$V(\phi_c, G) = V_0(\phi_c) - \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log[G^{-1}(p) D_0(p)] - \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta^{-1}(p; \phi_c) G(p) + \frac{i}{2} \hbar \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} + V_2(\phi_c, G) \quad (9)$$

V_0 はラグランジアンでの古典的なポテンシャルです。汎関数でのトレースがもっている全空間積分はなくなるので、ここでのトレースには汎関数としての性質はなくなり、何かしらの行列 (アイソスピンとか) に対するものになります。第二項でのフーリエ変換は、エルミート演算子 $\hat{A}$ での関係 (λ_i は固有値)

$$\text{tr} \log \hat{A} = \text{tr} \det \hat{A} = \sum_i \log \lambda_i$$

において、固有値は運動量を持つ形に変わるので $G^{-1}(p)$ となります (例えば、 $\hat{A} = \square$ なら $\hat{A} \Rightarrow -p^2$)。そして、固有値の和が

$$\sum_i \Rightarrow \frac{L^4}{(2\pi)^4} \sum_i \frac{(2\pi)^4}{L^4} \Rightarrow \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$$

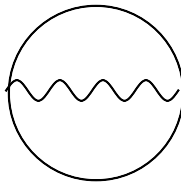
と変わり、4次元体積を外に出します。CJT 有効ポテンシャルについて詳しくみたいわけではないので、これ以降は結果だけを使います。

QED や QCD ではフェルミオンを扱うので、必要なものはこれのフェルミオンの場合なんですが、変更は係数にいる $1/2$ を -1 にすればいいです。これは

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left[-\int d^4x \phi D\phi\right] = C(\det D)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp\left[-\int d^4x \bar{\psi} D\psi\right] = C \det D$$

の対数をとることと、 K の運動方程式を出すとき $\psi K \bar{\psi}$ のように源が入ってくるために $\phi K \phi$ と違い、場の微分で2倍されず、さらにグラスマン数の規則からマイナスが出てくるためです。残っている Γ_2 がどうなっているのかは実際に求めていかないとはいけないんですが、 Γ_2 は2PI の図を持っているということから計算すべき Γ_2 での図というのは



こんなものになります (もう一つあるんですが寄与しないので無視します)。フェルミオンに対しては厳密な伝播関数です。より正確なものは光子と右側の頂点が厳密なものなんですが、はしご近似をとってフェルミオンの伝播関数以外は最低次のものを使うようにします。この図が有効ポテンシャルとして出てくるのが気になる人は、「経路積分～QED～」の Z や有限温度の場の理論での「 $\log Z$ の摂動計算～QED～」の計算で同じ図が出てきたことから察してください。QED、QCD の CJT 有効ポテンシャルは係数を置き換えて

$$\begin{aligned} V &= V_0 + V_1 + V_2 \\ &= V_0 + i \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log G^{-1}(p) + i \text{tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S^{-1}(p) G(p) + V_2 \end{aligned}$$

G はフェルミオンの厳密な伝播関数で、 S はフェルミオンの最低次の伝播関数です。 $G(p)$ の汎関数微分にひっからない項は無視しています。QED や QCD では場の真空期待値は基本的に0に取るので、場の真空期待値は0にとり、 S^{-1} の中にある相互作用項は消して、単なる最低次のものにします。

これを $G(p)$ で汎関数微分すれば

$$\frac{\delta V}{\delta G(p)} = -i \text{tr} G^{-1}(p) + i \text{tr} S^{-1}(p) + \frac{\delta V_2}{\delta G(p)} = 0$$

よってフェルミオン伝播関数に対するシュウィンガー・ダイソン方程式として

$$i\text{tr}G^{-1}(p) = i\text{tr}S^{-1}(p) + \frac{\delta V_2}{\delta G(p)}$$

後は上での図を使って $\delta V_2/\delta G$ を計算すればいいです。ファインマン図を式にすれば

$$V_2 = \frac{i}{2}(ig)^2(t^a)_{ij}(t^b)_{ji}\delta^{ab}(-\text{tr}) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu G(p) \gamma_\nu G(q) D_0^{\mu\nu}(p-q)$$

このようになります。1/2 は対称因子で、有効ポテンシャルの定義上 i を余計につけています (通常のファインマン則は Z か $\log Z$ に対してで、有効ポテンシャルは $i \log Z$ から求められるから)。QCD を扱うことになるので、 $SU(N_c)$ の非可換ゲージ場を使っています。しかし、伝播関数自体は QED の形を使って、生成子とかは伝播関数の外に出しています (伝播関数は i を含めて定義されています)。で、 $D_0^{\mu\nu}$ は最低次でのゲージボソンの伝播関数です。細かいことを言うと、この図は本来はフェルミオンの運動量 p, q 、ゲージボソンの運動量 k があり、それぞれに積分がくっついていきます (感覚的に言えば、外線がない閉じた図になっているので全ての運動量は積分で潰されなければいけない)。しかし、運動量保存として $(2\pi)^4 \delta^4(p-q-k)$ がくっついてくるために、 $k = p-q$ となって k 積分はなくなり上の式となっています。 $SU(N_c)$ の生成子 t^a については「経路積分～非可換ゲージ場～」を見てください。また、運動量保存からグルーオンの運動量は $p-q$ です。 $(t^a)_{ij}(t^b)_{ji}\delta^{ab}$ は群論の計算から、 $SU(N_c)$ に対して

$$(t^a)_{ij}(t^a)_{ji} = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} = C_2(F)$$

この V_2 を $G(p')$ で微分すれば (スピノール成分をローマ字で書いて)

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_2}{\delta G_{ij}(p')} &= \frac{i}{2} g^2 C_2(F) \text{tr} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_{ab}^\nu \delta_{ib} \delta_{jc} \gamma_{cd}^\mu G_{de}(q) D_{0\mu\nu}(p'-q) \\ &\quad + \frac{i}{2} g^2 C_2(F) \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_{ab}^\mu G_{bc}(p) \gamma_{cd}^\nu \delta_{id} \delta_{je} D_{0\mu\nu}(p-p') \\ &= \frac{i}{2} g^2 C_2(F) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_{ai}^\nu \gamma_{jd}^\mu G_{de}(q) \delta_{ae} D_{0\mu\nu}(p'-q) + \frac{i}{2} g^2 C_2(F) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_{ab}^\mu G_{bc}(p) \gamma_{ci}^\nu \delta_{je} \delta_{ae} D_{0\mu\nu}(p-p') \\ &= \frac{i}{2} g^2 C_2(F) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_{jd}^\mu G_{da}(q) \gamma_{ai}^\nu D_{0\mu\nu}(p'-q) + \frac{i}{2} g^2 C_2(F) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_{jb}^\mu G_{bc}(p) \gamma_{ci}^\nu D_{0\mu\nu}(p-p') \\ &= ig^2 C_2(F) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu G(q) \gamma_\nu D_0^{\mu\nu}(p'-q) \end{aligned}$$

よって

$$iG^{-1}(p) = iS^{-1} + ig^2 C_2(F) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu D_0^{\mu\nu}(p-q) G(q) \gamma_\nu$$

また、はしご近似を取らなかったら例えば

$$iG^{-1}(p) = iS^{-1} + ig^2 C_2(F) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu D^{\mu\nu}(p-q) G(q) \Gamma_\nu(p, q)$$

このように厳密なゲージボソンの伝播関数とフェルミオン-ゲージボソン頂点を使うことになるだけです。これは QED にすれば「シュウィンガー・ダイソン方程式～QED～」でのものと一致しますし、QCD のファインマン則を使えばこうなります。

ここから具体的に計算していきます。カイラル対称性の破れを調べたいので、カイラル対称性を持たせるためにフェルミオンの質量を 0 にとります。厳密な伝播関数 G の方はランダウゲージをとってしまい、波動関数のくり込み定数は 1 にしてしまいます (QED の場合と同じ)。というわけで、 S, G は

$$S(p) = \frac{i}{\not{p}}, \quad G(p) = \frac{i}{\not{p} - m(p^2)}$$

とします ($m(p^2)$ は「カイラル対称性と力学的破れ」での B です)。QCD でのフェルミオン伝播関数はカラーによる $SU(3)$ の添え字がつくんですが、対角化されているのでカラーの自由度があるということだけ覚えておけば大丈夫です (フレーバに関しても同様)。 V_1 は

$$\begin{aligned} V_1 &= i \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \log[\not{p} - m(p^2)] + i \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}}{\not{p} - m(p^2)} \\ &= i \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \log[\not{p} - m(p^2)] + i \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + \not{p}m}{p^2 - m^2(p^2)} \end{aligned}$$

スピノールに対するトレースを取ります。第一項のスピノールに対するトレースは展開することでとれます。展開は

$$\begin{aligned} \log[p^\mu \gamma_\mu - m(p^2)] &= \log p^\mu \gamma_\mu + \log[1 + \frac{-p^\mu \gamma_\mu}{p^2} m] \\ &= \log p^\mu \gamma_\mu + \frac{-p^\mu \gamma_\mu}{p^2} m - \frac{1}{2} \frac{(-p^\mu \gamma_\mu)^2}{p^4} m^2 + \frac{1}{3} \frac{(-p^\mu \gamma_\mu)^3}{p^6} m^3 - \frac{1}{4} \frac{(-p^\mu \gamma_\mu)^4}{p^8} m^4 + \dots \end{aligned}$$

第一項は有効ポテンシャルに寄与しない定数項なので無視します。ガンマ行列のトレースは、ガンマ行列が奇数個ある時消えるので

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left[-\frac{1}{2} \frac{(-p^\mu \gamma_\mu)^2}{p^4} m^2 - \frac{1}{4} \frac{(-p^\mu \gamma_\mu)^4}{p^8} m^4 - \frac{1}{6} \frac{(-p^\mu \gamma_\mu)^6}{p^{12}} m^6 - \dots \right] \\ &= \text{tr} \left[-\frac{1}{2} \frac{m^2}{p^2} - \frac{1}{4} \frac{m^4}{p^4} - \frac{1}{6} \frac{m^6}{p^6} - \dots \right] \\ &= -2 \frac{m^2}{p^2} - \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^3 \dots \\ &= 2 \left[-\frac{m^2}{p^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{m^2}{p^2} \right)^3 \dots \right] \\ &= 2 \left[\frac{m^2}{-p^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{-p^2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{m^2}{-p^2} \right)^3 \dots \right] \\ &= 2 \log \left(1 + \frac{m^2}{-p^2} \right) \\ &= 2 \log(-p^2 + m^2) \end{aligned}$$

最後に $\log(-p^2)$ を無視しています。よって

$$V_1 = i \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2 \log[-p^2 + m^2(p^2)] + i \text{tr} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{4p^2}{p^2 - m^2(p^2)}$$

QCD で行っていくので、まだ残っているトレースはカラーによるものです。もしくは、フレーバを考えるならこれも絡んできます。なので、単純にカラーとフレーバの個数 N_c, N_f をかければよくて

$$V_1 = 2iN_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \log[-p^2 + m^2(p^2)] + 4iN_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{p^2 - m^2(p^2)}$$

さらに、ユークリッド化して ($p^2 = -p_E^2$, $id^4 p = -d^4 p_E$)

$$\begin{aligned} V_1 &= -2N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \log[p_E^2 + m^2(p_E^2)] - 4N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{-p_E^2}{-p_E^2 - m^2(p_E^2)} \\ &= -2N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \log[p_E^2 + m^2(p_E^2)] - 4N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^2}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \end{aligned}$$

V_2 は上で示したように非可換ゲージ場でのファインマン則を使うことで、図から

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{i}{2} (ig)^2 (t^a)_{ij} (t^b)_{ji} (-\text{tr}) \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_\mu \frac{i}{p^\alpha \gamma_\alpha - m(p^2)} \frac{-i\delta^{ab}}{(p-q)^2} (g^{\mu\nu} - \frac{(p-q)^\mu (p-q)^\nu}{(p-q)^2}) \gamma_\nu \frac{i}{q^\beta \gamma_\beta - m(q^2)} \right] \end{aligned}$$

となっています。そして、面倒なので公式扱いにしていますが (変形して角度積分を実行すればいい。 $m(p^2)$ は角度依存していない)

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{1}{p^\alpha \gamma_\alpha - m(p^2)} \frac{1}{(p-q)^2} (g^{\mu\nu} - \frac{(p-q)^\mu (p-q)^\nu}{(p-q)^2}) \gamma_\nu = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-q)^2} \frac{3m(p^2)}{p^2 - m^2}$$

この関係は D 次元に拡張できて

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \gamma_\mu \frac{1}{p^\alpha \gamma_\alpha - m(p^2)} \frac{1}{(p-q)^2} (g^{\mu\nu} - \frac{(p-q)^\mu (p-q)^\nu}{(p-q)^2}) \gamma_\nu = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-q)^2} \frac{(D-1)m(p^2)}{p^2 - m^2}$$

4 次元では角度積分が ($d\Omega_4$ は p_μ の 4 次元角度積分。「カイラル対称性と力学的破れ」参照)

$$\int d\Omega_4 \frac{p^\mu}{p^2 + q^2 - 2p \cdot q} = - \int d\Omega_4 \frac{2p \cdot (p-q)(p-q)^\mu}{(p^2 + q^2 - 2p \cdot q)^2} \quad (10)$$

となるために成立します。3 次元では、ガンマ行列を計算すると (10) の右辺だけが残り、それが 3 次元角度積分では 0 となるために成立します。この関係を使うことで

$$\begin{aligned}
V_2 &= -\frac{i}{2}(ig)^2 C_2(F) \text{tr} \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-q)^2} \frac{3m(p^2)}{p^2 - m^2} \frac{i(q^\mu \gamma_\mu + m(q^2))}{q^2 - m^2(q^2)} \right] \\
&= -\frac{i}{2}(ig)^2 C_2(F) \text{tr} \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-q)^2} \frac{12m(p^2)}{p^2 - m^2(p^2)} \frac{im(q^2)}{q^2 - m^2(q^2)} \right]
\end{aligned}$$

残っているトレースはカラーとフレーバによるものなので

$$V_2 = 6(ig)^2 C_2(F) N_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-q)^2} \frac{m(p^2)}{p^2 - m^2} \frac{m(q^2)}{q^2 - m^2(q^2)}$$

そして、ユークリッド化して

$$\begin{aligned}
V_2 &= -6g^2 C_2(F) N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{-(p_E - q_E)^2} \frac{-m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2} \frac{-m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)} \\
&= -6g^2 C_2(F) N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)}
\end{aligned}$$

なので、2 ループまでの CJT 有効ポテンシャルとして

$$\begin{aligned}
V &= -2N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \log[p_E^2 + m^2(p_E^2)] - 4N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^2}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \\
&\quad - 6g^2 C_2(F) N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)}
\end{aligned}$$

で、これを G で微分して 0 になるという式に入れます。しかし、波動関数のくり込み定数は 1 にしているために p 部分は無関係です。というわけで必要なのは $m(p^2)$ に対する式だけなので、 $m(p^2)$ で微分すればいいです。 V_1 を微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial m(k^2)} &= -2N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \frac{\partial m^2(p_E^2)}{\partial m(k^2)} + 4N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{p_E^2}{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2} \frac{\partial m^2(p_E^2)}{\partial m(k^2)} \\
&= -2N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{2m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \delta(p_E^2 - k^2) + 4N_c N_f \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{2p_E^2 m(p_E^2)}{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2} \delta(p_E^2 - k^2) \\
&= -2N_c N_f \int d\Omega \int \frac{d|p_E|}{(2\pi)^4} \frac{2p_E^3 m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \delta(p_E^2 - k^2) + 4N_c N_f \int d\Omega \int \frac{d|p_E|}{(2\pi)^4} \frac{2p_E^2 p_E^3 m(p_E^2)}{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2} \delta(p_E^2 - k^2) \\
&= -2N_c N_f \int d\Omega \int \frac{d|p_E|^2}{(2\pi)^4} \frac{p_E^2 m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \delta(p_E^2 - k^2) + 4N_c N_f \int d\Omega \int \frac{d|p_E|^2}{(2\pi)^4} \frac{p_E^4 m(p_E^2)}{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2} \delta(p_E^2 - k^2) \\
&= -2N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{k^2 m(k^2)}{k^2 + m^2(k^2)} + 4N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{k^4 m(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2}
\end{aligned}$$

後のために変形させておきます

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial m(k^2)} &= -2N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{k^2 m(k^2)}{k^2 + m^2(k^2)} + 4N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{k^2 m^3(k^2) - k^2 m^3(k^2) + k^4 m(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \\
&= -2N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{k^2 m(k^2)}{k^2 + m^2(k^2)} + 4N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{k^2 m(k^2)(m^2(k^2) + k^2) - k^2 m^3(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \\
&= 2N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{k^2 m(k^2)}{k^2 + m^2(k^2)} + 4N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{-k^2 m^3(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \\
&= 2N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{k^2 m(k^2)(k^2 + m^2(k^2)) - 2k^2 m^3(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2}
\end{aligned}$$

V_2 では ($A = 6g^2 C_2(F) N_c N_f$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_2}{\partial m(k^2)} &= -A \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{\delta(p_E^2 - k^2)}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \frac{m(q_E^2)}{q^2 + m^2(q_E^2)} \\
&\quad + A \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{2m(p_E^2)m^2(p_E^2)\delta(p_E^2 - k^2)}{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2} \frac{m(q_E^2)}{q^2 + m^2(q_E^2)} \\
&\quad - A \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \frac{\delta(q_E^2 - k^2)}{q^2 + m^2(q_E^2)} \\
&\quad + A \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \frac{2m(q_E^2)m(q_E^2)\delta(q_E^2 - k^2)}{(q^2 + m^2(q_E^2))^2} \\
&= -A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \frac{k^2}{(k - q_E)^2} \frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} \frac{m(q_E^2)}{q^2 + m^2(q_E^2)} \\
&\quad + A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \frac{k^2}{(k - q_E)^2} \frac{2m^2(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \frac{m(q_E^2)}{q^2 + m^2(q_E^2)} \\
&\quad - A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \frac{k^2}{(p_E - k)^2} \frac{m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} \\
&\quad + A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \frac{k^2}{(p_E - k)^2} \frac{m(p_E^2)}{p_E^2 + m^2(p_E^2)} \frac{2m^2(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \\
&= A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \left[- \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k - q_E)^2} \frac{1}{k^2 + m^2(k^2)} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)} + \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k - q_E)^2} \frac{2m^2(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)} \right] \\
&= A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \left[- \frac{k^2}{k^2 + m^2(k^2)} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k - q_E)^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)} + \frac{2k^2 m^2(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k - q_E)^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)} \right] \\
&= A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \left(- \frac{k^2}{k^2 + m^2(k^2)} + \frac{2k^2 m^2(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \right) \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k - q_E)^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)} \\
&= A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \left(- \frac{k^2(k^2 + m^2(k^2)) - 2k^2 m^2(k^2)}{(k^2 + m^2(k^2))^2} \right) \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k - q_E)^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)}
\end{aligned}$$

よって、有効ポテンシャルの極値

$$\frac{\partial V}{\partial m(p_E^2)} = 0$$

から

$$0 = 2N_c N_f \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{p_E^2 m(p_E^2)(p_E^2 + m^2(p_E^2)) - 2p_E^2 m^3(p_E^2)}{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2} \\ - A \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{p_E^2 (p_E^2 + m^2(p_E^2)) - 2p_E^2 m^2(p_E^2)}{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)}$$

第一項と第二項の積分の外にいたのは

$$2N_c N_f \frac{p_E^2 m(p_E^2)(p_E^2 + m^2(p_E^2)) - 2p_E^2 m^3(p_E^2)}{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2} \frac{(p_E^2 + m^2(p_E^2))^2}{p_E^2 (p_E^2 + m^2(p_E^2)) - 2p_E^2 m^2(p_E^2)} = 2N_c N_f m(p_E^2)$$

なので、

$$m(p_E^2) = \frac{A}{2N_c N_f} \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)} \\ = 3g^2 C_2(F) \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_E - q_E)^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)}$$

となります。これは「カイラル対称性と力学的破れ」で出てきた、はしご近似における質量関数 B の式と同じになっていることが分かります。というわけで、ちゃんと質量関数に対するシュウィンガー・ダイソン方程式が求まったことになります。

で、QCD でのシュウィンガー・ダイソン方程式がこの形になるのは分かり切っていたことなので、それはそれで置いておきます。ここで大事なのはむしろ CJT 有効ポテンシャル V の方です。 V の形を見れば分かるように積分は発散しています。つまり、CJT 有効ポテンシャルを有限にするにはくり込みを必要とします。形式的に言えば、CJT 有効ポテンシャルに使われている裸の結合定数 g 、裸の質量 m 、裸の伝播関数 G (運動量積分の切断 Λ に依存する) を、くり込まれた g_R, m_R, G_R とくり込みでの質量パラメータ μ によって置き換えるということです。切断 Λ によって有限の値にコントロールされているなら、 V は

$$V(g, m, G, \Lambda) = V_R(g_R, m_R, G_R, \mu)$$

このように適当に選んだくり込まれた量で有限化されたものと関係づけることができます。

くり込みが出てきたところで、くり込み群方程式を持ち出します。くり込み群方程式は、くり込まれた n 点相関関数に微分演算子がかかる形で書かれています。その演算子部分を (α はゲージパラメータ)

$$\mathcal{D} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g_R} - \gamma_m m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad \gamma_m = -\frac{\mu}{m} \frac{\partial m}{\partial \mu}, \quad \gamma_\alpha = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}$$

とすれば、くり込まれたフェルミオン伝播関数 G_R に対するくり込み群方程式は

$$(\mathcal{D} - 2\gamma_F)G_R = 0 \quad (\gamma_F = \frac{\mu}{2} Z_2^{-1} \frac{\partial Z_2}{\partial \mu})$$

Z_2 はフェルミオン-ゲージボソン頂点のくり込み定数です。くり込まれていない伝播関数 G に対しては

$$\mu \frac{d}{d\mu} G = (\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g_R} - m_R \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_R} + \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}) G = 0$$

であり、くり込み群に対して不変になっています。そして、「カイラル対称性の力学的破れ」の補足で触れたように、くり込んでいない質量 $m(p^2)$ はくり込み群不変なので、 $\mathcal{D}m(p^2) = 0$ です。有効ポテンシャルもくり込み群不変なのだと考えれば、当然くり込まれた有効ポテンシャルでも

$$\mathcal{D}V_R(g_R, m_R, G_R, \mu) = 0$$

が成立するとできます。

V_1 に対しては、 $\mathcal{D}m(p^2) = 0$ から何事もないように、くり込み群方程式を満たすことが分かります。しかし、 V_2 では結合定数 g_R^2 があるために成立しません。これがここでの本題で、 $\mathcal{D}V_2 = 0$ を成立させる手っ取り早い方法が結合定数 g_R^2 をくり込み群不変な $\bar{g}_R^2$ に変えてしまうというものです (近似としての置き換え)。つまり、CJT 有効ポテンシャルがくり込み群において不変であることを要求することによってシュウィンガー・ダイソン方程式は

$$m(p_E^2) = 3C_2(F) \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{\bar{g}_R^2(p_E^2, q_E^2)}{(p_E - q_E)^2} \frac{m(q_E^2)}{q_E^2 + m^2(q_E^2)} \quad (11)$$

というように変更されます。このように、はしご近似において結合定数をくり込み群のものに変えたものを改善されたはしご (improved ladder) 近似と呼びます。

ここでいきなり問題に直面します。それは、 $\bar{g}_R^2(p_E^2, q_E^2)$ の正体がはっきりとしていないということです (バーと R の添え字は省いていきます)。さらに、当たり前のように結合定数の変数を $g^2(p_E^2, q_E^2)$ のように書き、 p_E^2, q_E^2 のみに依存するように書いていますが、このように角度依存性がないとするのも仮定です (V_2 の形が p, q に対して対称になっているので、独立に依存しているといいな、という予想です)。

分かっていることは漸近的自由であり、赤外領域で正確に定義できないということです。この性質とくり込み群不変を持った結合定数を見つけてやらなければいけません。どこまで正確かは不明ですが、これらの性質を持ったものは簡単に存在していて、1 ループでの running coupling constant です。ただ、そのままと赤外でおかしくなるので、赤外の切断を入れてやります。「非可換ゲージ場の漸近的自由」で求められた running coupling constant は

$$g^2(p^2) = \frac{48\pi^2}{(11N_c - 2N_f) \log[p^2/\Lambda_{QCD}^2]} \quad (12)$$

であり、 $p^2 \rightarrow 0$ で使えなくなります。なので切断として p_c を埋め込んで

$$g^2(p^2) = \frac{a}{\log[(p^2 + p_c^2)/\Lambda_{QCD}^2]}$$

$$(a = \frac{48\pi^2}{11N_c - 2N_f}, \Lambda_{QCD} = \mu \exp[-\frac{a}{2g^2}])$$

というのを使用します。これはくり込み群不変になっています (1 ループで $D\Lambda_{QCD} = 0$, $\beta = -g^3/a$)。他にも数値計算で用いられる形として

$$g^2(p_E^2) = \frac{48\pi^2}{(11N_c - 2N_f)} \times \begin{cases} \frac{1}{t} & t_F < t \\ \frac{1}{t_F} + \frac{(t_F - t_C)^2 - (t - t_C)^2}{2t_F^2(t_F - t_C)} & t_C < t < t_F \\ \frac{1}{t_F} + \frac{t_F - t_C}{2t_F^2} & t < t_C \end{cases} \quad (13)$$

$$t = \log(p_E^2/\Lambda_{QCD}^2)$$

このようなものも使われます。これは t の値によって結合定数の値を 3 分割しているもので、赤外領域で定数になるように操作されています。この形を使うのは $g^2(p_E^2)$ が上手いこと滑らかに繋がるようにするためです (単純に切断をいれるとそこで B に飛びが出る場合がある)。

t_F は $g^2(p^2, q^2)$ の正則化パラメータ、つまり p_c に対応するもので、 $t > t_F$ において通常の running な結合定数の振る舞いに対応するように作られています。 Λ_{QCD} はこの値あたりから発散がおきるという目安になっているので t_C を -2 に固定し、 t_F を動かすように取ります。そのために、 t_F による依存性が残るんですが、そこら辺は数値計算の解析によるので割愛します ($m(x)$ は質量殻上にない限り観測可能な物理量ではないので、 t_F に依存していても致命的な欠陥というわけではないです)。下の補足でもう少し詳しくこの結合定数を見ます。

(11) から微分方程式を作って、解析することが出来るんですが (13) を使った数値計算の結果だけを載せておきます。そのうち載せるかもしれませんが、気になる人は KEK の KISS for Preprints での KEK Accession No に 199127031 と入れて検索すると出てくる Theory of dynamical symmetry breaking というのを見てください。ここでの話はこれの 5 章を参考にしています。また、この論文はこの分野では結構参照されているものなので、興味のある人は読むことをお勧めします。ちなみに出版されたものは、Progress of Theoretical Physics Supplement No.104(1991)pp.1-69 です。

数値計算を行うにあたって式変形を行います。「カイラル対称性と力学的破れ」でやったのと同じように (5) において

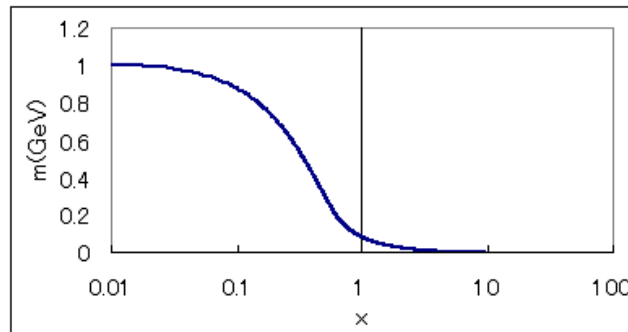
$$\frac{1}{(p_E - q_E)^2} = \theta(p_E - q_E) \frac{1}{p_E^2} + \theta(q_E - p_E) \frac{1}{q_E^2}$$

という置き換えをして (θ は階段関数)、角度依存性のない状態で行うことにします。書き換えたものは QED での結合定数 e^2 を $C_2(F)g^2$ に変えればいいだけなので

$$m(x) = \frac{3C_2(F)}{16\pi^2} \frac{g^2(x)}{x} \int_0^x dy \frac{ym(y)}{y + m^2(y)} + \frac{3C_2(F)}{16\pi^2} \int_x^\Lambda dy \frac{g^2(y)m(y)}{y + m^2(y)}$$

$g^2(x)$ は (13) のものです (この変形を考えるなら (12) の方がいいですが)。確定していないパラメータ Λ_{QCD}, t_F は、 $\Lambda_{QCD} = 550(\text{MeV})$ 、 $t_F = 0.5$ とします。積分の下限は 0.01、上限 Λ は 18 としています (Λ_{QCD} が単位を持っているので QED と違い、運動量は自動的に質量の単位を持ちます。 x, y は p_E^2, q_E^2)。カラーは $N_c = 3$ にとり、フレーバは $N_f = 2$ とすることにします。数値計算の結果は t_F にかかなり依存しているんですが、値がズレるだけで振る舞い自体は変わらないので無視します。また、 Λ_{QCD} は実験的には $100 \sim 300(\text{MeV})$ 程度となっているので、割と高めに設定していることが分かると思います。これには理由があります。QCD を扱うときに、何を基準に取るかによるんですが、ここではパイオンの崩壊定数に合わせています。 $m(x)$ が求まればそこからパイオンの崩壊定数を近似的に求めることが出来るので (Pagels-Stokar の公式)、その値が $94(\text{MeV})$ 辺りになるように Λ_{QCD} を選んでいます (Λ_{QCD} の値は $450 \sim 600(\text{MeV})$ の間のどこか程度の精度で決めているので、相当テキトーです)。逆にパイオンの崩壊定数を入力にすることもできます。そんなわけで Λ_{QCD} のずれから、はしご近似でのシュ

ウィンガー・ダイソン方程式の不十分さが現われています (もしくは Λ_{QCD} に不正確さを埋め込んでいるとも言えます)。数値計算の結果としては



相変わらず精度は気にしていないので値を信用しないでください。振る舞いとしては大体このような形になっています。質量 0 から始めたのに、結合定数が大きくなる赤外領域で $m(x) \neq 0$ となっているので、カイラル対称性が破られています。また、紫外領域 (結合定数が小さい領域) で $m(x) = 0$ となることから、摂動論の結果と一致します (摂動論では質量 0 から始めればどこまでも質量 0)。

ちなみに、エネルギースケールのストレンジクォークも絡んでいそうなので、running coupling constant のフレーバ数は大抵 $N_f = 3$ に取るようです。しかし、こんな手で加えた running coupling constant に対して絶対に $N_f = 3$ に取らなくてはならない理由もないだろうということから、 $N_f = 2$ にしています (個人的にカイラル対称性は 2 フレーバの方が成立しやすそうだと思うだけです)。また、2 フレーバとしたときの有効ポテンシャルの計算では、running coupling constant では $N_f = 3$ を使って、有効ポテンシャルにいる N_f では 2 にしたりしているようです (この設定は中間状態ではストレンジクォークも絡んでいるように取っているイメージです)。

個人的な意見としては、はしご近似によるシュウィンガー・ダイソン方程式はカイラル対称性の破れを扱える便利な解析方法という程度で、厳密な値を調べるためのものではないような気がします (パラメータに任意性とテキトーさがありすぎる)。

ついでにちょっとクォーク質量まわりの話もしておきます。クォーク質量と言ったときに、まず思い当たるのはラグランジアンにいる質量です。これはカレントクォーク質量と呼ばれ、代数的に求められているものです。なので、実験値とは無関係に導出されています。これはクォーク単独を観測できないという縛りによるためです。そして、もう一つ構成子クォーク質量と呼ばれるものがあります。これはハドロンの質量から予想するものです。で、この二つのクォークに関する質量は u, d クォークに絞れば

カレント質量

$$u \simeq 4.2\text{MeV}, d \simeq 7.5\text{MeV}$$

構成子質量

$$u \simeq 390\text{MeV}, d \simeq 390\text{MeV}$$

このようになっています。で、構成子質量はハドロンの観測から予想する値なので、現実的な値としてクォークはこんな値を持っていないとハドロンの質量を説明できません。カレント質量でハドロンが構成されていると考えると、残りの約 98% はなんなんだったことになります。この問題に答えを与えているのがカイラル対称性の力学的破れです。つまり、カレント質量に対して力学的な破れによって質量が付加されていると考えます (カレント質量を 0 だと思えば力学的な破れの質量のみになる)。実際に、今求められた $m(x)$ を使って、物理的な質量を $p^2 - m(p^2) = 0$ から求めてみると、大体 500MeV 程度になります。ちょっと大きいですが数値計算自体がテキトー

なことを考えればオーダが合ってるだけで十分です。このように、ラグランジアン段階では数 MeV しかなかった質量 (もしくはカイラル極限なら質量 0) が 500MeV 程度まで上がります。このようにカイラル対称性の力学的な破れによってハドロンの質量を説明することができます。イメージとしては、カイラル対称性の破れによって出てくるカイラル凝縮 $\langle \bar{q}q \rangle$ がクォークにまわり付いて質量を増加させるというかんじです。

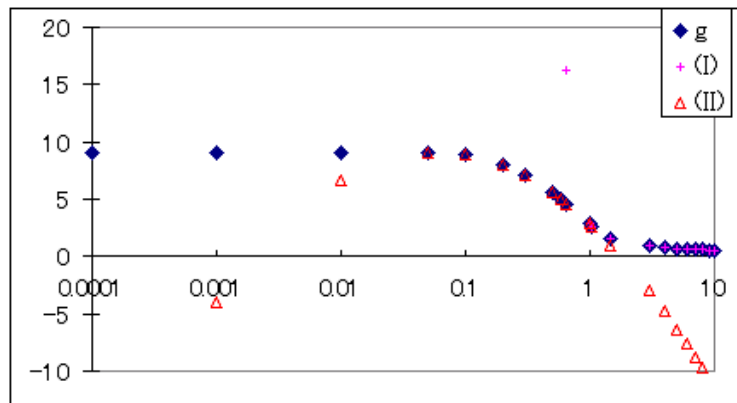
ここでは軽いクォーク u, d だけを扱っていましたが、重いクォークにいくと状況がまた変わります。なぜなら、 s クォークまではまだいいんですが、それ以上の c, t, b までいくとカレント質量が支配的になって力学的な破れによる質量の付与はほとんど効かなくなるからです。例えば、 b クォークではカレント質量の 10% 程度しか質量を加えません。このため重いクォークの質量は別の機構によるものだと考えられて、単純にヒッグス機構によって質量を得ているのではないかと予想されています。

・補足

数値計算で使った結合定数の構造についてもう少し触れておきます。3 つに分けた領域をそれぞれ

- (I) ... $t_F < t$
- (II) ... $t_C < t < t_F$
- (III) ... $t < t_C$

このように区別します。これの $t_C = -2, t_F = 0.5$ としたときの図を載せておきます



縦軸は $\alpha = g^2(x)/4\pi$ として、横軸は $\sqrt{x}(\text{GeV})$ としています。 g というのが使っている結合定数で、(I) というのが (I) でのものを全域で使ったもの、(II) というのが (II) でのものを全域で使ったものです。

比較してみると (I) での $1/t$ が変な動きをする前に (II) のものに変更し、さらにそれが変な動きをする前に (III) に切り替えているのが分かります。式で言えば (II) の場合

$$(t_F - t_C)^2 - (t - t_C)^2$$

これの第二項部分が大きくなるにつれて g^2 の値が下がっていき、しまいにはマイナスになってしまいます。そのために極値となる $t = t_C$ 以降で (III) のものに切り替えています。また、見て分かるように (III) のものは (II) において $t = t_C$ としたもののなので、(II) の極値が α の最大値となります。この構造から、 t_C に対応する位置が常に結合定数の最大値を与えます。

また、結合定数を変更して、(III) で定数でなく 0 に向かって線形に下降していくような関数形を取ってみても、 $m(x)$ や崩壊定数はほとんど変化しません (最近 (2000 年あたりから) の格子場のシミュレーションやくり込み群の解析からは下降しているような形が出てきている)。

他に効いてくるのは、 t_C, t_F の値です。 t_C, t_F 関連は本当に数値計算上での解析になってしまうので触れませんが、一つ例として、 $t_C = -0.3, t_F = 0.5$ とすると $m(x)$ の値は全体的に下がるんですが、崩壊定数の値は 1(MeV) 程度しか変わらないことが分かります。 $t_C = -0.3$ というのは x が Λ_{QCD}^2 程度になったときの値です。同様に t_F を動かしてみると、0.1 変えるぐらいで崩壊定数の値が 1(MeV) 程度動きます。