共形変換

出会うときには思いっきり出会うが、出会わないときは全く出会わない共形変換 (conformal transformation) について見ていきます。弦理論や 2 次元の統計力学なんかで出てきて、それらで使われる共形変換に対して不変な理論のことを共形場理論 (conformal field theory) と言います。
場の理論への適用へは触れずに共形変換だけを見ていきます。

4 次元とせずに d 次元だとしてやっていきます。共形変換は、座標変換 $x \to x'$ での計量の変換

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{a\beta}(x)$$

において

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x)$$

という関係を満たすものを言います。つまり座標変換に対して計量がスケール因子 $\Lambda(x)$ によって変換されている場合です。計量の外から $\Lambda(x)$ がかかっているために、計量の形自体は変更されないので、2 つのベクトル間の角度を変えません。このため共形変換は等角写像と同じです。
ここでは $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ とし、$\eta_{\mu\nu}$ を d 次元ミンコフスキー空間の計量 $(+1, -1, -1, \ldots)$ だとします。なので考える変換は

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda(x)\eta_{\mu\nu}$$

となります。
この変換を満たす座標変換がなんなのかを調べます。そのために、無限小移動の変換 $x^\mu \ \to \ x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ を考えます。この変換によって計量は

$$\begin{aligned}\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} &= \eta_{\alpha\beta}(\delta^\alpha_\mu + \frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu})(\delta^\beta_\nu + \frac{\partial \epsilon^\beta}{\partial x^\nu})\\ &= \eta_{\mu\nu} + \eta_{\alpha\nu}\frac{\partial \epsilon^\alpha}{\partial x^\mu} + \eta_{\mu\beta}\frac{\partial \epsilon^\beta}{\partial x^\nu}\\ &= \eta_{\mu\nu} + \partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu \qquad (1)\end{aligned}$$

となるので、

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = \Lambda(x)\eta_{\mu\nu}$$

この形との比較から

$$\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu = A(x)\eta_{\mu\nu}$$

とすることができます。これは変形すると

$$\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu) = A(x)\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}$$
$$2\partial^\mu\epsilon_\mu = A(x)d$$

これを元の式に入れなおして $A(x)$ を消せば

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial^\alpha \epsilon_\alpha)\eta_{\mu\nu} \tag{2}$$

これによって (1) は

$$\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{2}{d}(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\nu}$$

となるので $\Lambda(x)$ は

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d}(\partial\cdot\epsilon)$$

次に ϵ_α がどうなっていればいいのか調べます。(2) に ∂_α を作用させると

$$\partial_\alpha\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\alpha\partial_\nu\epsilon_\mu = \frac{2}{d}\partial_\alpha(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\nu}$$

添え字を入れ替えると

$$\partial_\mu\partial_\alpha\epsilon_\nu + \partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\alpha = \frac{2}{d}\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\alpha\nu}\ ,\ \partial_\nu\partial_\mu\epsilon_\alpha + \partial_\nu\partial_\alpha\epsilon_\mu = \frac{2}{d}\partial_\nu(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\alpha}$$

この 3 つを組み合わせると

$$2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\alpha = \frac{2}{d}\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\alpha\nu} + \frac{2}{d}\partial_\nu(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\alpha} - \frac{2}{d}\partial_\alpha(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\nu} \tag{3}$$

という関係が出てきます。
今度は $\partial_\beta\partial^\nu$ を作用させると

$$\partial_\beta\partial^\nu(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu) = \frac{2}{d}\partial_\beta\partial^\nu(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\nu}$$

$$\partial_\beta\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon) + \Box\partial_\beta\epsilon_\mu = \frac{2}{d}\partial_\beta\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon) \tag{4}$$

β と ν の添え字を反転させた

$$\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon) + \Box\partial_\mu\epsilon_\beta = \frac{2}{d}\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)$$

これを加えると

$$(\partial_\beta\partial_\mu+\partial_\mu\partial_\beta)\partial^\nu\epsilon_\nu+\Box(\partial_\beta\epsilon_\mu+\partial_\mu\epsilon_\beta)=\frac{2}{d}(\partial_\beta\partial_\mu+\partial_\mu\partial_\beta)(\partial\cdot\epsilon)$$
$$2\partial_\mu\partial_\beta\partial^\nu\epsilon_\nu+\Box(\partial_\beta\epsilon_\mu+\partial_\mu\epsilon_\beta)=\frac{4}{d}\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)$$
$$2\partial_\mu\partial_\beta\partial^\nu\epsilon_\nu+\frac{2}{d}\Box(\partial^\alpha\epsilon_\alpha)\eta_{\mu\beta}=\frac{4}{d}\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)$$
$$2\eta^{\mu\beta}\partial_\mu\partial_\beta\partial^\nu\epsilon_\nu+\frac{2}{d}\Box(\partial^\alpha\epsilon_\alpha)\eta^{\mu\beta}\eta_{\mu\beta}=\frac{4}{d}\eta^{\mu\beta}\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)$$
$$2\Box(\partial\cdot\epsilon)+2\Box(\partial\cdot\epsilon)=\frac{4}{d}\Box(\partial\cdot\epsilon)$$
$$(d-1)\Box(\partial\cdot\epsilon)=0 \tag{5}$$

という ϵ_α に対する微分方程式が出てきます。これから $d=1$ のときは意味を持たないことが分かるので、$d=1$ は省きます (ϵ が任意になる)。

(4) に戻って今度は、β,μ を入れ替えて足すと

$$\partial_\beta\partial_\mu\partial^\nu\epsilon_\nu+\partial_\mu\partial_\beta\partial^\nu\epsilon_\nu+\Box\partial_\beta\epsilon_\mu+\Box\partial_\mu\epsilon_\beta=\frac{2}{d}\partial_\beta\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon)+\frac{2}{d}\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)$$
$$2\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)+\Box(\partial_\beta\epsilon_\mu+\partial_\mu\epsilon_\beta)=\frac{4}{d}\partial_\beta\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon)$$

これに (2) を使うと

$$2\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)+\frac{2}{d}\Box(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\beta}=\frac{4}{d}\partial_\beta\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon)$$

さらに (5) を使うことで

$$(1-\frac{2}{d})\partial_\mu\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)=0 \tag{6}$$

これは $d>2$ のときに条件を与えます。というわけで、(2)〜(6) によって、ϵ_μ を与えられます。

2 次元が特殊なので後に回して、$d\geq 3$ を考えます。(6) では、ϵ_α に 3 個の x^μ 微分がかかっているので、最大で x^μ は 3 個までだと考えれます。しかし、単純に考えれば、3 回の微分で 0 になるなら、ϵ_α は 2 個までしか x^μ を含んでいないと言えます。実際に、(6) から

$$\partial_\alpha\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)=0\ \Rightarrow\ (\partial\cdot\epsilon)=A+B_\mu x^\mu$$

となり (A,B_μ は定数)、これを (3) の右辺に入れることで、$\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\alpha$ は定数であることが分かります。よって、$d\geq 3$ で考えられる ϵ_μ の形は

$$\epsilon_\mu=a_\mu+b_{\mu\nu}x^\nu+c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho \tag{7}$$

このようになり、$a_\mu,b_{\mu\nu},c_{\mu\nu\rho}$ は微小な定数です。x^μ の入れ替えで第三項の符号が変わらなくするために、$c_{\mu\nu\rho}$ は $c_{\mu\nu\rho}=c_{\mu\rho\nu}$ とします。

x^μ を 3 つ含んでいる項も見ておきます。x^μ を 3 つ含んでいる項を微分して出てくる係数を $f_{\mu\nu\alpha\beta}$ として

$$\partial_\mu\partial_\nu\partial_\alpha\epsilon_\beta=f_{\mu\nu\alpha\beta}$$

と与えます。これは前 3 つの添え字の入れ替えで対称です。これとは別に (2) に $\partial_\alpha\partial_\beta$ をかけて、(6) を使うと

$$
\begin{aligned}
\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\alpha\partial_\beta\partial_\nu\epsilon_\mu &= \frac{2}{d}\partial_\alpha\partial_\beta(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\nu} \\
\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\alpha\partial_\beta\partial_\nu\epsilon_\mu &= 0 \\
\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\mu\epsilon_\nu &= -\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\nu\epsilon_\mu \\
f_{\alpha\beta\mu\nu} &= -f_{\alpha\beta\nu\mu}
\end{aligned}
$$

なので、後ろの二つの添え字に対して反対称です。そうすると、添え字の入れ替えによって

$$
f_{\mu\nu\alpha\beta} = f_{\mu\alpha\nu\beta} = -f_{\mu\alpha\beta\nu} = -f_{\mu\beta\alpha\nu} = f_{\mu\beta\nu\alpha} = f_{\mu\nu\beta\alpha} = -f_{\mu\nu\alpha\beta}
$$

となり、$f_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ となります。よって、$d \geq 3$ では 2 次の項までとなります。

(7) での一番単純なものは $b_{\mu\nu} = c_{\mu\nu\rho} = 0$ での $a_\mu = \epsilon_\mu$ です。このときの座標変換は

$$
x^\mu \ \Rightarrow \ x^\mu + a_\mu
$$

となって、ただの並進の変換になります。$b_{\mu\nu}$ が 0 でないときは、(2) から

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu(a_\nu + b_{\nu\alpha}x^\alpha) + \partial_\nu(a_\mu + b_{\mu\alpha}x^\alpha) &= \frac{2}{d}\partial^\alpha(a_\alpha + b_{\alpha\beta}x^\beta)\eta_{\mu\nu} \\
b_{\nu\alpha}\partial_\mu x^\alpha + b_{\mu\alpha}\partial_\nu x^\alpha &= \frac{2}{d}b_{\alpha\beta}\partial^\alpha x^\beta\eta_{\mu\nu} \\
b_{\nu\alpha}\delta^\alpha_\mu x^\alpha + b_{\mu\alpha}\delta^\alpha_\nu &= \frac{2}{d}b_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} \\
b_{\nu\mu} + b_{\mu\nu} &= \frac{2}{d}b_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

右辺がミンコフスキー計量がいるために $\mu \neq \nu$ で 0 になることを踏まえれば、$b_{\mu\nu}$ は一般的には対称な成分と反対称な成分を持っていると予想できます。なぜなら、反対称な項は $b_{\nu\mu} + b_{\mu\nu}$ で消えてくれるからです。$b_{\mu\nu}$ を対称な項 $l_{\mu\nu} = l_{\nu\mu}$ と反対称な項 $m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$ に分けて

$$
b_{\mu\nu} = l_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}
$$

と書いて、入れてみれば

$$
\begin{aligned}
l_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} + l_{\nu\mu} + m_{\nu\mu} &= \frac{2}{d}(l_{\alpha\beta} + m_{\alpha\beta})\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu} \\
2l_{\mu\nu} &= \frac{2}{d}l_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

なので

$$
l_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}
$$

これの定数倍でもいいでの

$$l_{\mu\nu} = a\eta_{\mu\nu}$$

よって $b_{\mu\nu}$ は

$$b_{\mu\nu} = a\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}$$

そうすると座標変換は

$$x^\mu \ \Rightarrow\ x^\mu + ax^\mu + m^\mu{}_\nu x^\nu$$

となります。第二項だけを見れば

$$x^\mu \ \Rightarrow\ x^\mu + ax^\mu = (1+a)x^\mu$$

となっていて、これはスケール変換です。第三項だけでは

$$x^\mu \ \Rightarrow\ x^\mu + m^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + m^\mu{}_\nu)x^\nu$$

となります。これはローレンツ変換の形をしているので、回転変換と言う事が出来ます。
　次に $c_{\mu\nu\rho}$ が 0 でない場合です。(2) では微分が 1 個しかないので、2 個微分がある式に書き換えて使います。(2) を微分すれば

$$\partial_\beta\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\beta\partial_\nu\epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial_\beta\partial^\alpha\epsilon_\alpha)\eta_{\mu\nu} \tag{8}$$

これの左辺に入れてみると

$$\partial_\beta\partial_\mu\epsilon_\nu = \partial_\beta\partial_\mu(c_{\nu\rho\sigma}x^\rho x^\sigma) = c_{\nu\rho\sigma}\delta^\rho_\mu\delta^\sigma_\beta + c_{\nu\rho\sigma}\delta^\rho_\beta\delta^\sigma_\mu = 2c_{\nu\mu\beta}$$

$$\partial_\beta\partial_\nu\epsilon_\mu = 2c_{\mu\nu\beta}$$

となるために、添え字の違う $c_{\mu\nu\beta}$ が出てきてしまいます。これをどうにかします。このような添え字のつき方が異なっているものを消すときには、添え字のつき方を動かしたものを用意して足したり引いたりすればいいです。なので、(8) の添え字のつき方を変えた

$$\partial_\nu\partial_\beta\epsilon_\mu + \partial_\mu\partial_\beta\epsilon_\nu = \frac{2}{d}(\partial_\nu\partial^\alpha\epsilon_\alpha)\eta_{\beta\mu}$$

$$\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\beta + \partial_\nu\partial_\mu\epsilon_\beta = \frac{2}{d}(\partial_\mu\partial^\alpha\epsilon_\alpha)\eta_{\nu\beta}$$

こんなのを用意します。この二つを足すと

$$\partial_\nu\partial_\beta\epsilon_\mu + \partial_\mu\partial_\beta\epsilon_\nu + 2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\beta = \frac{2}{d}[(\partial_\nu\partial^\alpha\epsilon_\alpha)\eta_{\beta\mu} + (\partial_\mu\partial^\alpha\epsilon_\alpha)\eta_{\nu\beta}]$$

これを (8) から引けば

$$2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\beta = -\frac{2}{d}[\eta_{\mu\nu}\partial_\beta - \eta_{\beta\mu}\partial_\nu - \eta_{\nu\beta}\partial_\mu](\partial\cdot\epsilon)$$

となるので、左辺に添え字の位置が入れ替わった $c_{\mu\nu\beta}$ は出てこなくなります。右辺は

$$\begin{aligned}
\partial\cdot\epsilon &= \partial^\alpha(b_{\alpha\beta}x^\beta + c_{\alpha\mu\nu}x^\mu x^\nu) \\
&= b^\alpha{}_\alpha + c_{\alpha\mu\nu}\eta^{\mu\rho}\delta^\alpha_\rho x^\nu + c_{\alpha\mu\nu}\eta^{\nu\rho}\delta^\alpha_\rho x^\mu \\
&= b^\alpha{}_\alpha + c^\mu{}_{\mu\nu}x^\nu + c^\nu{}_{\mu\nu}x^\mu \\
&= b^\alpha{}_\alpha + 2c^\alpha{}_{\alpha\rho}x^\rho
\end{aligned}$$

から

$$[\eta_{\mu\nu}\partial_\beta - \eta_{\beta\mu}\partial_\nu - \eta_{\nu\beta}\partial_\mu](\partial\cdot\epsilon) = 2\eta_{\mu\nu}c^\alpha{}_{\alpha\beta} - 2\eta_{\beta\mu}c^\alpha{}_{\alpha\nu} - 2\eta_{\nu\beta}c^\alpha{}_{\alpha\mu}$$

となるので、$c_{\mu\nu\beta}$ は

$$\begin{aligned}
4c_{\beta\nu\mu} =& -\frac{2}{d}(2\eta_{\mu\nu}c^\alpha{}_{\alpha\beta} - 2\eta_{\beta\mu}c^\alpha{}_{\alpha\nu} - 2\eta_{\nu\beta}c^\alpha{}_{\alpha\mu}) \\
c_{\beta\nu\mu} =& -(\eta_{\mu\nu}b_\beta - \eta_{\beta\mu}b_\nu - \eta_{\nu\beta}b_\mu) \quad (b_\mu = \frac{1}{d}c^\alpha{}_{\alpha\mu})
\end{aligned}$$

となります。これによって

$$\begin{aligned}
c^\mu{}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta =& -(\eta_{\alpha\beta}b^\mu - \eta^\mu{}_\alpha b_\beta - \eta^\mu{}_\beta b_\alpha)x^\alpha x^\beta \\
=& -\big(b^\mu(x^\alpha x_\alpha) - (b_\alpha x^\alpha)x^\mu - (b_\alpha x^\alpha)x^\mu\big) \\
=& -(b^\mu x^2 - 2(b\cdot x)x^\mu)
\end{aligned}$$

というわけで、$c_{\mu\nu\beta}$ の項だけの座標変換は

$$x^\mu \ \Rightarrow\ x^\mu + c^\mu{}_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = x^\mu + 2(b\cdot x)x^\mu - x^2 b^\mu$$

この変換のことを特殊共形変換 (special conformal transformation) と呼びます。b_μ は微小な定数ベクトルとみなせます。

まとめると、$a^\mu, m^\mu{}_\nu, \alpha, b^\mu$ を無限小として

- 並進変換

$$x^\mu \ \Rightarrow\ x'^\mu = x^\mu + a^\mu$$

- 回転変換

$$x^\mu \ \Rightarrow\ x'^\mu = (\delta^\mu{}_\nu + m^\mu{}_\nu)x^\nu$$

- スケール変換

$$x^\mu \ \Rightarrow \ x'^\mu = \alpha x^\nu$$

- 特殊共形変換

$$x^\mu \ \Rightarrow \ x'^\mu = x^\mu + 2(b\cdot x)x^\mu - b^\mu x^2$$

上の 3 つはよく見る変換なんですが、特殊共形変換は特殊な形をしています。これらの変換を見てみれば分かるように共形変換はポアンカレ変換の拡張になっています。
　これらの変換の生成子 G を「生成子・ポアンカレ群」の後半で触れた

$$x'^\mu = x^\mu + \alpha A^\mu(x)$$
$$\phi'(x') = \phi(x) + \alpha B(\phi, x)$$
$$G\phi(x) = -\alpha A^\mu(x)\partial_\mu\phi(x) + \alpha B(\phi, x)$$

から求めてみます。ここでは $B=0$ だとして、場は変換しないとします。スケール変換では

$$x'^\mu = \alpha x^\mu = x^\mu + \alpha' x^\mu$$

なので

$$G\phi(x) = -\alpha' x^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

となることから

$$G = -\alpha' x^\nu \partial_\mu$$

並進変換やローレンツ変換では、これに i をかけて、微小量 α' を外したものを生成子として定義するので

$$D = -ix^\mu\partial_\mu$$

これがスケール変換の生成子です。
　特殊共形変換では

$$x'^\mu = x^\mu + 2(b\cdot x)x^\mu - b^\mu x^2$$

から

$$\begin{aligned}
G\phi(x) =& -(2(b\cdot x)x^\mu - b^\mu x^2)\partial_\mu\phi(x)\\
=& -(2b_\nu x^\nu x^\mu\partial_\mu - b^\mu x^2\partial_\mu)\phi(x)\\
=& -(2g_{\alpha\nu}b^\alpha x^\nu x^\mu\partial_\mu - b^\alpha x^2\partial_\alpha)\phi(x)\\
=& -b^\alpha(2x_\alpha x^\mu\partial_\mu - x^2\partial_\alpha)\phi(x)
\end{aligned}$$

なので

$$G = -b^\alpha(2x_\alpha x^\mu \partial_\mu - x^2\partial_\alpha)$$

そして、i をかけて、b^α を外して

$$K_\alpha = -i(2x_\alpha x^\mu \partial_\mu - x^2\partial_\alpha)$$

これが特殊共形変換の生成子になります。
並進とローレンツ変換の生成子は「生成子・ポアンカレ群」で求めているので、まとめれば (場は変化しないとして)

- 並進変換

$$P_\mu = -i\partial_\mu$$

- 回転変換

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$$

- スケール変換

$$D = -ix^\mu\partial_\mu$$

- 特殊共形変換

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2\partial_\mu)$$

これらの無限小変換は有限変換に書き換えられます。上 3 つはよく見るものなので、有限変換がどうなっているのかはすぐに分かりますが、特殊共形変換は変な格好をしているのでどうなるのかよく分かりません。なので、特殊共形変換がどんな変換になっているのか見ます。
x'^μ の反転 x'^μ/x'^2 $(x'_\mu x'^\mu/x'^2 = 1)$ を b^μ の 1 次まででで計算してみると

$$\begin{aligned}
\frac{x'^\mu}{x'^2} &= \frac{x^\mu + 2(b\cdot x)x^\mu - b^\mu x^2}{(x^\mu + 2(b\cdot x)x^\mu - b^\mu x^2)^2} \\
&\simeq \frac{x^\mu + 2(b\cdot x)x^\mu - b^\mu x^2}{x^2 + 2(b\cdot x)x^2} \\
&= \frac{x^\mu(1+2(b\cdot x)) - b^\mu x^2}{x^2(1+2(b\cdot x))} \\
&= \frac{x^\mu}{x^2} - \frac{b^\mu}{1+2(b\cdot x)} \\
&\simeq \frac{x^\mu}{x^2} - b^\mu
\end{aligned} \tag{9}$$

このことから、特殊共形変換は、x^μ を反転させたもの (x^μ/x^2) を b^μ だけ並進させることに対応しているのが分かります (x'^μ は、x^μ を反転させ $-b^\mu$ 並進させた先で反転させたもの)。反転は非連続変換で、並進は連続変換であることを考えれば、有限変換でも同じように成り立っているはずです。なので、有限変換においても

$$\frac{x'^\mu}{x'^2}=\frac{x^\mu}{x^2}-b^\mu$$

となります (記号を変えていませんが、こっちの b^μ は微小量じゃないです)。これの x^μ の変換がどうなっているのかは、これを反転させれば分かって

$$\begin{aligned}\frac{x'^\mu}{x'^2}=\frac{1}{x^2}(x^\mu-b^\mu x^2)\ \Rightarrow\ x'^\mu&=x^2\frac{x^\mu-b^\mu x^2}{(x^\mu-b^\mu x^2)^2}\\&=x^2\frac{x^\mu-b^\mu x^2}{x^2-2(b\cdot x)x^2+b^2x^4}\\&=\frac{x^\mu-b^\mu x^2}{1-2(b\cdot x)+b^2x^2}\end{aligned}$$

よって、有限変換の場合では

- 並進変換

$$x^\mu\ \Rightarrow\ x'^\mu=x^\mu+a^\mu$$

- 回転変換

$$x^\mu\ \Rightarrow\ x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

- スケール変換

$$x^\mu\ \Rightarrow\ x'^\mu=\alpha x^\nu$$

- 特殊共形変換

$$x^\mu\ \Rightarrow\ x'^\mu=\frac{x^\mu-b^\mu x^2}{1-2(b\cdot x)+b^2x^2}$$

ここでの $a,\Lambda^\mu{}_\nu,\alpha,b^\mu$ は微小量じゃないです。並進変換とスケール変換では、無限小の変換を繰り返していけばこうなることはすぐに分かります。回転変換はローレンツ変換と同じなので、有限のローレンツ変換になります。

次に 2 次元での場合をみていきます。2 次元では (2) から変換の形を決められます。計量は δ_{ij} $(i.j=1,2)$ とします。添え字の上付き、下付きの区別がなくなるので、揃えて書きます。そうすると (2) での 2 次元版は

$$\partial_i\epsilon_j+\partial_j\epsilon_i=(\partial_k\epsilon_k)\delta_{ij}$$

$$\partial_i\epsilon_j+\partial_j\epsilon_i=(\partial_1\epsilon_1+\partial_2\epsilon_2)\delta_{ij}$$

この式は $i=j=1$、もしくは $i=j=2$ のとき

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2$$

となり、$i \neq j$ では

$$\partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1$$

となります。これらが複素数で出てくるコーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の方程式と同じ格好をしているので、複素数の形を導入しようというのが 2 次元での特徴です。なので

$$z = x_1 + ix_2$$

という複素数 z を作ります。x_1 と x_2 は

$$x_1 = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \ , \ x_2 = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

$\overline{z}$ は z の複素共役です。z 微分は

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z = \frac{\partial x_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2) \\
&\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)
\end{aligned}$$

座標を z と $\overline{z}$ に変換するには

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = (dx_1 + idx_2)(dx_1 - idx_2)$$

からすぐに

$$ds^2 = dzd\overline{z}$$

となっていることが分かり、このときの計量は

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

となります (a, b は z と $\overline{z}$ に対応します)。
　z を $f(z)$ ($\overline{z}$ を $\overline{f}(\overline{z})$) に変換すると

$$ds^2 \ \Rightarrow \ ds^2 = |\frac{\partial f}{\partial z}|^2 dzd\overline{z}$$

$f(z)$ は z を座標変換させたものなので

$$f(z) = z + \epsilon(z) \quad (\epsilon(z) = \epsilon_1 + i\epsilon_2)$$

という形だと考えられます。$\epsilon(z)$ はコーシー・リーマンの方程式に従っていることから正則関数 (holomorphic function) です (ベキ級数展開が出来る)。なので、$f(z)$ も正則関数です。また、正則関数であるために

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

でなければいけないので、$f(z)$ と言うことも出来ます。$\overline{f}$ に対しては

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = 0$$

なので、$\overline{f}(\overline{z})$ となり、反正則関数 (anti-holomorphic function) と呼ばれます。ちなみに、複素数での話なので、正則関数と解析関数は同じ意味です。

つまり、2 次元での共形変換は全ての正則関数によって作られています。このため無限個のパラメータが存在することになるので、2 次元での共形変換は無限個あることになります。これが 2 次元での特徴で、2 次元の共形変換は $d \geq 3$ のときと違い、無限個の変換を持っています。

一般的な変換の形としては $z = 0$ 周りでローラン展開した

$$z' = z + \sum_n \epsilon_n(-z^{n+1}) \ , \ \overline{z}' = \overline{z} + \sum_n \overline{\epsilon}_n(-\overline{z}^{n+1})$$

このようなものが考えられます。n は整数全部なので、無限個のパラメータがあります。このときの生成子は素直に求められて

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z \ , \ \bar{l}_n = -\overline{z}^{n+1}\partial_{\overline{z}}$$

と定義され、無限個あります。この交換関係は

$$\begin{aligned}
[l_m, l_n] &= z^{m+1}\partial_z(z^{n+1}\partial_z) - z^{n+1}\partial_z(z^{m+1}\partial_z) \\
&= (n+1)z^{n+m+1}\partial_z - (m+1)z^{n+m+1}\partial_z \\
&= (n-m)z^{n+m+1}\partial_z \\
&= (m-n)l_{n+m}
\end{aligned}$$

$\bar{l}_n$ でも同様で

$$[\bar{l}_m, \bar{l}_n] = (m-n)\bar{l}_{n+m}$$

l_n と $\bar{l}_n$ では

$$[l_m, \bar{l}_n] = z^{n+1}\partial_z(\overline{z}^{n+1}\partial_{\overline{z}}) - \overline{z}^{n+1}\partial_{\overline{z}}(z^{n+1}\partial_z) = 0$$

となっています。この交換関係によるものを Witt 代数と呼んだりします。