

C, P, T 変換

荷電共役、空間反転、時間反転について見ていきます。最初にスカラー場を見て、その後にディラック場に行きます。

最後についでの話として arXiv:1110.4171 の前半を参考にしたタキオンに対する C, P, T 変換を簡単に扱っています。

場の演算子に対する荷電共役、空間反転、時間反転を作っていきます。まずは、スカラー場での空間反転から見ていきます。空間反転はパリティ (parity) 変換とも呼ばれ、頭文字を取って P 変換と呼ばれます。空間反転は3次元座標を反転させるので

$$x = (t, \mathbf{x}) \Rightarrow x' = (t, -\mathbf{x})$$

という変換です。クライン・ゴルドン方程式は

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 - m^2)\phi(x) = 0$$

なので、 x を $-x$ にしても方程式の形は変わりません。このため、空間反転で不変で、 $\phi(t, -\mathbf{x})$ も解です。よって、変換後の場 ϕ' も解なので ϕ に適当な位相因子 η_P がつくとして、空間反転の変換 Λ_P は

$$\Lambda_P \phi(t, \mathbf{x}) = \phi'(t, \mathbf{x}') = \eta_P \phi(t, -\mathbf{x})$$

となります。同じことをもう一度行えばもとに戻ることから

$$\eta_P \phi(t, -\mathbf{x}) \Rightarrow \eta_P^2 \phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x})$$

となり、 $\eta_P = \pm 1$ です。 $\eta_P = +1$ ではスカラー、 $\eta_P = -1$ では擬スカラーと呼ばれます。

場が演算子のときでは演算子の変換になるので、両側から変換の演算子が作用します。空間反転の演算子を $\hat{P}$ とすると

$$\hat{P} \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) \hat{P}^{-1} = \eta_P \hat{\phi}(t, -\mathbf{x}), \quad \hat{P} \hat{\phi}^\dagger(t, \mathbf{x}) \hat{P}^{-1} = \eta_P^* \hat{\phi}^\dagger(t, -\mathbf{x})$$

η_P^* は演算子 (行列) ではないので、ただの複素共役にしています。場の演算子は生成、消滅演算子で展開すると

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx})$$

規格化は無関係なので無視しています。これを変換すると

$$\hat{P} \hat{\phi}(x) \hat{P}^{-1} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (\hat{P} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{P}^{-1} e^{-ipx} + \hat{P} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{P}^{-1} e^{ipx}) = \eta_P \hat{\phi}(x)$$

なので

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\hat{P} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{P}^{-1} e^{-ipx} + \hat{P} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{P}^{-1} u_{\mathbf{p}}^*(x)) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\eta_P \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip_0 x_0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \eta_P \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip_0 x_0} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}(t, -\mathbf{x})) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\eta_P \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{-ip_0 x_0} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + \eta_P \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip_0 x_0} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\eta_P \hat{a}_{-\mathbf{p}} e^{-ip_0 x_0} + \eta_P \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx})
\end{aligned}$$

最後の行で p を $-p$ にしています (運動量全体の積分なので置き換えられる)。よって、生成、消滅演算子に対しては

$$\hat{P} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{P}^{-1} = \eta_P \hat{a}_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{P} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{P}^{-1} = \eta_P \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger$$

$$\hat{P} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{P}^{-1} = \eta_P^* \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger, \quad \hat{P} \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{P}^{-1} = \eta_P^* \hat{b}_{-\mathbf{p}}$$

という変換になって、生成、消滅される粒子状態の 3 次元運動量が反転します。空間が反転するので、3 次元運動量の符号が反転するという分かりやすい結果です。

ハミルトニアン演算子は $aa^\dagger + b^\dagger b$ なので

$$\begin{aligned}
& \int d^3p (\hat{P} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{P}^{-1} + \hat{P} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{P}^{-1}) \\
&= \int d^3p (\hat{P} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{P}^{-1} \hat{P} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{P}^{-1} + \hat{P} \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{P}^{-1} \hat{P} \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{P}^{-1}) \\
&= \eta_P^2 \int d^3p (\hat{a}_{-\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger + \hat{b}_{-\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{p}}) \\
&= \int d^3p (\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger + \hat{b}_{\mathbf{p}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{p}})
\end{aligned}$$

よって、ハミルトニアンは空間反転に対して不変です。3 次元全運動量演算子 $\hat{P}$ ではハミルトニアン演算子と違い運動量 p が外にいるので空間反転で符号が変わります。3 次元全角運動量演算子 $\hat{L}$ では運動量が 2 ついるので変わりません。よって、まとめると

$$\hat{P} \hat{H} \hat{P}^{-1} = \hat{H}, \quad \hat{P} \hat{P} \hat{P}^{-1} = -\hat{P}, \quad \hat{P} \hat{L} \hat{P}^{-1} = \hat{L}$$

となっています。

時間反転に移ります。時間反転は T 変換とも呼ばれます。時間反転はその名前の通り

$$t, \mathbf{x} \Rightarrow -t, \mathbf{x}$$

この変換でクライン・ゴールドン方程式は不変です。空間反転での 3 次元座標が時間に変わっただけなので、場の演算子の変換は、時間反転の変換を $\hat{T}$ とすれば

$$\hat{T}\hat{\phi}(t, \boldsymbol{x})\hat{T}^{-1} = \eta_T\hat{\phi}(-t, \boldsymbol{x})$$

しかし、この変換には面倒な性質があります。それを見るために、時間発展を持ち出します。状態 $|\phi\rangle$ のシュレーディンガー方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle = \hat{H}|\phi\rangle$$

時間依存していない $\hat{H}$ と $\hat{T}$ は交換するとして、これの時間反転を行えば、時間反転した状態 $\hat{T}|\phi\rangle$ に対して

$$\begin{aligned}\hat{T}(i\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle) &= \hat{T}\hat{H}|\phi\rangle \\ i\frac{\partial}{\partial t}(\hat{T}|\phi\rangle) &= \hat{H}(\hat{T}|\phi\rangle)\end{aligned}$$

なので、時間反転で式が変わります。しかし、時間反転で物理が変わらないとするなら、 $\hat{T}$ の作用の仕方が間違っています。というわけで、式が変わらないように

$$\hat{T}i = -i\hat{T} \tag{1}$$

を要求します。これによって

$$\begin{aligned}\hat{T}(i\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle) &= \hat{T}\hat{H}|\phi\rangle \\ -i\hat{T}(\frac{\partial}{\partial t}|\phi\rangle) &= \hat{T}\hat{H}|\phi\rangle \\ i\frac{\partial}{\partial t}(\hat{T}|\phi\rangle) &= \hat{H}\hat{T}|\phi\rangle\end{aligned}$$

となり、時間反転後で式が同じになります。

(1) の性質を持つのを反ユニタリー演算子と言います。より細かくは、演算子と c 数を入れ替えたら、 c 数の複素共役を取るという性質です (反ユニタリー演算子は下の補足にまとめています)。時間反転の変換 $\hat{T}$ は反ユニタリー演算子とします。

場の演算子の変換から、生成、消滅演算子に対しては、反ユニタリー性によって

$$\hat{T} \int d^3p (\hat{a}_{\boldsymbol{p}} u_{\boldsymbol{p}}(x) + \hat{b}_{\boldsymbol{p}}^* u_{\boldsymbol{p}}^*(x)) \hat{T}^{-1} = \int d^3p (\hat{T} \hat{a}_{\boldsymbol{p}} \hat{T}^{-1} u_{\boldsymbol{p}}^*(x) + \hat{T} \hat{b}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger} \hat{T}^{-1} u_{\boldsymbol{p}}(x))$$

となることと、 $u_{-\boldsymbol{p}}^*(t, \boldsymbol{x}) = u_{\boldsymbol{p}}(-t, \boldsymbol{x})$ から

$$\hat{T} \hat{a}_{\boldsymbol{p}} \hat{T}^{-1} = \eta_T \hat{a}_{-\boldsymbol{p}} \ , \ \hat{T} \hat{b}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger} \hat{T}^{-1} = \eta_T \hat{b}_{-\boldsymbol{p}}^{\dagger}$$

$$\hat{T} \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{\dagger} \hat{T}^{-1} = \eta_T^* \hat{a}_{-\boldsymbol{p}}^{\dagger} \ , \ \hat{T} \hat{b}_{\boldsymbol{p}} \hat{T}^{-1} = \eta_T^* \hat{b}_{-\boldsymbol{p}}$$

これは空間反転と同じ形です。時間を反転させれば3次元運動量が反転するのも分かりやすい結果です。ハミルトニアン演算子、全運動量演算子、全角運動量演算子に対しては

$$\hat{T}\hat{H}\hat{T}^{-1} = \hat{H}, \quad \hat{T}\hat{P}\hat{T}^{-1} = -\hat{P}, \quad \hat{T}\hat{L}\hat{T}^{-1} = -\hat{L}$$

ハミルトニアン演算子、全運動量演算子に対しては空間反転と同じですが、角運動量演算子では複素共役を取るために符号が反転します。これは時間が反転するなら回転方向も反転するというだけです。

荷電共役 (charge conjugation) は粒子と反粒子を入れ替える変換です (粒子、反粒子の電荷を反転させる変換)。これは C 変換と呼ばれます。粒子と反粒子の変換なので、生成、消滅演算子の変換から定義します。粒子を反粒子にするので、 $\hat{a}_p, \hat{b}_p$ を $\hat{b}_p, \hat{a}_p$ に変換するとして

$$\hat{C}\hat{a}_p\hat{C}^{-1} = \eta_C\hat{b}_p, \quad \hat{C}\hat{b}_p\hat{C}^{-1} = \eta_C^*\hat{a}_p$$

$$\hat{C}\hat{a}_p^\dagger\hat{C}^{-1} = \eta_C^*\hat{b}_p^\dagger, \quad \hat{C}\hat{b}_p^\dagger\hat{C}^{-1} = \eta_C\hat{a}_p^\dagger$$

$\hat{C}$ が荷電共役の演算子です。 $\hat{a}_p, \hat{b}_p$ の変換のエルミート共役で $\hat{a}_p^\dagger, \hat{b}_p^\dagger$ の変換にするために、ユニタリー演算子です。生成、消滅演算子の変換から場の演算子では

$$\hat{C}\hat{\phi}(x)\hat{C}^{-1} = \eta_C\hat{\phi}^\dagger(x), \quad \hat{C}\hat{\phi}^\dagger(x)\hat{C}^{-1} = \eta_C^*\hat{\phi}(x)$$

電荷が変わっても、4元全運動量演算子や3次元全角運動量が変わらないので

$$\hat{C}\hat{P}_\mu\hat{C}^{-1} = \hat{P}_\mu, \quad \hat{C}\hat{L}\hat{C}^{-1} = \hat{L}$$

となります。

荷電共役、空間反転、時間反転は場の量子論の理論構造において重要な対称性です (気にしない限りほとんど出てきませんが)。荷電共役と空間反転を行う CP 変換は弱い相互作用での重要な変換です。また、 C, P, T を全部行う変換に対して不変になっていない物理現象は今のところ発見されていません。

スカラー場はこれで終わりにして、ディラック場に移ります。ディラック場でも同じことをしますが、ガンマ行列も変換されるために面倒です。最初に古典場としてガンマ行列の変換を求めてから、場の演算子に対する変換を見ます。

まずディラック方程式

$$(i\gamma_0\partial_0 + i\gamma_i\partial^i - m)\psi(x) = 0$$

の空間反転を考えます。ディラック場の空間反転を $\psi'(t, -x)$ とすれば、ディラック方程式の空間反転は

$$(i\gamma_0\partial_0 - i\gamma_i\partial^i - m)\psi'(t, -x) = 0$$

第二項の符号が反転するために、場の変換 $\psi'(t, -x) = \eta_P\psi(t, x)$ だけでは方程式の形が変わってしまいます。ディラック方程式でも空間反転で物理は変わらないことを要求するので、符号が合うように変換します。

空間反転に対して、ディラック場は

$$\psi'(t, -\mathbf{x}) = \Lambda_P \psi(t, \mathbf{x}) = \eta_P A \psi(t, \mathbf{x})$$

と変換させます。2 回変換すればもとに戻るので、 $\eta_P^2 A^2 = 1$ です。 η_P は位相因子なので ± 1 にします。そうすると、ディラック方程式の形が変わらないなら

$$\begin{aligned} 0 &= (i\gamma_0 \partial_0 - i\gamma_i \partial^i - m) \psi'(t, -\mathbf{x}) \\ &= \Lambda_P (i\gamma_0 \partial_0 - i\gamma_i \partial^i - m) \Lambda_P^{-1} \Lambda_P \psi'(t, -\mathbf{x}) \\ &= (i\Lambda_P \gamma_0 \Lambda_P^{-1} \partial_0 - i\Lambda_P \gamma_i \Lambda_P^{-1} \partial^i - m) \psi(t, \mathbf{x}) \\ &= (i\gamma_0 \partial_0 + i\gamma_i \partial^i - m) \psi(x) \end{aligned}$$

となるので、ガンマ行列は

$$\Lambda_P \gamma_0 \Lambda_P^{-1} = \gamma_0, \quad \Lambda_P \gamma_i \Lambda_P^{-1} = -\gamma_i$$

という変換を受けます。これは、 $\gamma_0 \gamma_0 = 1$, $\gamma_0 \gamma_i = -\gamma_i \gamma_0$ から、 $\Lambda_P = \eta_P \gamma_0$ とすればいいです。 Λ_P はユニタリーです。

$\bar{\psi}$ に対しては

$$\begin{aligned} \psi'^{\dagger}(t, -\mathbf{x}) &= \eta_P (\gamma_0 \psi(t, \mathbf{x}))^{\dagger} \\ \psi'^{\dagger}(t, -\mathbf{x}) &= \eta_P \psi^{\dagger}(t, \mathbf{x}) \gamma_0 \\ \psi'^{\dagger}(t, -\mathbf{x}) \gamma_0 &= \eta_P \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \gamma_0 \\ \bar{\psi}'(t, -\mathbf{x}) &= \eta_P \bar{\psi}(t, \mathbf{x}) \gamma_0 \end{aligned}$$

となっています。

また、空間反転は左手系と右手系を入れ替えるので、左手系の ψ_L 、右手系の ψ_R は

$$\psi_L(x) \Rightarrow \gamma_0 \psi_R(t, -\mathbf{x}), \quad \psi_R(x) \Rightarrow \gamma_0 \psi_L(t, -\mathbf{x})$$

と変換されます (位相因子は省いてます)。実際に、例えば左手系は

$$\psi_L(x) = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi(x)$$

なので

$$\psi'_L = \frac{1 + \gamma_5}{2} \gamma_0 \psi(t, -\mathbf{x}) = \gamma_0 \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi(t, -\mathbf{x}) = \gamma_0 \psi_R(t, -\mathbf{x}) \quad (\gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_0 \gamma_5)$$

となっています。

時間反転では反ユニタリー性に注意します。時間反転の変換は Λ_T とし、ディラック場の変換は

$$\psi'(-t, \mathbf{x}) = \Lambda_T \psi(t, \mathbf{x})$$

空間反転と同じように、時間反転したディラック方程式に Λ_T を入れると

$$\Lambda_T(-i\gamma_0\partial_0 + i\gamma_i\partial^i - m)\Lambda_T^{-1}\Lambda_T\psi(-t, \mathbf{x}) = 0$$

$\Lambda_T, \Lambda_T^{-1}$ で挟むと複素共役になるために

$$\begin{aligned} 0 &= (-\Lambda_T i\Lambda_T^{-1}\Lambda_T\gamma_0\partial_0 + \Lambda_T i\Lambda_T^{-1}\Lambda_T\gamma_i\partial^i - m)\Lambda_T^{-1}\Lambda_T\psi(-t, \mathbf{x}) \\ &= (i\Lambda_T\gamma_0\Lambda_T^{-1}\partial_0 - i\Lambda_T\gamma_i\Lambda_T^{-1}\partial^i - m)\Lambda_T\psi(-t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

これが

$$(i\gamma_0\partial_0 + i\gamma_i\partial^i - m)\psi'(x) = 0$$

となるためには、ガンマ行列を

$$\Lambda_T\gamma_0\Lambda_T^{-1} = \gamma_0, \quad \Lambda_T\gamma_i\Lambda_T^{-1} = -\gamma_i$$

と変換すればいいです。 $\bar{\psi}$ に対しては

$$\begin{aligned} \psi'^{\dagger}(-t, \mathbf{x}) &= \psi^{\dagger}(t, \mathbf{x})\Lambda_T^{\dagger} \\ \psi'^{\dagger}(-t, \mathbf{x})\gamma_0 &= \psi^{\dagger}(t, \mathbf{x})\Lambda_T^{-1}\gamma_0 \\ \psi'^{\dagger}(-t, \mathbf{x})\gamma_0 &= \psi^{\dagger}(t, \mathbf{x})\gamma_0\Lambda_T^{-1} \\ \bar{\psi}'(-t, \mathbf{x}) &= \bar{\psi}(t, \mathbf{x})\Lambda_T^{-1} \end{aligned}$$

となります。

Λ_T には複素共役を取らせる部分が含まれているので、それを K 、残りの部分を Λ として分離して、 $\Lambda_T = \Lambda K$ としたとき、 Λ だけで変換すると

$$\Lambda\gamma_0\Lambda^{-1} = \gamma_0^* = \gamma_0^T, \quad \Lambda\gamma_i\Lambda^{-1} = -\gamma_i^* = \gamma_i^T$$

このように複素共役が残った形になります (T は転置)。さらに、 Λ はユニタリー行列になることを合わせると (下の補足参照)、ディラック。パウリ表現において

$$\Lambda = i\gamma_1\gamma_3 \quad (\Lambda = \Lambda^{-1} = \Lambda^{\dagger})$$

と選べます。そして、 Λ_T の反ユニタリー性 (c 数の複素共役を取る) を踏まえれば

$$\Lambda_T = \gamma_1 \gamma_3$$

これは

$$\begin{aligned}\Lambda_T^{-1} \Lambda_T &= \Lambda_T^\dagger \Lambda_T = (\gamma_1 \gamma_3)^\dagger \gamma_1 \gamma_3 = \gamma_3^\dagger \gamma_1^\dagger \gamma_1 \gamma_3 = \gamma_3 \gamma_1 \gamma_1 \gamma_3 = 1 \\ (\gamma_i \gamma_i + \gamma_i \gamma_i &= 2g_{ii} = -2, \quad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i)\end{aligned}$$

からユニタリーです。ガンマ行列に対しては

$$\begin{aligned}\Lambda_T \gamma_0 \Lambda_T^{-1} &= (\gamma_1 \gamma_3) \gamma_0^* (\gamma_1 \gamma_3)^\dagger = \gamma_1 \gamma_3 \gamma_0 \gamma_3 \gamma_1 = \gamma_1 \gamma_0 \gamma_1 = \gamma_0 \\ \Lambda_T \gamma_1 \Lambda_T^{-1} &= (\gamma_1 \gamma_3) \gamma_1^* (\gamma_1 \gamma_3)^\dagger = \gamma_1 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_1 = \gamma_1 \gamma_1 \gamma_1 = -\gamma_1 \\ \Lambda_T \gamma_2 \Lambda_T^{-1} &= (\gamma_1 \gamma_3) \gamma_2^* (\gamma_1 \gamma_3)^\dagger = -\gamma_1 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_1 = -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1 = -\gamma_2 \\ \Lambda_T \gamma_3 \Lambda_T^{-1} &= (\gamma_1 \gamma_3) \gamma_3^* (\gamma_1 \gamma_3)^\dagger = \gamma_1 \gamma_3 \gamma_3 \gamma_3 \gamma_1 = -\gamma_1 \gamma_3 \gamma_1 = -\gamma_3\end{aligned}$$

となり、ガンマ行列の変換を満たしています。左から二番目で複素共役がつくのは反ユニタリー性からで、 γ_2 のときは虚数によるパウリ行列 σ_2 なのでマイナスが付きまます。

荷電共役は相対論的量子力学の「荷電共役」を見てください。 Λ_C を荷電共役の変換として結果だけ書けば

$$\psi'(x) = \Lambda_C \bar{\psi}^T(x)$$

$$\Lambda_C \gamma_\mu \Lambda_C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad \Lambda_C \gamma_5 \Lambda_C^{-1} = \gamma_5^T, \quad \Lambda_C^{-1} = \Lambda_C^\dagger = \Lambda_C^T = -\Lambda_C$$

$\psi'(x) = \Lambda_C \bar{\psi}^T(x)$ がディラック方程式を満たすことを見ておきます。ディラック方程式のエルミート共役を取って

$$\psi^\dagger(x)(-i\gamma^{\mu\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0$$

矢印は右から微分演算子が $\psi^\dagger$ にかかることを表します。 γ_0 を挟んで

$$\begin{aligned}0 &= \psi^\dagger(x) \gamma_0 \gamma_0 (-i\gamma^{\mu\dagger}\overleftarrow{\partial}_\mu - m) \gamma_0 \gamma_0 \\ &= \bar{\psi}(x) (-i\gamma_0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma_0 \overleftarrow{\partial}_\mu - m) \\ &= \bar{\psi}(x) (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) \quad (\gamma_0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma_0 = \gamma^\mu)\end{aligned}$$

転置を取って

$$(-i\gamma^{\mu T} \partial_\mu - m) \bar{\psi}^T(x) = 0$$

これに荷電共役 Λ_C を作用させれば

$$\begin{aligned} 0 &= \Lambda_C(-i\gamma^{\mu T}\partial_\mu - m)\Lambda_C^{-1}\Lambda_C\bar{\psi}^T(x) \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi'(x) \end{aligned}$$

となるので、ディラック方程式は変化しません。 $\bar{\psi}$ の変換は

$$\begin{aligned} \psi'^\dagger(x) &= (\bar{\psi}^T(x))^\dagger\Lambda_C^\dagger \\ &= ((\psi^\dagger(x)\gamma_0)^T)^\dagger\Lambda_C^{-1} \\ &= (\psi^\dagger(x)\gamma_0)^*\Lambda_C^\dagger \\ &= \psi^T(x)\gamma_0\Lambda_C^\dagger \\ \bar{\psi}'(x) &= \psi^T(x)\gamma_0\Lambda_C^{-1}\gamma_0 \\ &= -\psi^T(x)\Lambda_C^{-1} \end{aligned}$$

となっています。

ガンマ行列に対する変換が分かったので場の演算子の変換を見ていきます。ディラック場の展開は

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (a_p^s u^s(p) e^{-ipx} + b_p^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx})$$

規格化定数は抜いています。面倒なのが $u^s(p), v^s(p)$ がいる点です ($s = 1, 2$)。3次元運動量の符号を反転させるので、先に $u^s(p), v^s(p)$ の運動量がどうなっているのか出しておきます。厳密な形は必要ないので、必要な部分だけ取り出します。

正エネルギー部分 $e^{-ikx}u^s(\mathbf{k})$ 、負エネルギー部分 $e^{ikx}v^s(\mathbf{k})$ に対する運動量表示でのディラック方程式は

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u^s(\mathbf{k}) = 0, \quad (\gamma^\mu k_\mu + m)v^s(\mathbf{k}) = 0$$

$u(\mathbf{k}), v(\mathbf{k})$ を静止系に持っていけば、 $u(0), v(0)$ です。静止系の解をローレンツ変換すれば動いている解になることと、ローレンツ変換部分に運動量依存性があることから

$$u^s(\mathbf{k}) = f(k)u^s(0)$$

という形に書けます。そして

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)(\gamma^\mu k_\mu + m) = k^2 - m^2 = 0$$

という性質 (on-shell なら) を使えば

$$u^s(\mathbf{k}) = N(E)(\gamma^\mu k_\mu + m)u^s(0), \quad v^s(\mathbf{k}) = N(E)(-\gamma^\mu k_\mu + m)v^s(0)$$

という形が考えられます。 $N(E)$ には 3 次元運動量依存性がないので今は具体的な形は必要ないです。

ディラック場の演算子の空間反転は、空間反転の演算子 $\hat{P}$ で挟みます。ただし、古典場で見たとように γ_0 が必要になるので

$$\hat{P}\hat{\psi}(t, \mathbf{x})\hat{P}^{-1} = \eta_P \gamma_0 \hat{\psi}(t, -\mathbf{x})$$

と変換させます。面倒なので $\eta_P = 1$ にします。場の展開を変換すれば

$$\hat{P}\hat{\psi}(x)\hat{P}^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{P}\hat{a}_{\mathbf{p}}^s \hat{P}^{-1} u^s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \hat{P}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \hat{P}^{-1} v^s(\mathbf{p}) e^{ipx})$$

$\gamma_0 \hat{\psi}(t, -\mathbf{x})$ は

$$\begin{aligned} \gamma_0 \hat{\psi}(t, -\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{\mathbf{p}}^s \gamma_0 u^s(\mathbf{p}) e^{-ip_0 x_0} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \gamma_0 v^s(\mathbf{p}) e^{ip_0 x_0} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{-\mathbf{p}}^s \gamma_0 u^s(-\mathbf{p}) e^{-ip_0 x_0} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} \gamma_0 v^s(-\mathbf{p}) e^{ip_0 x_0} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

ここで出てくる $\gamma_0 u^s(-\mathbf{p})$ は

$$\begin{aligned} \gamma_0 u^s(-\mathbf{p}) &= N(E) \gamma_0 (\gamma_0 p_0 - \gamma_i p^i + m) u^s(0) = N(E) (\gamma_0 p_0 + \gamma_i p^i + m) \gamma_0 u^s(0) \\ &= N(E) (\gamma_\mu p^\mu + m) \gamma_0 u^s(0) \\ &= N(E) (\gamma_0 p_0 + \gamma_i p^i + m) u^s(0) \\ &= u^s(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

$\gamma_0 v^s(-\mathbf{p})$ でも

$$\begin{aligned} \gamma_0 v^s(-\mathbf{p}) &= N(E) \gamma_0 (-\gamma_0 p_0 + \gamma_i p^i + m) v^s(0) = N(E) (-\gamma_0 p_0 - \gamma_i p^i + m) \gamma_0 v^s(0) \\ &= -N(E) (-\gamma_\mu p^\mu + m) v^s(0) \\ &= -v^s(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

$u^s(0)$ は上 2 成分、 $v^s(0)$ は下 2 成分しか値を持っていないので、 $\gamma_0 u^s(0) = u^s(0)$, $\gamma_0 v^s(0) = -v^s(0)$ となっています。これを使うと

$$\begin{aligned} \gamma_0 \hat{\psi}(t, -\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{-\mathbf{p}}^s \gamma_0 u^s(-\mathbf{p}) e^{-ipx} + \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} \gamma_0 v^s(-\mathbf{p}) e^{ipx}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{-\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ipx} - \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}) e^{ipx}) \end{aligned}$$

となるので、生成、消滅演算子は

$$\hat{P}\hat{a}_{\mathbf{p}}^s\hat{P}^{-1} = \hat{a}_{-\mathbf{p}}^s, \quad \hat{P}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\hat{P}^{-1} = -\hat{b}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}$$

$$\hat{P}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\hat{P}^{-1} = \hat{a}_{-\mathbf{p}}^{s\dagger}, \quad \hat{P}\hat{b}_{\mathbf{p}}^s\hat{P}^{-1} = -\hat{b}_{-\mathbf{p}}^s$$

となって、スカラー場と同じように運動量が反転するだけです。

場の演算子に対する時間反転は、スカラー場の場合とディラック場での空間反転でスピノール成分の変換が出てきたことを合わせれば

$$\hat{T}\hat{\psi}(t, \mathbf{x})\hat{T}^{-1} = \Lambda_T\hat{\psi}(-t, \mathbf{x})$$

と考えられます。スカラー場でもそうだったように、時間反転では3次元運動量の向きが反転することが感覚的に分かります。スピンの3次元運動量方向を軸に回転しているイメージを持ち出すなら、スピンの向きも当然反対の向きになるはずですが (例えば、右手系のフェルミオンは時間反転後も右手系のフェルミオン)。この変換で実際にそうになっていることを確かめます。

場の演算子を変換すると

$$\hat{T}\hat{\psi}(x)\hat{T}^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{T}\hat{a}_{\mathbf{p}}^s\hat{T}^{-1}u^{s*}(\mathbf{p})e^{ipx} + \hat{T}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\hat{T}^{-1}v^{s*}(\mathbf{p})e^{-ipx})$$

複素数を持つ部分は複素共役を取っています。これは Λ_T では

$$\Lambda_T\hat{\psi}(t, -\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{\mathbf{p}}^s\Lambda_T u^s(\mathbf{p})e^{ip_0x_0}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\Lambda_T v^s(\mathbf{p})e^{-ip_0x_0}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}})$$

ディラック表現として、 $\Lambda = i\gamma_1\gamma_3$ を使うと、 $u^s(\mathbf{p})$ は $u^s(0)$ から

$$\begin{aligned} \Lambda u^s(\mathbf{p}) &= i\gamma_1\gamma_3(\gamma_0p_0 - \gamma_1p^1 - \gamma_2p^2 - \gamma_3p^3 + m)u^s(0) \\ &= i(\gamma_0p_0 - \gamma_1p^1 + \gamma_2p^2 - \gamma_3p^3 + m)\gamma_1\gamma_3u^s(0) \end{aligned}$$

γ_2 項の符号だけが反転せずに残ります。 γ_2 だけが虚数を含んでいるために、複素共役を取ると

$$(\gamma_0p_0 - \gamma_1p^1 - \gamma_2p^2 - \gamma_3p^3 + m)\gamma_1\gamma_3u^{s*}(0)$$

なので

$$\begin{aligned} \Lambda u^s(\mathbf{p}) &= i(\gamma_0p_0 - \gamma_1p^1 - \gamma_2p^2 - \gamma_3p^3 + m)^*\gamma_1\gamma_3u^{s*}(0) \\ \Lambda u^s(-\mathbf{p}) &= i((\gamma_\mu p^\mu + m)\gamma_1\gamma_3u^s(0))^* \end{aligned}$$

v^s でも同様です。 $i\gamma_1\gamma_3$ は

$$\begin{aligned}
i\gamma_1\gamma_3 &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} -\sigma_1\sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_1\sigma_3 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} \\
&= i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

0 でない部分はパウリ行列 σ_2 です。そうすると、右辺の $u^s(0)$ は上 2 成分しかないので、 σ_2 は 2×1 行列を

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \quad (2)$$

とすることから、 $u(0)$ のスピン $\pm 1/2$ の状態を $\chi_{\pm 1/2}$ とすれば

$$i\sigma_2\chi_{\pm 1/2} = \mp\chi_{\mp 1/2}$$

となります。

よって、スピンが反対になることを u^{-s} とすれば

$$\Lambda u^s(-\mathbf{p}) = i(\gamma_\mu p^\mu + m)u^{-s}(0)^* = iu^{-s*}(\mathbf{p})$$

v^s でも同様に

$$\Lambda v^s(-\mathbf{p}) = iv^{-s*}(\mathbf{p})$$

表記的には単に $u^{-s}(\mathbf{p}), v^{-s}(\mathbf{p})$ としていますが、スピン $\pm 1/2$ の入れ替え時に符号が反転するので、それを考慮して書くなら

$$u^{-s}(-\mathbf{p}) = (-1)^{s+1/2}u(-\mathbf{p})$$

$$v^{-s}(-\mathbf{p}) = (-1)^{s+1/2}v(-\mathbf{p})$$

となります。この場合では $s = \pm 1/2$ としているので、例えばスピン上向きの $s = 1/2$ では、下向き $s = -1/2$ になるだけでなく、 -1 がつきます ((2) での a)。

この結果から

$$\begin{aligned}\Lambda\hat{\psi}(t, -\boldsymbol{x}) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^s \Lambda_T u^s(\boldsymbol{p}) e^{ip_0 x_0} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} \Lambda_T v^s(\boldsymbol{p}) e^{-ip_0 x_0} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}) \\ &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{-\boldsymbol{p}}^s u^{-s*}(\boldsymbol{p}) e^{ipx} + \hat{b}_{-\boldsymbol{p}}^{s\dagger} u^{-s*}(\boldsymbol{p})) e^{-ipx}\end{aligned}$$

よって、生成、消滅演算子は

$$\hat{T} \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^s \hat{T}^{-1} = i \hat{a}_{-\boldsymbol{p}}^{-s}, \quad \hat{T} \hat{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} \hat{T}^{-1} = i \hat{b}_{-\boldsymbol{p}}^{-s\dagger}$$

$$\hat{T} \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} \hat{T}^{-1} = -i \hat{a}_{-\boldsymbol{p}}^{-s\dagger}, \quad \hat{T} \hat{b}_{\boldsymbol{p}}^s \hat{T}^{-1} = -i \hat{b}_{-\boldsymbol{p}}^{-s}$$

予想通り、3次元運動量とスピンの反転しています。

荷電共役では

$$\hat{C} \hat{\psi}(x) \hat{C}^{-1} = \Lambda_C \hat{\bar{\psi}}^T(x)$$

と変換させます。これも同じように計算すれいいです。変換は

$$\hat{C} \hat{\psi}(x) \hat{C}^{-1} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{C} \hat{a}_{\boldsymbol{p}}^s \hat{C}^{-1} u^s(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + \hat{C} \hat{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} \hat{C}^{-1} v^s(\boldsymbol{p}) e^{ipx})$$

Λ_C で書けば

$$\Lambda_C \hat{\bar{\psi}}^T(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} C \bar{u}_s^T(\boldsymbol{p}) e^{ipx} + \hat{b}_{\boldsymbol{p}}^s C \bar{v}_s^T(\boldsymbol{p}) e^{-ipx})$$

転置の T があるので、スピンの添え字 s を下につけています。行列成分を持っているのは、 u, v なので、この2つは $\hat{\psi}$ と同じようになって、 $\hat{a}, \hat{b}$ ではエルミート共役を取り、 $e^{\pm ipx}$ の複素共役を取ります。 $C \bar{u}_s^T(p)$ は、 $\Lambda_C \gamma_\mu \Lambda_C^{-1} = -\gamma_\mu^T$ から

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu p_\mu + m) \Lambda_C \bar{u}_s^T(\boldsymbol{p}) &= \Lambda_C (-\gamma_\mu^T p^\mu + m) \bar{u}_s^T(\boldsymbol{p}) = -\Lambda_C (\gamma_\mu^T p^\mu - m) \bar{u}_s^T(\boldsymbol{p}) \\ &= -\Lambda_C (\bar{u}_s(\boldsymbol{p}) (\gamma_\mu p^\mu - m))^T \\ &= 0\end{aligned}$$

最後に

$$\begin{aligned}
u^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0(\gamma_\mu p^\mu - m) &= (\gamma_\mu^\dagger p^\mu - m)(u^\dagger(\mathbf{p})\gamma_0)^\dagger = (\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 p^\mu - m)\gamma_0 u(\mathbf{p}) \\
&= \gamma_0(\gamma_\mu p^\mu - m)u(\mathbf{p}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

を使っています。 $\gamma^\mu p_\mu + m$ が作用して 0 になる性質は $v^s(\mathbf{p})$ のものなので

$$C\bar{u}_s^T(\mathbf{p}) = v_s(\mathbf{p})$$

ということです。同様にすれば

$$C\bar{v}_s^T(\mathbf{p}) = u_s(\mathbf{p})$$

よって

$$\hat{\psi}^T(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s (\hat{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}) e^{ipx} + \hat{b}_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) e^{-ipx})$$

となるので

$$\hat{C}\hat{a}_{\mathbf{p}}^s\hat{C}^{-1} = \hat{b}_{\mathbf{p}}^s, \quad \hat{C}\hat{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\hat{C}^{-1} = \hat{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$$

$$\hat{C}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}\hat{C}^{-1} = \hat{b}_{\mathbf{p}}^{s\dagger}, \quad \hat{C}\hat{b}_{\mathbf{p}}^s\hat{C}^{-1} = \hat{a}_{\mathbf{p}}^s$$

というわけで、 $\hat{a}, \hat{b}$ が入れ替わるので、粒子と反粒子を変える変換になっています。

ガンマ行列の 16 個の組み合わせに対する C, P, T 変換は後で必要になることが多いのでついでに求めておきます。

位相因子は全て 1 に取ります。組み合わせは

$$\text{スカラー (S)} : \quad \bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$\text{擬スカラー (P)} : \quad \bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x)$$

$$\text{ベクトル (V)} : \quad \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

$$\text{軸性ベクトル (A)} : \quad \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$$

$$\text{2 階のテンソル (T)} : \quad \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi'(x) \quad (\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu])$$

これらは相対論的量子力学の「ガンマ行列～双線形～」を見てください。

空間反転は、 $\psi'(x') = \Lambda_P\psi(x)$ の逆向きの変換 $\psi(x) = \Lambda_P^{-1}\psi'(x')$ にして

$$\psi(x) \Rightarrow \Lambda_P^{-1}\psi(t, -\mathbf{x}) = \gamma_0\psi(t, -\mathbf{x}), \quad \bar{\psi}(x) \Rightarrow \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\Lambda_P = \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma_0$$

から

$$S : \bar{\psi}(x)\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma_0\gamma_0\psi(t, -\mathbf{x}) = \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\psi(t, -\mathbf{x})$$

$$P : \bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma_0i\gamma_5\gamma_0\psi(t, -\mathbf{x}) = -\bar{\psi}(t, -\mathbf{x})i\gamma_5\psi(t, -\mathbf{x})$$

$$V : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0\psi(t, -\mathbf{x}) = \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma^{\mu\dagger}\psi(t, -\mathbf{x})$$

$$A : \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma_0\gamma_5\gamma^\mu\gamma_0\psi(t, -\mathbf{x}) = -\bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma_5\gamma^{\mu\dagger}\psi(t, -\mathbf{x})$$

$$T : \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi'(x) \Rightarrow \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_0\psi(t, -\mathbf{x}) = \bar{\psi}(t, -\mathbf{x})\sigma_{\mu\nu}^\dagger\psi(t, -\mathbf{x})$$

$\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0 = \gamma^{\mu\dagger}$ と $\gamma_0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_0$ に気をつければいいだけです。 $\sigma_{\mu\nu}^\dagger$ は

$$\begin{aligned}\gamma_0[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\gamma_0 &= \gamma_0\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_0 - \gamma_0\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_0 = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0\gamma_0\gamma_\nu\gamma_0 - \gamma_0\gamma_\nu\gamma_0\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0 \\ &= \gamma_\mu^\dagger\gamma_\nu^\dagger - \gamma_\nu^\dagger\gamma_\mu^\dagger \\ &= [\gamma_\mu^\dagger, \gamma_\nu^\dagger] \quad (\sigma_{\mu\nu}^\dagger = \gamma_0\sigma_{\mu\nu}\gamma_0 = \frac{i}{2}\gamma_0[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\gamma_0 = \frac{i}{2}[\gamma_\mu^\dagger, \gamma_\nu^\dagger])\end{aligned}$$

を表しています。

時間反転は、ディラック・パウリ表現で

$$\psi(x) \Rightarrow \Lambda_T^{-1}\psi(-t, \mathbf{x}) = \gamma_3\gamma_1\psi(t, \mathbf{x}) , \quad \bar{\psi}(x) \Rightarrow \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\Lambda_T = \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma_1\gamma_3$$

なので

$$S : \bar{\psi}(x)\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma_1\gamma_3\gamma_0\gamma_3\gamma_1\psi(-t, \mathbf{x}) = \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\psi(-t, \mathbf{x})$$

$$P : \bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x) \Rightarrow -\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma_1\gamma_3i\gamma_5\gamma_3\gamma_1\psi(-t, \mathbf{x}) = -\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})i\gamma_5\psi(-t, \mathbf{x})$$

$$V : \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma_\mu^\dagger\psi(-t, \mathbf{x})$$

$$A : \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma_5\gamma_\mu^\dagger\psi(-t, \mathbf{x})$$

$$T : \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi'(x) \Rightarrow -\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\sigma_{\mu\nu}^\dagger\psi(-t, \mathbf{x})$$

V は

$$\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\gamma_0\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = \bar{\psi}(x_t)\gamma_0\psi(x_t)$$

$$\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\psi(x_t)$$

$$\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\gamma_2^*\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)\gamma_2\psi(x_t)$$

$$\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\gamma_3\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)\gamma_3\psi(x_t)$$

$x_t = (-t, \mathbf{x})$ としています。今の γ_2 は複素数なのでマイナスがつきます。この結果を $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$, $\gamma_i^\dagger = -\gamma_i$ を使ってまとめています。A は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_0\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) &= \bar{\psi}(x_t)\gamma_5\gamma_0\gamma_1\gamma_3\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = \bar{\psi}(x_t)\gamma_5\gamma_0\psi(x_t) \\ \bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_1\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) &= -\bar{\psi}(x_t)\gamma_5\gamma_1\gamma_1\gamma_3\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)\gamma_5\gamma_1\psi(x_t) \\ \bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_2^*\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) &= -\bar{\psi}(x_t)\gamma_5\gamma_2\psi(x_t) \\ \bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\gamma_5\gamma_3\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) &= -\bar{\psi}(x_t)\gamma_5\gamma_3\psi(x_t)\end{aligned}$$

なので、 $\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\gamma_5\gamma_\mu^\dagger\psi(-t, \mathbf{x})$ となります。T は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\sigma_{\mu\nu}\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) &= \bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3(i[\gamma_\mu, \gamma_\nu])^*\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) \\ &= -i\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)^*\gamma_3\gamma_1\psi(x_t)\end{aligned}$$

1/2 は省いています。これの 2 つの項は $\mu = 0, \nu = i$ のとき

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_0\gamma_i^*\gamma_3\gamma_1\psi &= \bar{\psi}\gamma_0\gamma_1\gamma_3\gamma_i^*\gamma_3\gamma_1\psi \\ \bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_i^*\gamma_0\gamma_3\gamma_1\psi &= \bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_i^*\gamma_3\gamma_1\gamma_0\psi\end{aligned}$$

この形は V の変換と同じなので

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_0\gamma_i^*\gamma_3\gamma_1\psi &= \bar{\psi}\gamma_0\gamma_i^\dagger\psi \\ \bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_i^*\gamma_0\gamma_3\gamma_1\psi &= \bar{\psi}\gamma_i^\dagger\gamma_0\psi\end{aligned}$$

なので

$$\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\sigma_{0i}\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)i[\gamma_0, \gamma_i^\dagger]\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)\sigma_{0i}^\dagger\psi(x_t)$$

「†」を外して書けば

$$\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\sigma_{0i}\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = \bar{\psi}(x_t)i[\gamma_0, \gamma_i]\psi(x_t) = \bar{\psi}(x_t)\sigma_{0i}\psi(x_t)$$

添え字を逆にした σ_{i0} でも同じです。 $\mu = i, \nu = j$ では 2 つの項は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_i^*\gamma_j^*\gamma_3\gamma_1\psi \\ \bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_i^*\gamma_j^*\gamma_3\gamma_1\psi\end{aligned}$$

例えば $i = 1, j = 2$ では

$$\bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_1^*\gamma_2^*\gamma_3\gamma_1\psi = -\bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1\psi = \bar{\psi}\gamma_1\gamma_2\psi$$

$$\bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_2^*\gamma_1^*\gamma_3\gamma_1\psi = \bar{\psi}\gamma_1\gamma_3\gamma_2^*\gamma_1\gamma_3\gamma_1\psi = -\bar{\psi}\gamma_2\gamma_1\gamma_3\gamma_1\gamma_3\gamma_1\psi = \bar{\psi}\gamma_2\gamma_1\psi$$

他の場合でも同様なので

$$\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\sigma_{ij}\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)i[\gamma_i, \gamma_j]\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)\sigma_{ij}\psi(x_t)$$

「†」をつけると

$$\bar{\psi}(x_t)\gamma_1\gamma_3\sigma_{ij}\gamma_3\gamma_1\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)i[\gamma_i^\dagger, \gamma_j^\dagger]\psi(x_t) = -\bar{\psi}(x_t)\sigma_{ij}^\dagger\psi(x_t)$$

となります。

C 変換ではカレントの性質を加えます。荷電共役は

$$\psi(x) \Rightarrow \Lambda_C \bar{\psi}^T(x), \quad \bar{\psi}(x) \Rightarrow -\psi^T(x)\Lambda_C^{-1}$$

V から求めると

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) &\Rightarrow -\psi^T\Lambda_C^{-1}\gamma_\mu\Lambda_C\bar{\psi}^T = \psi^T\gamma_\mu^T\Lambda_C^{-1}\Lambda_C\bar{\psi}^T \quad (\Lambda_C^{-1}\gamma_\mu = -\gamma_\mu^T\Lambda_C^{-1}) \\ &= \psi^T\gamma_\mu^T\gamma_0^T\psi^* \\ &= \psi^T(\gamma_0\gamma_\mu)^T\psi^* \\ &= \psi_a((\gamma_0\gamma_\mu)^T)_{ab}\psi_b^* \\ &= \psi_a(\gamma_0\gamma_\mu)_{ba}\psi_b^* \\ &= \psi_b^\dagger(\gamma_0\gamma_\mu)_{ba}\psi_a \\ &= \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \end{aligned}$$

小文字のローマ文字はスピノール成分で、 ψ は 4×1 の行列なので成分を書けば転置は無視できます。しかし、この結果は粒子、反粒子の解釈に合いません。荷電共役は粒子と反粒子を入れ替える、つまり電荷の符号を入れ替えるので、カレントの荷電共役は符号が反転すべきです (電子での $-|e|\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ から陽電子での $+|e|\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ になる)。なので、ディラック場の演算子における反交換性から、 ψ の入れ替えに対して符号が反転するという性質を加えて

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma_\mu\psi &\Rightarrow -\psi^T\Lambda_C^{-1}\gamma_\mu\Lambda_C\bar{\psi}^T = \psi_a(\gamma_0\gamma_\mu)_{ba}\psi_b^* \\ &= -\psi_b^\dagger(\gamma_0\gamma_\mu)_{ba}\psi_a \\ &= -\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \end{aligned}$$

荷電共役ではこのようにします。また、はっきりさせるために区別して書けば

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\psi \Rightarrow -\bar{\psi}\gamma_\mu\Psi$$

となっています。

S では

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &\Rightarrow -\psi^T\Lambda_C^{-1}\Lambda_C\bar{\psi}^T = -\psi^T\bar{\psi}^T = -\psi^T(\psi^\dagger\gamma_0)^T \\ &= -\psi_a(\gamma_0^T)_{ab}\psi_b^\dagger \\ &= \psi_b^\dagger\psi_a(\gamma_0^T)_{ab} \\ &= \psi_b^\dagger(\gamma_0)_{ba}\psi_a \\ &= \psi^\dagger\gamma_0\psi \\ &= \bar{\psi}\psi\end{aligned}$$

P では

$$\begin{aligned}\bar{\psi}i\gamma_5\psi &\Rightarrow -\psi^T\Lambda_C^{-1}i\gamma_5\Lambda_C\bar{\psi}^T = -i\psi^T\gamma_5^T\Lambda_C^{-1}\Lambda_C\bar{\psi}^T \quad (\Lambda_C^{-1}\gamma_5 = \gamma_5^T\Lambda_C^{-1}) \\ &= -i\psi^T\gamma_5^T\gamma_0\psi^* \\ &= -i\psi^T(\gamma_5^T\gamma_0)\psi^* \\ &= -i\psi^T(\gamma_0\gamma_5)^T\psi^* \quad (\gamma_0^t = \gamma_0, \gamma_5^T\gamma_0 = (\gamma_0^T\gamma_5)^T = (\gamma_0\gamma_5)^T) \\ &= -i\psi_a((\gamma_0\gamma_5)^T)_{ab}\psi_b^* \\ &= i\psi_b^\dagger((\gamma_0\gamma_5)^T)_{ab}\psi_a \\ &= i\psi_b^\dagger\psi_a(\gamma_0\gamma_5)_{ba} \\ &= i\psi_b^\dagger(\gamma_0)_{bc}(\gamma_5)_{ca}\psi_a \\ &= \bar{\psi}i\gamma_5\psi\end{aligned}$$

A では

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) &\Rightarrow -\psi^T\Lambda_C^{-1}\gamma_5\gamma_\mu\Lambda_C\bar{\psi}^T = \psi^T\gamma_5^T\gamma_\mu^T\Lambda_C^{-1}\Lambda_C\bar{\psi}^T \\
&= \psi^T\gamma_5^T\gamma_\mu^T\gamma_0\psi^* \\
&= \psi^T(\gamma_0^T\gamma_\mu\gamma_5)^T\psi^* \\
&= \psi_a((\gamma_0\gamma_\mu\gamma_5)^T)_{ab}\psi_b^* \\
&= -\psi_b^\dagger\psi_a(\gamma_0\gamma_\mu\gamma_5)_{ba} \\
&= -\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \\
&= \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi
\end{aligned}$$

T では (1/2 は省きます)

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x) &\Rightarrow -\psi^T\Lambda_C^{-1}\sigma_{\mu\nu}\Lambda_C\bar{\psi}^T = -i\psi^T\Lambda_C^{-1}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\Lambda_C\bar{\psi}^T \\
&= -i\psi^T(\gamma_\mu^T\gamma_\nu^T - \gamma_\nu^T\gamma_\mu^T)\gamma_0\psi^* \\
&= -i\psi_a(((\gamma_0\gamma_\nu\gamma_\mu)^T)_{ab} - ((\gamma_0\gamma_\mu\gamma_\nu)^T)_{ab})\psi_b^* \\
&= i\psi_b^\dagger\psi_a((\gamma_0\gamma_\nu\gamma_\mu)_{ba} - (\gamma_0\gamma_\mu\gamma_\nu)_{ba}) \\
&= i\bar{\psi}(\gamma_\nu\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu)\psi_a \\
&= -\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi
\end{aligned}$$

まとめると、荷電共役に対して

$$\begin{aligned}
S &: \bar{\psi}(x)\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(x)\psi(x) \\
P &: \bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(x)i\gamma_5\psi(x) \\
V &: \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \Rightarrow -\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) \\
A &: \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) \Rightarrow \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x) \\
T &: \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x) \Rightarrow -\bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)
\end{aligned}$$

「表記と定義」にこれまでの変換をまとめています。

最後はかなり特殊な話に触れておきます。興味のない人は飛ばしてください。ディラック方程式を

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - \gamma_5m)\psi(x) = 0$$

と変更します。これを正エネルギーとして運動量表示にすると

$$(\gamma^\mu p_\mu - \gamma_5m)\psi(p) = 0$$

このとき左辺を on-shell($p^2 = m^2$) で 0 にできると予想して、通常のディラック方程式と同じように $+\gamma_5 m$ としたものをかけてみると

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu p_\mu + \gamma_5 m)(\gamma^\mu p_\mu - \gamma_5 m) &= p^2 - \gamma^\mu \gamma_5 p_\mu m + \gamma_5 \gamma^\mu p_\mu m - m^2 \\ &= p^2 + 2\gamma_5 \gamma^\mu p_\mu m - m^2\end{aligned}$$

となってしまう、 p^2 と m^2 だけの式になりません。これの代わりに 2 乗にしてみると

$$\begin{aligned}(\gamma^\mu p_\mu - \gamma_5 m)^2 &= p^2 + m^2 - \gamma^\mu \gamma_5 p_\mu m - \gamma_5 \gamma^\mu p_\mu m \\ &= p^2 + m^2\end{aligned}$$

となります。しかし、これは通常の on-shell の式 $p_0^2 = E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ を作りません。ここでは、 $E^2 = \mathbf{p}^2 - m^2$ です。質量項の符号が反転した状態に対応する粒子をタキオン (tachyon) と呼びます。タキオンは質量項の符号が逆になるために、通常の粒子が持つ光速を超えられないという制限の外の、光速以上にしかねないという性質を持ちます。簡単に言えば、特殊相対論の話での (v は速度)

$$\begin{aligned}E^2 &= \mathbf{p}^2 + m^2 \\ &= \mathbf{v}^2 E^2 + m^2 \quad (\mathbf{p} = \mathbf{v} E) \\ E &= \frac{m}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}\end{aligned}$$

から、 $|\mathbf{v}|$ が光速を超えると右辺に虚数が出てくるので (自然単位系なので光速は 1)、それを消すために m を im に置き換える必要があるということです (エネルギーは実数だから)。このような粒子の空間反転、時間反転、荷電共役を取るとどうなるのかを古典的な場合で見していきます。

基本的な話はすでにしているので、ここで問題になるのは γ_5 がそれぞれの変換に対してどうなるのかを見ればいいです。空間反転ではガンマ行列が

$$\Lambda_P \gamma_0 \Lambda_P^{-1} = \gamma_0, \quad \Lambda_P \gamma_i \Lambda_P^{-1} = -\gamma_i$$

となっているので、 $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ は

$$\Lambda_P \gamma_5 \Lambda_P^{-1} = i\Lambda_P \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \Lambda_P^{-1} = -\gamma_5$$

空間反転後に

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma_5 m)\psi_P(x) = 0$$

となって、不変になっていません ($\psi_P(x) = \Lambda_P \psi(t, -\mathbf{x})$)。

時間反転では

$$\Lambda_T \gamma_0 \Lambda_T^{-1} = \gamma_0, \quad \Lambda_T \gamma_i \Lambda_T^{-1} = -\gamma_i$$

さらに複素共役を取らせるようになっているので $\Lambda_T \gamma_5 \Lambda_T^{-1} = \gamma_5$ となります。なので、時間反転後も

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma_5 m)\psi_T(x) = 0$$

となって、不変になります ($\psi_T(x) = \Lambda_T \psi(-t, \mathbf{x})$)。

荷電共役では

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad \gamma_5 = C\gamma_5^T C^{-1}$$

上で通常のディラック方程式の荷電共役を求めるときに、 γ_0 を挟むという手順があったので、一回 $\gamma_0 \gamma_5 \gamma_0$ が出てきて、 $\gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = -\gamma_5$ となります。後は変わらないので荷電共役後に

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma_5 m)\psi_C(x) = 0$$

となって不変になりません ($\psi_C(x) = \Lambda_C \bar{\psi}^T(x)$)。

このように、タキオンの方程式は時間反転に対して不変で、空間反転、荷電共役に対して不変になっていません。しかし、空間反転と荷電共役を両方行えば符号がもとに戻るために、不変になります。

これ以上踏み込まないので、気になる人は元にした [arXiv:1110.4171](https://arxiv.org/abs/1110.4171) やその参照先を見てください。ちなみに、[arXiv:1110.4171](https://arxiv.org/abs/1110.4171) は、ニュートリノが光速を超えたという実験結果が OPERA から出てきたこと ([arXiv:1109.4897](https://arxiv.org/abs/1109.4897)) に対する理論側からの反応の 1 つです (単にタキオンの C, P, T 対称性をみているだけなので検証というわけではないです)。しかし、約 1 年後に実験ミスが判明しました。

・補足

反ユニタリ演算子の性質は反ユニタリー演算子を $\hat{V}$ とすると

$$\hat{V}(c_1|a\rangle + c_2|b\rangle) = c_1^* \hat{V}|a\rangle + c_2^* \hat{V}|b\rangle$$

$$\hat{V}c = c^* \hat{V}$$

$$\langle a|\hat{V}^\dagger|b\rangle = \langle b|\hat{V}|a\rangle$$

$$\hat{V}\hat{V}^\dagger = \hat{V}^\dagger\hat{V}$$

状態ベクトルへの作用は

$$\hat{V}|a\rangle = |a'\rangle$$

となっていて、状態ベクトルの積に対して

$$\langle b'|a'\rangle = \langle b'|\hat{V}|a\rangle = \langle a|\hat{V}^\dagger|b'\rangle = \langle a|\hat{V}^\dagger\hat{V}|b\rangle = \langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$$

となります。また、反ユニタリー演算子は複素共役を取らせる演算子 $\hat{K}$ とユニタリー演算子 $\hat{U}$ によって

$$\hat{V} = \hat{U}\hat{K} \quad (\hat{K}c\hat{K}^{-1} = c^*)$$

と書くことが出来ます。