

曲がった時空でのスカラー場

曲がった時空上での場の理論のさわりの部分だけを見ていきます。一般的な時空で行うだけなので、量子重力は無関係です。

一般相対性理論をある程度は知っていることを前提にしています。共変微分とリーマンテンソルあたりを知っていればなんとかなると思います。また、一般相対性理論の「ラグランジアン密度」をざっと見ておくといいかもしれません。

どうでもいいことですが、ここでは単語を合わせるためにミンコフスキー空間と言わずにミンコフスキー時空としています (基本的に他のところでは時空と空間を明確に区別していないです)。

通常の場合の理論は特殊相対論の枠内で作られているので時空は平坦です。これを曲がった時空に持っていきます。曲がった時空 (一般的な時空) に持っていくには一般相対論の要求を満たす必要があります。一般相対論の要求はいろいろありますが、特殊相対論から一般相対論への変更で必要になるのは、一般座標変換に対して不変になれというものです (数学では微分同相写像 (diffeomorphism) と呼ばれます)。相対論的な場の理論で使われるラグランジアン (もしくは作用) は、ミンコフスキー時空上で作られているので、これを一般座標変換に対して不変になるように書き換えることは単純な手続きで出来ます。ミンコフスキー時空は曲がった時空の中の特別な時空なので、一般的な曲がった時空の記述に書き換えてやればいいです。つまり、微分 ∂_μ を共変微分 ∇_μ にし、ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ を一般的な計量 $g_{\mu\nu}$ にすればいいということです。ただし、作用には 4 次元空間積分があるので、これも一般座標変換に対して不変になるように、計量の行列式 $g = \det g_{\mu\nu}$ による $\sqrt{-g}$ をつけて不変体積要素 (一般相対論の「共変微分」参照) にしてやります ($d^4x \rightarrow d^4x\sqrt{-g}$)。もしくは、ラグランジアン密度につけると見て $\mathcal{L} \rightarrow \sqrt{-g}\mathcal{L}$ 。 $-g$ としているのは計量の符号が $(+, -, -, -)$ となっていることから分かるように $g < 0$ からです。煩わしければ絶対値をつけて $\sqrt{|g|}$ とすればいいです。これらによって書き換えられた作用は一般座標変換に対して不変になるので、曲がった時空上での記述を可能にします。このような書き換えを minimal coupling 処方と言います。minimal についているように必要最低限の置き換えです。

ラグランジアンが作れたので次は運動方程式がどうなるのかですが、一般相対論でもオイラー・ラグランジュ方程式は有効なので、それを解けばいいだけです。同様にエネルギー・運動量テンソルも出てくるので、まずはエネルギー・運動量テンソルを出しておきます。

座標変換として

$$x^{\mu'} = x^\mu - \epsilon^\mu(x)$$

を考えます。計量は座標変換に対して

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x)$$

と変換されます。作用は座標変換による計量の変化に対して不変であるべきなので、計量による変分を考えます。作用の計量による変分は

$$\delta S = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \delta g_{\mu\nu}(x) \quad (\delta g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x))$$

となります (計量で汎関数微分が行われているだけのただの変分の式)。ちなみに、場の変分を考えてもオイラー・ラグランジュ方程式で消えるので、この形になります。一般座標変換に対して不変にするために右辺に $\sqrt{-g}$ をくっつけて

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \delta g_{\mu\nu}(x)$$

ここで、 $\delta g_{\mu\nu}(x)$ の定義はリー微分 (一般相対性理論の「共変微分」参照) そのものなので共変微分によって

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu$$

となっていることと、計量の添え字は入れ替えに対して対称であることを使えば

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} (\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \nabla_\mu \epsilon_\nu \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \nabla_\mu \epsilon_\nu \quad (T^{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}(x)}) \\ &= - \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu (T^{\mu\nu} \epsilon_\nu) - \epsilon_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu})\end{aligned}$$

このとき、第1項は共変形でのガウスの定理 (V が積分する 4 次元時空の領域、 ∂V はその閉曲面)

$$\int_V d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu A^\mu = \int_{\partial V} A^\mu dS_\mu$$

から表面積分になるので (dS_μ は $\sqrt{-g}$ を含む)、表面において通常通り 0 になるとして

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \epsilon_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu}$$

そして、 $\delta S = 0$ と ϵ_μ が任意であるので

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

となります。よって、 $T^{\mu\nu}$ は一般化された対称なエネルギー・運動量テンソルです。
具体的に実数スカラー場を使ってみます。ミンコフスキー時空でのラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

このときの運動方程式 (クライン・ゴールドン方程式) は

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

となっています。これに minimal couplig の手続きを適用させた

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^2)$$

これが基本的な形になります。これはもろもろの事情（くり込みとか）で一般化され

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - m^2\phi^2 - \alpha R\phi^2)$$

α は任意定数、 R はリッチスカラーで、リーマンテンソルは

$$R^\alpha_{\eta\beta\gamma} = \partial_\beta\Gamma^\alpha_{\eta\gamma} - \partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\eta\beta} - \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\eta\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\Gamma^\mu_{\eta\gamma}$$

と定義しています。 $\Gamma^\alpha_{\eta\gamma}$ はクリストッフェル記号で

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

スカラー場の場合、共変微分と偏微分は等しいので（ $\nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi$ ）、構造はほとんど変わっていません。運動方程式はオイラー・ラグランジュ方程式から

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi) + \sqrt{-g}m^2\phi + \sqrt{-g}\alpha R\phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi) + m^2\phi + \alpha R\phi \end{aligned}$$

計量と $\sqrt{-g}$ の共変微分は 0 になるので

$$(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + m^2 + \alpha R)\phi = 0$$

また、共変微分部分はスカラー場の共変微分は偏微分と等しいことを使えば

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi &= g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu\phi) \\ &= g^{\mu\nu}(\partial_\mu\nabla_\nu\phi - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\nabla_\alpha\phi) \quad (\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha) \\ &= g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi) \\ &= g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu})\partial_\alpha\phi) \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(2\partial^\beta g_{\beta\rho} - g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu})\partial_\alpha\phi \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi - g^{\rho\alpha}(\partial^\beta g_{\beta\rho})(\partial_\alpha\phi) + \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}(g^{\mu\nu}\partial_\rho g_{\mu\nu})\partial_\alpha\phi \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + g_{\beta\rho}(\partial^\beta g^{\rho\alpha})(\partial_\alpha\phi) + \frac{1}{2}g^{\rho\alpha}\frac{1}{g}(\partial_\rho g)(\partial_\alpha\phi) \\ &= g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + (\partial_\mu g^{\mu\nu})(\partial_\nu\phi) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{1}{g}(\partial_\mu g)(\partial_\nu\phi) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) \end{aligned}$$

と書き換えることもできます。途中で

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} g^{\alpha\beta} = -g_{\mu\nu} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}, \quad \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\alpha} = g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}$$

を使っています (一般相対性理論の「テンソル解析」と「共変微分」参照)。もっと単純には、ラグランジアンにおいて、共変微分を偏微分に変えてしまい

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2 - \alpha R \phi^2)$$

これから

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + \sqrt{-g} (m^2 + \alpha R) \phi = 0$$

と求めます。

このエネルギー・運動量テンソルを求めてみます。必要なのは $g_{\mu\nu}$ による変分で、最初から求めるは面倒なので、一般相対性理論の「ラグランジアン密度」で求めた結果だけ持って来れば

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{-g} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ \delta (\sqrt{-g} R) &= -\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) + G_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ や、計量の共変微分は 0 になることに気を付けてください。クリストッフェル記号の変分は

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \delta (g^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\mu\nu}) = \Gamma_{\beta\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\beta\mu\nu} \\ &= \Gamma_{\beta\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \delta (\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

通常の微分があるとやりづらいので、共変微分に持っていくと

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \Gamma_{\beta\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu \delta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\beta\mu}^\lambda \delta g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} \\ &\quad + \partial_\nu \delta g_{\beta\mu} - \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \delta g_{\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} - \partial_\beta \delta g_{\mu\nu} + \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \delta g_{\nu\lambda} + \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \delta g_{\mu\lambda}) \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\beta\mu}^\lambda \delta g_{\nu\lambda} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} + \Gamma_{\beta\nu}^\lambda \delta g_{\mu\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} - \Gamma_{\mu\beta}^\lambda \delta g_{\nu\lambda} - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \delta g_{\mu\lambda}) \\ &= \Gamma_{\beta\mu\nu} \delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) - \Gamma_{\beta\mu\nu} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\gamma} \delta g_{\lambda\gamma} + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) - g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \delta g_{\lambda\gamma} + g^{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta g_{\beta\lambda} \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) \end{aligned}$$

クリストッフェル記号は下 2 つの添え字の入れかえに対して対称になっています。これを入れることで

$$\begin{aligned}
& g^{\mu\nu}(\nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\nabla_\nu g^{\alpha\beta}(\nabla_\mu \delta g_{\beta\alpha} + \nabla_\alpha \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\alpha}) - \nabla_\alpha g^{\alpha\beta}(\nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu})) \\
&= \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}(\nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\beta\alpha} + \nabla_\nu \nabla_\alpha \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\nu \nabla_\beta \delta g_{\mu\alpha}) - g^{\alpha\beta}(\nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + \nabla_\alpha \nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} - \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu})) \\
&= \frac{1}{2}(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\beta\alpha} - 2g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}) \\
&= g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g_{\beta\nu}
\end{aligned}$$

というわけで、作用の変分は

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2} \int d^4x \delta[\sqrt{-g}(g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^2 + \alpha R \phi^2)] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x [\sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + (\delta \sqrt{-g})(\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - m^2 \phi^2) + \alpha \phi^2 \delta(\sqrt{-g} R)] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [(\delta g^{\mu\nu}) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \\
&\quad - \alpha \phi^2 (g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha) + G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})] \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - \alpha \phi^2 (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g_{\beta\nu} + G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu})]
\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta}) \phi^2 \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \phi^2 \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta}) - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \phi^2 \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta}) \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \phi^2 \delta g_{\alpha\beta}) - \nabla_\nu (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\mu \phi^2) + g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi^2)
\end{aligned}$$

表面項を落として

$$\int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\alpha\beta}) \phi^2 = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \square \phi^2$$

$\nabla_\mu \nabla^\mu$ を $\square$ で書いています。同様にすることで

$$\int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\mu \delta g_{\beta\nu}) \phi^2 = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu \phi^2$$

これらに書き換えて

$$\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \delta g^{\mu\nu} \\
&\quad - \alpha (g^{\mu\nu} \square \phi^2 - \nabla^\mu \nabla^\nu \phi^2) \delta g_{\mu\nu} - \alpha \phi^2 G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}] \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [(\nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi) \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - m^2 \phi^2) \delta g_{\mu\nu} \\
&\quad - \alpha (g^{\mu\nu} \square \phi^2 - \nabla^\mu \nabla^\nu \phi^2) \delta g_{\mu\nu} - \alpha \phi^2 G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}]
\end{aligned}$$

なので、エネルギー・運動量テンソルの定義に合わせると

$$T^{\mu\nu} = \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi - m^2 \phi^2) + \alpha (g^{\mu\nu} \square \phi^2 - \nabla^\mu \nabla^\nu \phi^2) - \alpha \phi^2 G^{\mu\nu}$$

$\alpha = 0$ とすれば、「ネーターの定理」で出てきたスカラー場のエネルギー・運動量テンソルになります。
共形変換に対して不変とするとエネルギー・運動量テンソルに制限が加わります。無限小の共形変換として

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x)$$

こんなのを考え、変換の形は細かいことを無視して

$$\Lambda(x) = 1 + \epsilon(x)$$

となっているとすれば、計量の変分は

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \epsilon(x) g_{\mu\nu}$$

そうすると、上での話と同じことをすれば、場がオイラー・ラグランジュ方程式に従っているなら、作用の変分は

$$\delta S = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \int d^4x \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \epsilon(x) g_{\mu\nu}$$

これが 0 になるには

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} g_{\mu\nu} = 0$$

を要求します。そうすると、エネルギー・運動量テンソルに対して

$$g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T^\mu_\mu = 0$$

となり、エネルギー・運動量テンソルのトレースは0になります。というわけで、共形変換に対して作用が不変なときエネルギー・運動量テンソルのトレースが0になります。

フェルミオン場でも minimal coupling の手順で曲がった時空に持っていけます。ただし、スカラー場と違い、スピノールなので共変微分が特殊になります。スピノールの共変微分は一般相対性理論の「スピノールの共変微分」を見てください。

ゲージ場 (電磁場) では

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

が出てきますが、これを共変微分に置き換えても、クリストッフェル記号の性質 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ によって

$$\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha - (\partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha A_\alpha) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

となります。なので、ゲージ場のラグランジアンは d^4x が $d^4x\sqrt{-g}$ となるだけです。

次に正準量子化について見ていきます。ラグランジアン (古典的な運動方程式) はここまでの話から分かるように、時空が曲がっていようと問題なく作れています。後はハミルトン形式 (正準方程式) が作れば、正準量子化の手続きに従って量子化できます。ラグランジアンと違い面倒なのがここで、ハミルトン形式をどうやって作るかです。一般時空を考えると、時空と言っているように時間と空間が分離していないので、時間を変数として使えません (時間を変数にしないとハミルトン形式を作れない)。なので、時間を空間から分離させます。この話は一般相対性理論の「ハミルトニアン密度」でやっているものです。

ここでは数学的な背景を話としてするだけにします。超曲面については一般相対性理論の「超曲面」を見てください。まず、時間と空間を分離させるために時間を方向付けし、未来と過去方向の光円錐をちゃんと定義できる時空とします。時間に方向がつけられたので3次元空間を、それに対応する時間一定面で切られた空間的 (space-like) な超曲面 Σ_t として定義します。そして、時間的 (time-like) かヌル (光的) な曲線と1回だけ交差する空間的な超曲面を Cauchy 面と言います。超曲面を空間的にするのは、時間の方向 (超曲面の法線方向) を時間的 (time-like) に取るためです。超曲面が空間的であることは、超曲面の単位法線ベクトル n_μ が $n_\mu n^\mu = 1 > 0$ と与えられるからです (当たり前ですが時間方向と超曲面は直交)。

このように時間が方向付けられ、超曲面が Cauchy 面である時空のことを globally hyperbolic と言います。言い換えれば、時間的な曲線が超曲面と一回交差するなら、時空は globally hyperbolic となります。そして、時空が globally hyperbolic であるなら、ハミルトン形式を作れます。ミンコフスキー時空も globally hyperbolic になっていて、 $t=0$ の超曲面に対して全ての時間的な曲線が交差するようになっています。

グダグダと言ってきましたが、ようは時間が方向付けられた時間と空間が分離した時空を考えましようと言うことです。このように $3+1$ 分解 (3次元空間+時間) されたときの計量の形は、例えば

$$ds^2 = N^2 dt^2 - h_{ab} dx^a dx^b$$

となります ($a, b = 1, 2, 3$)。 $x^\mu = (t, x)$ とし、 N はラプス関数 (lapse function) と呼ばれ、 h_{ab} は超曲面上での計量です (一般相対性理論での「ハミルトニアン密度」でのシフトベクトルがない場合)。もっと簡単な状況にするなら $N=1$ としてしまえばいいです。ちなみに、時間 t を変数に持ち、超曲面を法線方向に通過する曲線 $t_\parallel^\mu$ を考えた時、 $t_\parallel^\mu$ は

$$t_\parallel^\mu = N n^\mu$$

と書け、これがラプス関数の定義です。

というわけで、globally hyperbolic な時空で量子化を行います。と言っても、量子化の手続き自体は全く同じです。違うのは、3次元空間が超曲面 Σ_t 上だというだけです。例えば、クライン・ゴルドン方程式の解 ϕ_1, ϕ_2 による内積は

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int d\Sigma_t^\mu (\phi_1^* \nabla_\mu \phi_2 - \phi_2 \nabla_\mu \phi_1^*) = i \int d\Sigma_t n^\mu (\phi_1^* \nabla_\mu \phi_2 - \phi_2 \nabla_\mu \phi_1^*)$$

と定義されます。 n_μ は Σ_t の単位法線ベクトルで、 $d\Sigma_t$ は Σ_t での微小体積要素です。 $d\Sigma_t$ は超曲面の計量 h_{ab} の行列式 $h = \det h_{ab}$ によって

$$d\Sigma_t = \sqrt{h} d^3x$$

となっています (3次元計量なのでマイナスはつかない)。ミンコフスキー時空 $x^\mu = (t, \mathbf{x})$, $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ では、 $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ 、 $d\Sigma_t = dx dy dz = d^3x$ なので、「クライン・ゴールドン場～複素スカラー場～」で出てきた内積と一致します。また、この内積は異なる Σ_t で等しく

$$(\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_1} = (\phi_1, \phi_2)_{\Sigma_2}$$

となっています。これは2つの差をガウスの定理を使って変形していくと0になることから確かめられます。

時間方向が定義されているので時間微分も問題なく定義できます。時間方向が決まっているので、超曲面上では時間微分は素直に、 $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$ となります。よって、 ϕ の共役量 π も

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

と定義でき、同時刻交換関係も

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \left(\int d\Sigma \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 1 \right)$$

とできます。そうすると、 ϕ は正エネルギー解 f_i と負エネルギー解 f_i^* によって

$$\phi = \sum_i (a_i f_i + a_i^\dagger f_i^*)$$

と展開できるので (非連続な場合)、生成、消滅演算子 $a^\dagger, a$ を作ることができ、量子化の手続きが終了します。

問題になるのはこの後で、生成、消滅演算子を定義したからといっても、一意的に真空状態を与えられません。理由は簡単で、 f_i を決定しきれないからです。特殊相対論の範囲内ではポアンカレ不変性の要求によって f_i の形が制限され、解の形が1つに決まります。しかし、一般相対論に行くとその制限が外れるために、解の形を1つに決めきれなくなります。そうすると、生成、消滅演算子にもその曖昧さが効くので、真空を決めきれなくなります。これが曲がった時空での面倒な問題であり、特徴的な部分です。

このあたりの話をもう少し見ていきます。ミンコフスキー時空はポアンカレ変換に対して不変という性質を持っています、これは相対論の言い方をすれば、ポアンカレ変換に対応するキリングベクトルが存在しているということです (相対論での対称性はキリング方程式による)。実際に、キリングベクトルは時間と空間の並進とローレンツ変換に対応して出てきます (一般相対性理論の「キリング方程式」参照)。なので、時間の並進に対応する時間的 (time-like) なキリングベクトルが1つだけ存在し、それは演算子で言えば $\partial/\partial t$ です (時間並進の生成子)。時間的なのは、時間方向なので、このキリングベクトルは $(1, 0, 0, 0)$ のようになっているからです。

量子論では時間発展はハミルトニアン演算子で与えられ、その固有値は正のエネルギーと仮定されています。ミンコフスキー時空が特殊なのは、これと同じことが時間並進のキリングベクトルで出来る点です。つまり、キリングベクトル $\partial/\partial t$ は時間発展であるために、固有関数 $u(t)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t) = -i\omega u(t) \quad (\omega > 0) \quad (1)$$

とでき、 ω を正のエネルギーとできます。そして、ミンコフスキー時空では場の方程式 (クライン・ゴールドン方程式とか) の形から $u(t) = e^{-i\omega t}$ とします。しかし、これはポアンカレ不変性を持つミンコフスキー時空だから言える事で、一般的な時空ではハミルトニアンと同じように使えるキリングベクトルが存在するとは限らないですし、存在したとしても複数ある場合もあります。このため、正エネルギー解を一意的に決められません。

(1) によって正エネルギーの固有関数が与えられるのはミンコフスキー時空だけでなく、定常的 (stationary) な時空の場合なら可能です。定常的であれば計量は時間独立なので、時間に対して対称性を持ちます。そうすれば、時間的なキリングベクトルが存在し、時間的なキリングベクトルが存在しているなら、(1) と同じように正エネルギーの固有値を持つ $\partial/\partial t$ の固有関数を設定できます (時間的なキリングベクトルを時間発展のベクトルとして扱える)。ただし、時間的なキリングベクトルが 1 つしか存在しないとは限らず、その場合は各キリングベクトルで異なった状態 (真空) となります。

ちなみに、定常的では超曲面とキリングベクトルが直交している必要はありません。直交しているときは静的 (static) になります。

時間発展によって正エネルギーを取り出す (1) は、より相対論的な用語で書くなら時間方向のリー微分 $\mathfrak{L}_t$ によって

$$\mathfrak{L}_t u(t) = -i\omega u(t)$$

リー微分はその定義から (一般相対性理論の「共変微分」参照)

$$\mathfrak{L}_t u = t^\mu \nabla_\mu u = t^\mu \partial_\mu u$$

t^μ は時間発展の方向のベクトルで、時間をパラメータに持つ曲線 $x^\mu(t)$ の接ベクトル $t^\mu = dx^\mu/dt$ です。このリー微分は時間方向の微分なので、時間方向が与えられている超曲面では $\partial/\partial t$ となって

$$\mathfrak{L}_t u = t^\mu \nabla_\mu u = t^\mu \partial_\mu u = \frac{\partial}{\partial t} u$$

そして、時間的なキリングベクトルを t^μ に対応させることで、キリングベクトルによって正エネルギー解を作れます。

このような話から、一般的な時空では正負のエネルギーを持つ固有関数を一意的に決められなくなります (時間発展の演算子の固有値としての正エネルギー)。そして、正負のエネルギーの固有関数が 1 つに決まらないために、場を直交規格化された固有関数で展開したときの係数である生成、消滅演算子も 1 つに決まらないです。もっと単純に言ってしまうと、ミンコフスキー時空ではクライン・ゴールドン方程式を満たすものとして

$$\phi(x) = e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

とできましたが、定常的 (もしくは静的) という条件を外した時空では

$$\phi(x) = u(t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

のようになって、 $u(t)$ がよく分からなくなる (一意的に決まらなくなる) ということです。かなり雑ですが、クライン・ゴールドン方程式が波動方程式の形にならないから平面波が使えないとも言えます。定常的な場合 (計量が時間独立。静的なら $g_{0i} = 0$) なら、クライン・ゴールドン方程式の $\partial^2/\partial t^2$ 部分が変更されないために $e^{-i\omega t}$ が使えます。

時間発展のキリングベクトルから正エネルギー解を与えることはできなくても、直交規格化された解なら作れるので (具体的な形は分からなくても)、それを正負のエネルギー解として、場を展開して量子化しようというのが上での話です。

いろいろ言って来ましたが、結局のところ、与えられた場の方程式をどのような初期値や境界条件を与えて解くかという問題 (Cauchy 問題) です。そして、求められた解が与えられた条件で変わる可能性があるので一意的に決まるとは限りません (数学的に言えば、場の方程式の演算子の自己共役拡大が一意的に決まらない)。

また、同じことは空間座標でも言えるので、 $e^{ip \cdot x}$ が使えるのかも場の方程式の性質 (時空の性質) 次第です。これは調和解析 (harmonic analysis) と呼ばれる分野の話です。簡単に言えば、群論によってフーリエ変換を一般化した話です。 $e^{ip \cdot x}$ が使えない理由を簡単に量子論の視点で言うと、運動量演算子は空間並進の生成子として与えられているので、空間並進の不変性を持たない時空では運動量表示に出来ないからです。このため、一般時空ではフーリエ変換によって運動量表示に持って行って計算するという方法が使えません (波動関数のフーリエ変換は運動量が空間並進の生成子であることから作られている)。

微分方程式の解によって生成、消滅演算子が複数現れることを、簡単な計量で具体的に見ます。平坦なロバートソン・ウォーカー計量

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

を考えます (一般相対性理論の「ロバートソン・ウォーカー解」参照)。これは

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t a^{-1}(t') dt' , \quad d\xi = a^{-1} dt , \quad C(\xi) = a^2(t)$$

として

$$ds^2 = C(\xi)(d\xi^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)$$

と書き換えます。そうすると、計量 $g_{\mu\nu}$ はミンコフスキー時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ を使って

$$g_{\mu\nu} = C\eta_{\mu\nu} , \quad g^{\mu\nu} = C^{-1}\eta^{\mu\nu} , \quad -g = -\det g_{\mu\nu} = C^4$$

これをクライン・ゴールドン方程式

$$(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + m^2 + \alpha R)\phi = 0$$

に入れば、第一項は

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu &= \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) \\ &= \frac{1}{C^2}\partial_\mu(C^2g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) \\ &= \frac{1}{C^2}\partial_0(C^2g^{00}\partial_0\phi) + \frac{1}{C^2}\partial_i(C^2g^{ij}\partial_j\phi) \\ &= \frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(C\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\phi + \frac{1}{C^2}\partial_i(C\eta^{ij}\partial_j\phi) \\ &= \frac{1}{C^2}\frac{\partial C}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\phi + \frac{1}{C}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\phi + \frac{1}{C}\eta^{ij}\partial_i\partial_j\phi \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{C^2} \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{C} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{C} \eta^{ij} \partial_i \partial_j + m^2 + \alpha R \right) \phi \\
&= \left(\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \eta^{ij} \partial_i \partial_j + C m^2 + \alpha C R \right) \phi
\end{aligned}$$

ここで、 $\chi(\xi, \mathbf{x}) = a(\xi) \phi(\xi, \mathbf{x})$ とすれば ($C(\xi) = a^2(\xi) = a^2(t)$)、微分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi}{\partial \xi} &= \frac{\partial a}{\partial \xi} \phi + a \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \phi + 2 \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + a \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = a^{-1} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \chi + 2 \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + a \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}
\end{aligned}$$

となるので、微分部分は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad \left(\frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial a^2}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \\
&= \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \chi - \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\
&= \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} \chi
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a} \eta^{ij} \partial_i \partial_j + \frac{1}{a} a^2 m^2 + \frac{1}{a} \alpha a^2 R \right) \chi(\xi, \mathbf{x}) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + \eta^{ij} \partial_i \partial_j + a^2 m^2 + a^2 \alpha R \right) \chi(\xi, \mathbf{x})
\end{aligned}$$

ξ 依存部分だけが通常のクライン・ゴールドン方程式と異なっているので、3次元運動量部分は $e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$ として

$$\chi(\xi, \mathbf{x}) = u_{\mathbf{p}}(\xi) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$$

と置けば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a(\xi)} \frac{\partial^2 a(\xi)}{\partial \xi^2} - \mathbf{p}^2 + a^2(\xi) m^2 + a^2(\xi) \alpha R \right) u_{\mathbf{p}}(\xi) = 0$$

R の項を無視して、 $m = 0$ とし、 a を定数だとすれば

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \mathbf{p}^2 \right) u_{\mathbf{p}}(\xi) = 0 \quad (2)$$

となって、質量 0 のクライン・ゴールドン方程式になります。なので、この場合では

$$u(\xi) = e^{-i\omega\xi} \quad (\omega = |p|)$$

とできます。しかし、 a を定数としないと

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a(\xi)} \frac{\partial^2 a(\xi)}{\partial \xi^2} - p^2 + a^2(\xi)m^2 + a^2(\xi)\alpha R \right) u(\xi) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - p^2 + M^2(\xi) \right) u(\xi) \quad (M^2(\xi) = a^2(\xi)m^2 - \frac{1}{a(\xi)} \frac{\partial^2 a(\xi)}{\partial \xi^2} + a^2(\xi)\alpha R) \end{aligned}$$

となり、新しい ξ 依存性があるために、もはや $u(\xi) = e^{-i\omega\xi}$ が解になりません。このため、正エネルギー解を基底とする場の展開をこの段階では決めることが出来なく、方程式の解がどうなるのかを調べる必要があります。

というわけで、計量が静的 (a が定数) なら、ミンコフスキー時空でのクライン・ゴールドン方程式と同じようにでき、そうでないなら同じことができないというのが分かります。場の展開 (方程式の一般解の形) は

$$\chi(\xi, x) = \int d^3p (a_p u_p(\xi) e^{ip \cdot x} + a_p^\dagger u_p^*(\xi) e^{-ip \cdot x}) \quad (3)$$

となり (定数は無視しています)、生成、消滅演算子 $a_p^\dagger, a_p$ は u_p に依存して決まります。

ここで、例えば $\alpha = 0$, $m = 0$ で

$$a(t) = a \quad (t < t_0)$$

として、 $t < t_0$ で $a(t)$ は定数としてみます。そうすると、 $t < t_0$ では (2) となるので、 $\chi(\xi, x)$ の展開に $u_p(\xi) = e^{-i\omega\xi}$ がこの領域では使えます。しかし、 $t > t_0$ では $a(t)$ なので (3) です。つまり、領域によって $\chi(\xi, x)$ の展開が変わります。これに伴って展開係数 $a_p^\dagger, a_p$ も $t < t_0$ と $t > t_0$ で変わります。このように、微分方程式の解が条件に対して変わるので (今の場合は、平坦なロバートソン・ウォーカー計量を $t < t_0$ でミンコフスキー計量とみなせるようにしている)、生成、消滅演算子が 1 つに決まらなくなります。

また、平坦なロバートソン・ウォーカー計量の特徴として、計量が

$$ds^2 = C(\xi)(d\xi^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)$$

となっていることから分かるように、共形変換 $g'_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ によって $C(\xi)$ を消すと、ミンコフスキー計量になるというのがあります。なので、共形不変なクライン・ゴールドン方程式を使えば (ここでは示しませんが $\alpha = 1/6$ にすればいい)、ミンコフスキー時空と同じにできます。