

クリフォード代数

簡単にクリフォード代数を導入するために4元数のことは無視して、クリフォード代数を外積代数と同一視して定義します。また、パウリ行列とガンマ行列が出てくることを見るのを目的にしているので、いろいろと省いた話になっています。

ここでのクリフォード代数は n 次元ベクトル空間 V_n 内で作られているものです。 n 次元ベクトル空間 V_n のクリフォード代数を $Cl(V_n)$ と書くことにします。クリフォード代数に従うもの(元、要素)を大文字のローマ文字で書くことにします。ベクトルは小文字のローマ文字で書いています。

前半でクリフォード代数での計算規則の話をして、後半で具体的な空間を使った話をします。

クリフォード代数 (Clifford algebra) は、和 $A + B$ と積 AB を持ちます。このとき

- 交換法則

$$A + B = B + A$$

- 結合法則

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A(BC) = (AB)C$$

- 分配法則

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

を持たせます。そして0は

$$A + 0 = A, \quad A + (-A) = 0$$

とします。実数(スカラー)も含むようにし、実数 λ は

$$\lambda A = A\lambda, \quad 1A = A$$

とします。

ベクトル空間から作られていることから、クリフォード代数はベクトルを含んでいるのでベクトルの積 ab があり、これを定義します。ベクトルは小文字のローマ文字で書きます。

まず、 aa はスカラーになるとします。そして、 aa は

$$aa = a^2 = |a|^2$$

として、ベクトルの大きさ $|a|$ になるようにします。このため、内積「 $\cdot$ 」と

$$aa = a \cdot a$$

と対応させます。そして、 ab は対称な項と反対称な項に分解し

$$ab = \frac{1}{2}(ab + ba) + \frac{1}{2}(ab - ba)$$

として

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba)$$

と定義します。この $a \cdot b$ の定義は、 $a \cdot a$ では $a \cdot a = aa = a^2$ になります。「 $\wedge$ 」は定義から分かるように反対称部分なので

$$a \wedge b = -b \wedge a$$

と反交換し ($a \wedge a = 0$)、スカラー λ とは $\lambda \wedge a = a \wedge \lambda = \lambda a$ とします。「 $\wedge$ 」によるものを外積と呼んでいきます。また、

$$(a+b)(a+b) = (a+b) \cdot (a+b) \quad (cc = c \cdot c, \quad c = a+b)$$

において、 $a \cdot b = b \cdot a = 0$ なら

$$(a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + ab + ba$$

$$(a+b) \cdot (a+b) = a^2 + b^2 + a \cdot b + b \cdot a = a^2 + b^2$$

から

$$ab + ba = 0$$

$$ab = -ba$$

そして、 $a \cdot b = 0$ なので積と外積は

$$ab = a \wedge b \quad (a \cdot b = b \cdot a = 0)$$

となります。

クリフォード代数 $Cl(V_n)$ を外積代数と同一視します。なので、 $Cl(V_n)$ は外積によるものを元 (要素) として持ちます。複数のベクトルによる外積を

$$A_r = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r, \quad A_{r+1} = a \wedge a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_r$$

と書きます。外積の定義から明らかなように $a_1, \dots, a_r$ が線形独立でないなら、 $A_r = 0$ です (単純に言えば $a_1 \wedge a_1 \wedge a_2 = 0$ だから)。これは simple r -ベクトルと呼ばれ、simple r -ベクトルの線形結合を r -ベクトルと呼びます。例えば、 $a_1 + a_2$ は 1-ベクトル、 $a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4$ は 2-ベクトル、 $a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 + a_4 \wedge a_5 \wedge a_6$ は 3-ベクトルとなります。0-ベクトルはスカラーで、2-ベクトルは bivector、3-ベクトルは trivector とも呼ばれます。ここでは A_r のように書くものは simple r -ベクトルで、特に明言する必要がない限り r -ベクトルと呼んでいきます。また、 r を特に指定しないときは multivector と呼ぶことにします。 $Cl(V_n)$ の元は multivector です。

ベクトルと A_r の内積と外積を定義します。内積と外積はベクトルの一般化として

$$aA_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r$$

$$a \cdot A_r = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^{r+1}A_r a)$$

$$a \wedge A_r = \frac{1}{2}(aA_r - (-1)^r A_r a)$$

と定義します。 $a \cdot A_r$ と $a \wedge A_r$ での $A_r a$ の項の符号は $r+1$ と r なので、常に符号は逆です。このため、 $a \cdot A_r$ と $a \wedge A_r$ を足せばこの項は消えて、 aA_r となります。

内積と外積における a, A_r の入れ替えは

$$a \cdot A_r = (-1)^{r+1} A_r \cdot a$$

$$a \wedge A_r = (-1)^r A_r \wedge a$$

となっています。 a, A_r の入れ替えに対してこのようにすることで、定義の形を与えられます (外積の場合は反交換することから確かめられる)。

実際にこれらを使うと

$$A_r a = A_r \cdot a + A_r \wedge a = (-1)^{r+1} a \cdot A_r + (-1)^r a \wedge A_r$$

から、内積の場合は

$$\begin{aligned} aA_r + (-1)^{r+1}A_r a &= a \cdot A_r + a \wedge A_r + (-1)^{r+1}((-1)^{r+1}a \cdot A_r + (-1)^r a \wedge A_r) \\ &= a \cdot A_r + a \wedge A_r + ((-1)^{2r+2}a \cdot A_r + (-1)^{2r+1}a \wedge A_r) \\ &= a \cdot A_r + a \wedge A_r + a \cdot A_r - a \wedge A_r \\ &= 2a \cdot A_r \end{aligned}$$

となり、一致します。途中で $2r+2$ は偶数、 $2r+1$ は奇数であることを使っています。同様に、外積の場合は

$$\begin{aligned} aA_r + (-1)^r A_r a &= a \cdot A_r + a \wedge A_r + (-1)^r((-1)^{r+1}a \cdot A_r + (-1)^r a \wedge A_r) \\ &= a \cdot A_r + a \wedge A_r + ((-1)^{2r+1}a \cdot A_r + (-1)^{2r}a \wedge A_r) \\ &= a \cdot A_r + a \wedge A_r - a \cdot A_r + a \wedge A_r \\ &= 2a \wedge A_r \end{aligned}$$

となり、一致します。

また外積は結合法則を満たしていることを確かめられます。 A_2 とベクトルの外積を見れば

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \wedge c &= \frac{1}{2}(A_2 c + c A_2) = \frac{1}{4}((ab - ba)c + c(ab - ba)) = \frac{1}{4}(abc - bac + cab - cba) \\ a \wedge (b \wedge c) &= \frac{1}{4}(a(bc - cb) + (bc - cb)a) = \frac{1}{4}(abc - acb + bca - cba) \end{aligned}$$

この2つを引くと、スカラー λ に対して $\lambda a = a\lambda$ (内積はスカラー) であることから

$$\begin{aligned}
& abc - bac + cab - cba - (abc - acb + bca - cba) \\
&= -bac + cab + acb - bca \\
&= -b(ac + ca) + (ca + ac)b \\
&= -2b(a \cdot c) + 2(c \cdot a)b \quad (a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)) \\
&= -2b(a \cdot c) + 2b(c \cdot a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となるので、結合法則

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

が成立しているのが確かめられます。

r -ベクトル A_r と s -ベクトル B_s の内積と外積は、 $r \leq s$ として

$$\begin{aligned}
A_r \cdot B_s &= (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \cdot (a_r \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s)) \\
A_r \wedge B_s &= (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \wedge (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \wedge (a_r \wedge (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s))
\end{aligned}$$

と定義します。外積は結合法則の一般化です。内積は

$$A_r \cdot B_s = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) = (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \cdot ((a_r \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s))$$

と書くこともできます。これらによって入れ替えに対しては

$$\begin{aligned}
A_r \cdot B_s &= (-1)^{r(s+1)} B_s \cdot A_r \\
A_r \wedge B_s &= (-1)^{rs} B_s \wedge A_r
\end{aligned}$$

となります。 $r(s+1), rs$ となるのは、内積では

$$\begin{aligned}
(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) &= (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \cdot (a_r \cdot (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s)) \\
&= (-1)^{s+1} (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \cdot ((b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) \cdot a_r)
\end{aligned}$$

を r 回行い、外積では

$$\begin{aligned}
(a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) \wedge (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) &= (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \wedge (a_r \wedge (b_1 \wedge \cdots \wedge b_s)) \\
&= (-1)^s (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{r-1}) \wedge ((b_1 \wedge \cdots \wedge b_s) \wedge a_r)
\end{aligned}$$

を r 回行うからです。

いくつかの関係を載せておく (下の補足参照)

$$a \cdot (a_1 \wedge a_2) = (a \cdot a_1)a_2 - (a \cdot a_2)a_1 \quad (1a)$$

$$a \cdot (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \cdots \wedge a_r) \quad (k-1 > 1, k+1 < r) \quad (1b)$$

$$a \cdot (b \wedge c) + b \cdot (c \wedge a) + c \cdot (a \wedge b) = 0 \quad (1c)$$

$$(a \wedge b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = -b \cdot (a \cdot c) \quad (1d)$$

$$(a \wedge b) \cdot (c_1 \wedge \cdots \wedge c_r) = a \cdot (b \cdot (c_1 \wedge \cdots \wedge c_r)) = -b \cdot (a \cdot (c_1 \wedge \cdots \wedge c_r)) \quad (1e)$$

$$(a_1 \wedge a_2) \cdot (b_1 \wedge b_2) = (a_2 \cdot b_1)(a_1 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2) \quad (1f)$$

$$(a_1 \wedge a_2) \cdot (a_1 \wedge a_2) = (a_1 \cdot a_2)^2 - (a_1 \cdot a_1)(a_2 \cdot a_2) \quad (1g)$$

(1b) から、内積 $a \cdot A_r$ は r -ベクトルを $(r-1)$ -ベクトルにすることが分かります。

今度はクリフォード代数の基底の関係を見ていきます。 n 次元ベクトル空間でのベクトル v が基底 e_i によって

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots = v_i e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と書けるので、クリフォード代数 $Cl(V_n)$ に従う A も同じように基底によって書けるはずです。そして、 $Cl(V_n)$ は multivector によって構成されているので、 A は multivector の和で書けるはずです。なので、multivector による多項式として

$$\begin{aligned} A &= a + a_i e_i + a_{ij} e_i \wedge e_j + a_{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k + \cdots + a_{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \\ &= a + a_i e_i + a_{ij} e_{ij} + a_{ijk} e_{ijk} + \cdots + a_{i_1 \dots i_n} e_{i_1 \dots i_n} \end{aligned}$$

と書けます。同じローマ文字の添え字は和をとります。multivector は n 次元ベクトル空間内で作られているので添え字は $i = 1, 2, \dots, n$ 、第一項は 0-vector であるスカラーで、係数 $a_i, a_{ij}, \dots, a_{i_1 \dots i_n}$ もスカラーです。 $e_{i_1 \dots i_n}$ は添え字の入れ替えで反対称です。

これでクリフォード代数 $Cl(V_n)$ の次元が分かります。このときの基底は $a, e_i, e_{ij}, \dots, e_{i_1 \dots i_n}$ なので、それぞれの個数を足したものが $Cl(V_n)$ の次元です。それぞれの個数を数えるために、 r -ベクトルによるクリフォード代数を $Cl^{(r)}(V_n)$ と書くことにして ($Cl^{(r)}(V_n)$ は全ての r -ベクトルによる空間)、 $Cl(V_n)$ は $Cl^{(r)}(V_n)$ を合わせたものとしします。

$Cl^{(0)}(V_n)$ はスカラーなので、次元は 1 です。 $Cl^{(1)}(V_n) = V_n$ なので $Cl^{(1)}(V_n)$ の次元は n です。これは、 $r = 1$ での基底は e_i ($i = 1, \dots, n$) だからと言えます。 $Cl^{(2)}(V_n)$ は 2-ベクトルなので、 $r = 2$ での e_{ij} の個数から次元は $n(n-1)/2$ です (反対称なので $i = j$ とならない)。よって、同じように $e_{i_1 \dots i_n}$ の個数を数えれば、 $Cl^{(r)}(V_n)$ の次元は

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

で与えられることが分かります。これは、 $Cl^{(r)}(V_n)$ は r -ベクトルによる空間なので、線形独立な n 個のベクトルから重複なしで r 個取り出す場合の数と言えます。

$Cl(V_n)$ は $Cl^{(r)}(V_n)$ を合わせたものなので、 $r = 0$ から $r = n$ までの和を取ったものが次元になります。なので、 $Cl(V_n)$ の次元は二項係数 ${}_n C_r$ の和から

$$\sum_{r=0}^n {}_n C_r = 2^n$$

となります (2^n になることは例えばパスカルの三角形を使えばいい)。

ここから具体的な空間を使います。最初に、2次元ユークリッド空間 E_2 での $Cl(E_2)$ を見てみます。 E_2 の直交基底を e_1, e_2 とします。直交基底なので

$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = 0, \quad e_1^2 = e_2^2 = 1 \quad (e_1 \cdot e_1 = \frac{1}{2}(e_1 e_1 + e_1 e_1) = e_1 e_1 = e_1^2)$$

そして、 e_1, e_2 の内積が 0 なので

$$e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2, \quad e_2 e_1 = e_2 \wedge e_1 = -e_1 e_2$$

となります。

2次元ユークリッド空間なので、2-ベクトルまで作れます。なので、次元は、スカラー、ベクトル、2-ベクトルによる 4 ($2^2 = 4$) です。スカラーは 1 個、ベクトルは 2 次元なので 2 個 (e_1, e_2)、2-ベクトルは組み合わせの個数から 1 個 ($e_1 \wedge e_2$) です。これらが基底となります。

このとき $e_1 e_2$ の 2 乗を見てみると

$$(e_1 e_2)^2 = (e_1 e_2)(e_1 e_2) = -e_1 e_2 e_2 e_1 = -e_1 e_2^2 e_1 = -e_1^2 = -1$$

これから

$$j = e_1 e_2, \quad -j = e_2 e_1, \quad j^2 = (e_1 e_2) = -1$$

という j を定義できます。 e_1, e_2 の並びで符号が変わることに注意してください。 j との積を見てみると

$$j e_1 = e_1 e_2 e_1 = -e_2, \quad e_1 j = e_1 e_1 e_2 = e_2$$

$$j e_2 = e_1 e_2 e_2 = e_1, \quad e_2 j = e_2 e_1 e_2 = -e_1$$

また、内積でも

$$e_1 \cdot (e_1 \wedge e_2) = (e_1 \cdot e_1) e_2 - (e_1 \cdot e_2) e_1 = e_2$$

$$e_2 \cdot (e_1 \wedge e_2) = (e_2 \cdot e_1) e_2 - (e_2 \cdot e_2) e_1 = -e_1$$

となります。このように $j^2 = -1$ という虚数と同じ性質を持ったものが導入されます ($j^2 = -1$ なので、 j はスカラー)。しかし、 j は基底 e_1, e_2 と関係する量なので、幾何学的な意味を持っています ($e_1 e_2$ なので 2-vector と言える)。

次に 3 次元ユークリッド空間 E_3 とします。 E_3 の直交基底を e_i ($i = 1, 2, 3$) とします。直交しているので内積は

$$e_i \cdot e_j = \frac{1}{2}(e_i e_j + e_j e_i) = \delta_{ij}$$

このため、基底は外積によって

$$e_1 e_2 = e_1 \cdot e_2 + e_1 \wedge e_2 = e_1 \wedge e_2, \quad e_1 e_3 = e_1 \wedge e_3, \quad e_2 e_3 = e_2 \wedge e_3$$

となります。

3 次元ユークリッド空間からのクリフォード代数なので 3-ベクトルまでが作れ、直交性から 3-ベクトルは

$$e_1 e_2 e_3 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

と書けます。次元はスカラー、ベクトル、2-ベクトル、3-ベクトルによる8 ($2^3 = 8$) です。ベクトルは3次元なので3個 (e_i)、2-ベクトルは組み合わせから3個 ($e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1$)、3-ベクトルは1個 ($e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$) です。

基底の関係を見ます。 $e_1 e_2 e_3$ の2乗を見てみると

$$\begin{aligned} (e_1 e_2 e_3)^2 &= (e_1 e_2 e_3)(e_1 e_2 e_3) = (e_2 e_3 e_1)(e_1 e_2 e_3) = e_2 e_3 e_1^2 e_2 e_3 \\ &= e_1^2 e_2 e_3 e_2 e_3 \\ &= -e_1^2 e_3 e_2 e_2 e_3 \\ &= -e_1^2 e_2^2 e_3^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

となっているので、2次元と同じように

$$i' = e_1 e_2 e_3 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \quad i'^2 = -1$$

と書くことにします。 $e_1 e_2 e_3$ は入れ替えて符号が変わるので、 i' を $e_1 e_2 e_3$ で定義したことに注意してください。 i' は

$$e_1 i' = e_1 e_1 e_2 e_3 = e_1 e_2 e_3 e_1 = i' e_1, \quad e_2 i' = e_1 e_2 e_3 e_2 = i' e_2, \quad e_3 i' = e_1 e_2 e_3 e_3 = i' e_3$$

なので、 e_1, e_2, e_3 と交換します。また、 e_1, e_2, e_3 の符号を全て反転させたとき

$$e_1 e_2 e_3 = i' \Rightarrow e_1 e_2 e_3 = -i'$$

となることから、 $e_1 e_2 e_3$ は擬スカラーだと言えます。そうすると、3-ベクトルは擬スカラーになるので、 $Cl(E_3)$ に従う A は

$$A = A_S + A_V + A_b + A_P$$

と書けます。 S はスカラー、 V はベクトル、 b は2-ベクトル (bivector)、 P は擬スカラーです。

$e_i e_j$ の2乗も見えてみると

$$(e_2 e_3)^2 = e_2 e_3 e_2 e_3 = -1, \quad (e_3 e_1)^2 = -1, \quad (e_1 e_2)^2 = -1$$

となって -1 になっています。なので

$$i_1 = e_2 e_3, \quad i_2 = e_3 e_1, \quad i_3 = e_1 e_2$$

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$$

と出来ます。

$e_1 e_2 = e_1 \wedge e_2$ と i' の積を見てみると

$$i'(e_1 \wedge e_2) = i'e_1e_2 = e_1e_2e_3e_1e_2 = -e_3$$

となっていることが分かります。他の場合も同様で

$$i'e_3 \wedge e_1 = -e_2, \quad i'e_2 \wedge e_3 = -e_1$$

これから、2-ベクトルと i' の積はベクトルになることが分かります。逆に見れば、 i' とベクトルの積は 2-ベクトルになります。

2-ベクトルに i' をかけるベクトルになることから、新しく

$$a \times b = -i'(a \wedge b)$$

として「 $\times$ 」を定義します。 $a, b, a \times b$ はベクトルです。この定義から e_1, e_2, e_3 の間の関係は

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_3 \times e_1 = e_2, \quad e_2 \times e_3 = e_1$$

と書けます。通常のベクトルでの外積の関係を「 $\times$ 」は満たします。まず、 $a \times b$ を見てみると

$$a \times b = -i'(a \wedge b) = -i' \frac{1}{2}(ab - ba)$$

ここで、内積 $a \cdot (ib)$ を見てみると、 $i'b$ は 2-ベクトルなので

$$a \cdot (i'b) = \frac{1}{2}(ai'b - i'ba) = \frac{1}{2}(i'ab - i'ba) = i' \frac{1}{2}(ab - ba)$$

よって

$$a \times b = -i'(a \wedge b) = -a \cdot (i'b) = (i'b) \cdot a$$

という関係が分かります。これを使うと、 $a \times (b \times c)$ は

$$\begin{aligned} a \times (b \times c) &= -i'(a \wedge (b \times c)) = -i'(a \wedge (-i(b \wedge c))) \\ &= -i'(a \wedge v) \quad (v = -i'(b \wedge c)) \\ &= -a \cdot (i'v) \\ &= -a \cdot (b \wedge c) \\ &= -(a \cdot b)c + (a \cdot c)b \end{aligned}$$

となり、通常のベクトル計算でのベクトル 3 重積の形になります。このように 3 次元ユークリッド空間において「 $\wedge$ 」は通常のベクトルの計算での外積「 $\times$ 」と見なせます。

最後に 4 次元ミンコフスキー空間 M_4 として、 M_4 の基底を e_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) とします。ミンコフスキー空間なので、時間的、空間的での符号があり

$$e_0^2 = 1, \quad e_i^2 = -1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

とし、直交しているので

$$e_\mu \cdot e_\nu = 0 \quad (\mu \neq \nu)$$

ミンコフスキー空間の計量 $\eta_{\mu\nu} = (+1, -1, -1, -1)$ を使えば、まとめて

$$e_\mu \cdot e_\nu = \frac{1}{2}(e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu) = \eta_{\mu\nu}$$

と書けます。これから

$$e_\mu e_\nu = e_\mu \wedge e_\nu \quad (\mu \neq \nu)$$

となります。

次元はスカラー、ベクトル、2-ベクトル、3-ベクトル、4-ベクトルによる 16 ($2^4 = 16$) です。スカラーから 1 個、ベクトルは 4 次元なので 4 個 (e_μ)、2-ベクトルは組み合わせから 6 個

$$e_{\mu\nu} = e_\mu \wedge e_\nu \quad (e_0 \wedge e_1, e_0 \wedge e_2, e_0 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1)$$

3-ベクトルは組み合わせから 4 個

$$e_{\mu\nu\rho} = e_\mu \wedge e_\nu \wedge e_\rho \quad (e_0 \wedge e_1 \wedge e_2, e_0 \wedge e_1 \wedge e_3, e_0 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$$

4-ベクトルは 1 個

$$e_{0123} = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

となります。

この場合でも、 $e_0^2 = 1$, $e_i^2 = -1$ であることに注意すれば

$$(e_{0123})^2 = e_0 e_1 e_2 e_3 e_0 e_1 e_2 e_3 = -e_1 e_2 e_3 e_1 e_2 e_3 = -(e_1)^2 e_2 e_3 e_2 e_3 = e_2 e_3 e_2 e_3 = -1$$

となるので

$$e_{0123} = \bar{i}, \quad \bar{i}^2 = -1$$

と定義できます。 e_{0123} は e_μ とは

$$e_{0123} e_\mu = -e_\mu e_{0123}$$

として反交換します。そして、空間反転は e_1, e_2, e_3 の符号を反転させることなので e_{0123} は空間反転で $-e_{0123}$ になります。このため、 e_{0123} は擬スカラーです。これから $Cl(M_4)$ に従う A は

$$A = A_S + A_V + A_b + A_t + A_P$$

と書けます。 t は 3-ベクトル (trivector) です。

3 次元ユークリッド空間での場合と比較します。3 次元ユークリッド空間での基底を g_i と書くことにします。ミンコフスキー計量の空間部分は -1 なので、3 次元ベクトル空間での内積 $g_i \cdot g_j$ とは

$$g_i \cdot g_j = -e_i \cdot e_j$$

となっていると考えられます (ユークリッド空間の計量は $(+1, +1, +1)$)。そうすると

$$e_i e_0 = (e_i \wedge e_0) = g_i$$

と定義すれば

$$g_i \cdot g_j = (e_i \wedge e_0) \cdot (e_j \wedge e_0) = (e_0 \cdot e_j)(e_i \cdot e_0) - (e_i \cdot e_j)(e_0 \cdot e_0) = -(e_i \cdot e_j)$$

と出来ます。さらに

$$g_i \wedge g_j = (e_i \wedge e_0) \wedge (e_j \wedge e_0) = -e_i e_j = -e_{ij}$$

$$i' = g_1 \wedge g_2 \wedge g_3 = (e_1 \wedge e_0) \wedge (e_2 \wedge e_0) \wedge (e_3 \wedge e_0) = -e_1 e_0 e_2 e_3 = e_0 e_1 e_2 e_3 = e_{0123}$$

となります。このように、 $Cl(V_3)$ は $Cl(M_4)$ に含まれています (部分代数)。

3 次元ユークリッド空間での関係から、基底はパウリ行列の関係と同じになっていることが分かります。このため、 $Cl(E_3)$ での行列表現はパウリ行列で与えられます。実際に、パウリ行列 σ_i は

$$\frac{1}{2}(\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i) = \delta_{ij}$$

であり、

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i, \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3, \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1, \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2$$

となっています。 i は虚数です。よって、8 個の基底はパウリ行列の組み合わせによって

$$I_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1 \sigma_2, \sigma_3 \sigma_1, \sigma_2 \sigma_3, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

と書けます。 I_2 は 2×2 単位行列です。

$Cl(M_4)$ の行列表現はガンマ行列です。ガンマ行列 γ_μ は

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$$

で与えられています。 γ_5 は $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ と定義しますが、 i を外して定義したものを γ_{0123} とすれば、 $(\gamma^0)^2 = 1, (\gamma^i)^2 = -1$ に注意して

$$(\gamma_{0123})^2 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^2\gamma^3\gamma^2\gamma^3 = -1$$

となります。 γ_{0123} を 2 乗したら -1 になればいいので、 $\gamma_{0123} = iI_4$ とは言っていません (I_4 は 4×4 単位行列)。

$Cl(M_4)$ の次元は 16 で、それはガンマ行列の独立な組み合わせの個数に対応し、相対論的量子力学での「ガンマ行列 ~ 双線形 ~」で示した

$$I_4, \gamma_\mu, \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5$$

となります。 $\gamma_5 \gamma_\mu$ は

$$\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2, \gamma_0 \gamma_1 \gamma_3, \gamma_0 \gamma_2 \gamma_3, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$$

による 3-ベクトルです。

・補足

(1a) から求めます。まず、 $a \cdot A_r$ で $r = 2$ として、 $A_2 = a_1 \wedge a_2$ とすれば

$$\begin{aligned}
a \cdot A_2 &= \frac{1}{2}(aA_2 - A_2a) \\
&= \frac{1}{2}(a(a_1 \wedge a_2) - (a_1 \wedge a_2)a) \\
&= \frac{1}{4}(a(a_1a_2 - a_2a_1) - (a_1a_2 - a_2a_1)a) \\
&= \frac{1}{4}(aa_1a_2 - aa_2a_1 - a_1a_2a + a_2a_1a) \\
&= \frac{1}{4}(aa_1a_2 + a_1aa_2 - a_1aa_2 - aa_2a_1 - a_2aa_1 + a_2aa_1 - a_1a_2a + a_2a_1a) \\
&= \frac{1}{4}((aa_1 + a_1a)a_2 + a_2(aa_1 + a_1a) - (aa_2 + a_2a)a_1 - a_1(aa_2 + a_2a)) \\
&= \frac{1}{2}((a \cdot a_1)a_2 + a_2(a \cdot a_1) - (a \cdot a_2)a_1 - a_1(a \cdot a_2)) \\
&= (a \cdot a_1)a_2 - (a \cdot a_2)a_1
\end{aligned}$$

となり、(1a) が求まります。

$r = 3$ でも同様に行えば

$$\begin{aligned}
a \cdot A_3 &= \frac{1}{2}(aA_3 + A_3a) = \frac{1}{2}(a(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) + (a_1 \wedge a_2 \wedge a_3)a) \\
&= \frac{1}{2}(a(a_1 \wedge A_2) + (a_1 \wedge A_2)a) \\
&= \frac{1}{4}(a(a_1A_2 + A_2a_1) + (a_1A_2 + A_2a_1)a) \\
&= \frac{1}{8}(a(a_1(a_2a_3 - a_3a_2) + (a_2a_3 - a_3a_2)a_1) + (a_1(a_2a_3 - a_3a_2) + (a_2a_3 - a_3a_2)a_1)a) \\
&= \frac{1}{8}(aa_1(a_2a_3 - a_3a_2) + a(a_2a_3 - a_3a_2)a_1 + a_1(a_2a_3 - a_3a_2)a + (a_2a_3 - a_3a_2)a_1a) \\
&= \frac{1}{8}(aa_1a_2a_3 - aa_1a_3a_2 + aa_2a_3a_1 - aa_3a_2a_1 + a_1a_2a_3a - a_1a_3a_2a + a_2a_3a_1a - a_3a_2a_1a)
\end{aligned}$$

内積で書けるように項を加えていけば

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8}(aa_1a_2a_3 + a_1aa_2a_3 - a_1aa_2a_3 \\
& \quad - aa_1a_3a_2 - a_1aa_3a_2 + a_1aa_3a_2 \\
& \quad + aa_2a_3a_1 + a_2aa_3a_1 - a_2aa_3a_1 \\
& \quad - aa_3a_2a_1 - a_3aa_2a_1 + a_3aa_2a_1 \\
& \quad + a_1a_2a_3a + a_1a_2aa_3 - a_1a_2aa_3 \\
& \quad - a_1a_3a_2a - a_1a_3aa_2 + a_1a_3aa_2 \\
& \quad + a_2a_3a_1a + a_2a_3aa_1 - a_2a_3aa_1 \\
& \quad - a_3a_2a_1a - a_3a_2aa_1 + a_3a_2aa_1) \\
&= \frac{1}{4}((a \cdot a_1)a_2a_3 - \frac{1}{2}a_1aa_2a_3 - (a \cdot a_1)a_3a_2 + \frac{1}{2}a_1aa_3a_2 \\
& \quad + (a \cdot a_2)a_3a_1 - \frac{1}{2}a_2aa_3a_1 - (a \cdot a_3)a_2a_1 + \frac{1}{2}a_3aa_2a_1 \\
& \quad + a_1a_2(a_3 \cdot a) - \frac{1}{2}a_1a_2aa_3 - a_1a_3(a_2 \cdot a) + \frac{1}{2}a_1a_3aa_2 \\
& \quad + a_2a_3(a_1 \cdot a) - \frac{1}{2}a_2a_3aa_1 - a_3a_2(a_1 \cdot a) + \frac{1}{2}a_3a_2aa_1) \\
&= \frac{1}{4}(4(a \cdot a_1)(a_2 \wedge a_3) + 2(a \cdot a_2)(a_3 \wedge a_1) + 2(a \cdot a_3)(a_1 \wedge a_2) \\
& \quad - \frac{1}{2}a_1aa_2a_3 + \frac{1}{2}a_1aa_3a_2 - \frac{1}{2}a_2aa_3a_1 + \frac{1}{2}a_3aa_2a_1 \\
& \quad - \frac{1}{2}a_1a_2aa_3 + \frac{1}{2}a_1a_3aa_2 - \frac{1}{2}a_2a_3aa_1 + \frac{1}{2}a_3a_2aa_1)
\end{aligned}$$

内積と外積のない部分は

$$\begin{aligned}
& -a_1aa_2a_3 + a_1aa_3a_2 - a_2aa_3a_1 + a_3aa_2a_1 - a_1a_2aa_3 + a_1a_3aa_2 - a_2a_3aa_1 + a_3a_2aa_1 \\
&= -2a_1(a \cdot a_2)a_3 + 2a_1(a \cdot a_3)a_2 - 2a_2(a \cdot a_3)a_1 + a_3(a \cdot a_2)a_1 \\
&= -2(a \cdot a_2)a_1a_3 + 2(a \cdot a_3)a_1a_2 - 2(a \cdot a_3)a_2a_1 + 2(a \cdot a_2)a_3a_1 \\
&= 4(a \cdot a_3)(a_1 \wedge a_2) + 4(a \cdot a_2)(a_3 \wedge a_1)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
a \cdot A_3 &= a \cdot (a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) = \frac{1}{4}(4(a \cdot a_1)(a_2 \wedge a_3) + 2(a \cdot a_2)(a_3 \wedge a_1) + 2(a \cdot a_3)(a_1 \wedge a_2) \\
& \quad + 2(a \cdot a_3)(a_1 \wedge a_2) + 2(a \cdot a_2)(a_3 \wedge a_1)) \\
&= (a \cdot a_1)(a_2 \wedge a_3) + (a \cdot a_2)(a_3 \wedge a_1) + (a \cdot a_3)(a_1 \wedge a_2) \\
&= (a \cdot a_1)(a_2 \wedge a_3) - (a \cdot a_2)(a_1 \wedge a_3) + (a \cdot a_3)(a_1 \wedge a_2)
\end{aligned}$$

となります。

$r = 2, 3$ の両方は

$$a \cdot A_2 = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \cdots \wedge a_2) \quad (k-1 > 1, k+1 < 2)$$

$$a \cdot A_3 = \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \cdots \wedge a_3) \quad (k-1 > 1, k+1 < 3)$$

という形で書けます。よって、一般化すると

$$a \cdot A_r = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \cdots \wedge a_r) \quad (k-1 > 1, k+1 < r)$$

となり、(1b) になります。また、 $r = 2, 3$ の結果から直接分かるように、内積 $a \cdot A_r$ は r -ベクトルを $(r-1)$ -ベクトルにします。

さらに $r = 2$ での形を見てみると

$$a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b$$

$$b \cdot (c \wedge a) = (b \cdot c)a - (b \cdot a)c = (b \cdot c)a - (a \cdot b)c$$

$$c \cdot (a \wedge b) = (c \cdot a)b - (c \cdot b)a = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$$

から

$$a \cdot (b \wedge c) + b \cdot (c \wedge a) + c \cdot (a \wedge b) = 0$$

となっていることが分かり、(1c) が示せます。

(1d) は、内積の定義から

$$(a \wedge b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$-(a \wedge b) \cdot c = (b \wedge a) \cdot c = b \cdot (a \cdot c)$$

なので

$$(a \wedge b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = -b \cdot (a \cdot c)$$

と示せます。一般化すれば

$$(a \wedge b) \cdot C_r = (a \wedge b) \cdot (c_1 \wedge \cdots \wedge c_r) = a \cdot (b \cdot (c_1 \wedge \cdots \wedge c_r)) = a \cdot (b \cdot C_r)$$

$$-(a \wedge b) \cdot C_r = (b \wedge a) \cdot C_r = (b \wedge a) \cdot (c_1 \wedge \cdots \wedge c_r) = b \cdot (a \cdot (c_1 \wedge \cdots \wedge c_r)) = b \cdot (a \cdot C_r)$$

なので、

$$(a \wedge b) \cdot C_r = a \cdot (b \cdot C_r) = -b \cdot (a \cdot C_r)$$

となり、(1e) になります。
 (1f) は A_2, B_2 の内積なので

$$\begin{aligned} A_2 \cdot B_2 &= (a_1 \wedge a_2) \cdot (b_1 \wedge b_2) = a_1 \cdot (a_2 \cdot B_2) \\ &= a_1 \cdot ((a_2 \cdot b_1)b_2 - (a_2 \cdot b_2)b_1) \\ &= (a_2 \cdot b_1)(a_1 \cdot b_2) - (a_1 \cdot b_1)(a_2 \cdot b_2) \end{aligned}$$

となり、これを $A_2 \cdot A_2$ にすれば (1g) になるので

$$A_2 \cdot A_2 = (a_1 \cdot a_2)^2 - (a_1 \cdot a_1)(a_2 \cdot a_2)$$

となります。