次元正則化

高次のファインマン図では運動量積分が発散しています。それをどうにかする方法として次元正則化を使います。この方法は非可換ゲージでのゲージ不変性を壊すことなく行えるという利点があります (正確には、Pauli-Villars の方法だと質量ありの非可換ゲージ場でゲージ不変性を保証できない)。

高次のファインマン図に現れる運動量積分の発散が収束するように上手いこと手を加えます。一番単純なのが積分の上限に制限を入れる方法で、QED のところで使った Pauli-Villars の正則化がそれの一種です。ここでは違う方法を示します。

まずはウィック回転を導入します。これは経路積分のところで出てきた複素平面上で実軸を虚軸に回転させるというものです。回転させることで積分をユークリッド空間において実行できるようになります。例えば

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-a)^m}$$

という積分があったときに、

$$l^0 = il_E^0\ ,\ \boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}_E\ ,\ id^4l_E = d^4l$$

という置き換え (E はユークリッドであることを表しています) をすることで

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-a)^m} &= \int \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{d^4l_E}{(-l_E^2-a)^m} \qquad (l_E^2=(l^0)^2+\boldsymbol{l}^2)\\ &= \frac{i}{(-1)^m(2\pi)^4}\int d^4l_E\frac{1}{(l_E^2+a)^m}\end{aligned}$$

ここでの l_E^0 の積分範囲は $-\infty$ から $+\infty$ です。なので、式上では上での置き換えだけをすればいいです。

これはウィック回転は積分の変数変換ではなく、l^0 を虚軸に解析接続することだからで、l^0 を虚軸に接続することは l_E^0 の複素平面上での実軸に対応させるからです。

また、このように解析接続であるために、特異点の位置が問題になります。しかし、今みている形では問題なく解析接続が行えます。かなり雑に言えば、相互作用のない伝播関数は

$$\frac{1}{p^2-m^2+i\epsilon}=\frac{1}{p_0^2-(|\boldsymbol{p}|^2+m^2-i\epsilon)}$$

となっているために、極の位置は $p_0=\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}-i\epsilon,\ -\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}+i\epsilon$ であるので、p_0 の複素平面上で p_0 から ip_0 へ回転 (左回転) させるときに極がいないからです（より細かくは極の寄与が発散に寄与しない有限の値なら無視できると考える。下の補足 1 参照)。特異点の位置がはっきりしないより複雑な形になると注意が必要になります。解析接続が煩わしければ、後で見るようにミンコフスキー空間のままでも積分を行えます。

ここで 4 次元ユークリッド空間での微小体積要素 $d^4x=r^3\sin^2\psi\sin\theta d\phi d\theta d\psi dr$ を使うことで、d^4l_E を

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-a)^m}=\frac{i}{(-1)^m(2\pi)^4}\int d\Omega_4\int_0^\infty dl_E\frac{l_E^3}{(l_E^2+a)^m}$$

$d\Omega_4$ の積分は 4 次元単位球の表面積 $2\pi^2$ なので

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{(-1)^m(2\pi)^4}\int d\Omega_4\int_0^\infty dl_E\frac{l_E^3}{(l_E^2+a)^m} &= \frac{i(-1)^m}{8\pi^2}\int_0^\infty dl_E\frac{l_E^3}{(l_E^2+a)^m}\\
&= \frac{i(-1)^m}{8\pi^2}\int_0^\infty dl_E^2\frac{1}{2l_E}\frac{l_E^3}{(l_E^2+a)^m}\\
&= \frac{i(-1)^m}{16\pi^2}\int_a^\infty dx\frac{x-a}{x^m}\qquad (x=l_E^2+a)\\
&= \frac{i(-1)^m}{16\pi^2}\Big[\frac{1}{-m+2}\frac{1}{x^{m-2}}-\frac{a}{-m+1}\frac{1}{x^{m-1}}\Big]_a^\infty\\
&= \frac{i(-1)^m}{16\pi^2}\Big(\frac{a}{-m+1}\frac{1}{a^{m-1}}-\frac{1}{-m+2}\frac{1}{a^{m-2}}\Big)\\
&= \frac{i(-1)^m}{16\pi^2}\big(-\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-2}\big)\frac{1}{a^{m-2}}\\
&= \frac{i(-1)^m}{16\pi^2}\frac{1}{(m-1)(m-2)}\frac{1}{a^{m-2}}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-a)^m}=\frac{i(-1)^m}{16\pi^2}\frac{1}{(m-1)(m-2)}\frac{1}{a^{m-2}}
$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{l^2}{(l^2-a)^m} &= \frac{i(-1)^{m-1}}{8\pi^2}\int_0^\infty dl_E\frac{l_E^5}{(l_E^2+a)^m}\\
&= \frac{i(-1)^{m-1}}{8\pi^2}\int_a^\infty dx\frac{(x-a)^2}{2x^m}\\
&= \frac{i(-1)^{m-1}}{16\pi^2}\frac{1}{(m-1)(m-2)(m-3)}\frac{1}{a^{m-3}}
\end{aligned}
$$

と計算されます。

次にファインマンパラメータと呼ばれるもので、これは直接次元正則化に関わってくるものでなく、積分の形を変形するのに使います。

$$
\frac{1}{AB}=\int_0^1 dx\frac{1}{(xA+(1-x)B)^2}=\int_0^1 dxdy\delta(x+y-1)\frac{1}{(xA+yB)^2}
$$

$$
\frac{1}{AB^n}=\int_0^1 dxdy\delta(x+y-1)\frac{ny^{n-1}}{(xA+yB)^{n+1}}
$$

$$
\frac{1}{A_1A_2\cdots A_n}=\int_0^1 dx_1\cdots dx_n\delta\big(\sum x_i-1\big)\frac{(n-1)!}{(x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n)^n}
$$

このようなものです。一番目の式の導出は

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\big(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\big)=\frac{1}{B-A}\int_a^b\frac{dz}{z^2}$$

これに対して $z=xA+(1-x)B$ とすることで導け、一番目の式を B で微分することで二番目の式になり、三番目の式は一番目の式と二番目の式から帰納法的に導かれます。

次元正則化の方法に移っていきます。どういう積分を実行したいのかというと最初にウィック回転で使った積分

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-a)^n}$$

のようなものです。上でみたように $n=2$ ならこの積分は明らかに発散しているんですが、実際に振幅の計算をするときには $n=2$ が現れます。なのでこの積分を数学的に扱えるものにしないとどうにもなりません。どうするのかというと次元を 4 から d 次元にして、ウィック回転を行います。ウィック回転に伴う符号とかは無視して

$$\int\frac{d^dl_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l_E^2+a)^n}$$

これを計算していきます。ただし、ウィック回転しなくても積分は実行できます。これは後で見ます。

角度積分部分を分離して

$$\int\frac{d^dl_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l_E^2+a)^n}=\int\frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dl_E\frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2+a)^n}$$

$d=4$、$n=1,2$ で明らかに積分が発散しています。d 次元単位球の表面積はガンマ関数を使って

$$\int d\Omega_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

実際に三次元でやってみれば

$$2\pi^{3/2}\frac{1}{\Gamma(3/2)}=2\pi^{3/2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}=4\pi$$

となって三次元単位球の表面積になります。l_E 積分は

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2+a)^n} &= \frac{1}{2}\int_0^\infty d(l_E)^2 \frac{l_E^{d-1}}{l_E}\frac{1}{(l_E^2+a)^n} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty d(l_E)^2 \frac{(l_E^2)^{d/2-1}}{(l_E^2+a)^n} \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^0 dx \frac{(l_E^2+a)^2}{a}\frac{(l_E^2)^{d/2-1}}{(l_E^2+a)^n} \qquad (x = \frac{a}{l_E^2+a}) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-2}}\left(\frac{a}{x}-a\right)^{d/2-1} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{a}{x}\right)^{n-2}}\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{d}{2}-1}(1-x)^{d/2-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}}\int_0^1 dx\ x^{-\frac{d}{2}+n-1}(1-x)^{d/2-1}
\end{aligned}
$$

これにベータ関数の定義

$$
B(\alpha,\beta) = \int_0^1 dx\ x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
$$

を使うことで

$$
\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2+a)^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l_E^2+a)^n} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}
\end{aligned}
$$

これが積分の結果になります。d 次元としているために、積分の発散がなくなり収束した形が求まっています。しかし、ガンマ関数の性質から $n=2$ としたとき $d=4,6,\cdots$ で極を持っています (下の補足参照)。つまり、4 次元では元の積分通り発散が現れることになります。

次元 d は最後には 4 にしなければならないので、$d=4$ 付近での振舞いが重要になります。なので、$n=2$、$d\to 4$ での振舞いを近似をとることで見てみます。そのために、ガンマ関数の関係

$$
\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{\epsilon}+\psi(n+1)+O(\epsilon)\right)
$$

$$
\psi(n+1) = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma
$$

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}$$

$$\psi(1) = -\gamma$$

を使うことで

$$\Gamma(1-\frac{d}{2}) = \Gamma(-1+\frac{\epsilon}{2}) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + \cdots \qquad (\epsilon = 4-d)$$

$$\Gamma(2-\frac{d}{2}) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \cdots$$

γ はオイラー定数で、$\gamma \sim 0.5772$ です。他の部分も ϵ が微小だとして展開することで

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}}(\frac{1}{a})^{\frac{\epsilon}{2}}\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) &= \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{(4\pi)^{-\epsilon/2}}(\frac{1}{a})^{\frac{\epsilon}{2}}\Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2}\exp[\frac{\epsilon}{2}\log 4\pi]\exp[-\frac{\epsilon}{2}\log a](\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \cdots) \qquad (x^\epsilon = \exp[\epsilon \log x]) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2}\Big((1+\frac{\epsilon}{2}\log 4\pi + \cdots)(1-\frac{\epsilon}{2}\log a + \cdots)(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \cdots)\Big) \\
&\simeq \frac{1}{(4\pi)^2}(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log a \cdots)
\end{aligned}$$

このようになり、ϵ の項で極を持ちます。この結果は Pauli-Villars の正則化での、例えば真空偏極で比較すれば

$$\log(\frac{\Lambda^2}{m^2}) + \Pi^R(q^2)$$

これの対数発散部分に相当することがわかります。

また、同様にしていくことで

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d}\frac{l_E^2}{(l_E^2+a)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}(\frac{1}{a})^{n-\frac{d}{2}-1}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}$$

という結果が導かれ、これと最初に導いた

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l_E^2+a)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}}(\frac{1}{a})^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

これらが次元正則化での基本的な積分の結果になります。

注意として、例えば積分に現れる $l_\mu l_\nu$ から $l\cdot l = l^2$ を作って計算を行う時がありますが、その時は d 次元において

$$g^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = l^2$$

から、$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = d$ より

$$l_\mu l_\nu = \frac{g_{\mu\nu}l^2}{d}$$

という特殊な置き換えを行います (全空間積分の対称性から、$\mu = \nu$ のときだけに積分が消えないということを反映させるため)。これは 4 次元での場合でも同じです。

　d 次元としたことで γ 行列の関係も修正されて

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu}$$

$$\delta^\mu_\mu = d$$

これが基本関係なので、$d = 4 - \epsilon$ を使って

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 - \epsilon$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -(2-\epsilon)\gamma^\nu$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + \epsilon\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$$

このようになります。トレースは

$$\mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = f(d)g_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda] = f(d)(g_{\mu\nu}g_{\rho\lambda} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})$$

$f(d)$ は $f(d=4) = 4$ となるような関数だとします。$f(4) = 4$ であれば具体的な $f(d)$ の形は必要としません。

　積分を行うに当たってユークリッド空間に移しましたが、ミンコフスキー空間のままでもできます。その場合を見ていきます。積分として

$$I = \int d^dp \frac{1}{(p^2 + 2p\cdot q - m^2)^n}$$

を考えます。$p\cdot q$ の項を加えているのは後のためです。p_0 を除いた $d-1$ 次元はユークリッド空間なので、p_0 積分を分離して

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int d^{d-1}p \frac{1}{(p^2 + 2p\cdot q - m^2)^n}$$

とします。ここで、積分自体はローレンツ不変な形になっていることから、q_μ を $q_\mu = (q_0, 0)$ という座標系で計算を行うことにします ($q^2 = q_\mu q^\mu = q_0^2$)。こうすれば角度積分に引っかからなくなります。そうすると、$d-1$ 次元ユークリッド空間での角度積分部分は

$$\int d\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}$$

なので

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^{d-2} \frac{1}{(p_0^2 - |\boldsymbol{p}|^2 + 2p_0q_0 - m^2)^n} \int d\Omega_{d-1} \\
&= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^{d-2} \frac{1}{(p_0^2 - |\boldsymbol{p}|^2 + 2p_0q_0 - m^2)^n} \\
&= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^{d-2} \frac{1}{((p_0+q_0)^2 - q^2 - |\boldsymbol{p}|^2 - m^2)^n} \\
&= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0' \int_0^\infty d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^{d-2} (p_0'^2 - |\boldsymbol{p}|^2 - q^2 - m^2)^{-n} \qquad (p_0' = p_0 + q_0)
\end{aligned}$$

ベータ関数は

$$B(\alpha, \beta) = 2\int_0^\infty dx\ x^{2\alpha-1}(1+x^2)^{-\alpha-\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

とも与えることができるので、これを変形して

$$\begin{aligned}
B(\alpha, \beta) &= 2\int_0^\infty dx\ x^{2\alpha-1}(1+x^2)^{-\alpha-\beta} \\
&= \frac{2}{M}\int_0^\infty dy\ (\frac{y}{M})^{2\alpha-1}(1+\frac{y^2}{M^2})^{-\alpha-\beta} \qquad (y = xM) \\
&= 2\frac{(M^2)^{\alpha+\beta}}{M} M^{-2\alpha+1} \int_0^\infty dy\ y^{2\alpha-1}(M^2+y^2)^{-\alpha-\beta} \\
&= 2(M^2)^\beta \int_0^\infty dy\ y^{2\alpha-1}(y^2+M^2)^{-\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

となるので

$$\int_0^\infty dy\ y^{2\alpha-1}(y^2+M^2)^{-\alpha-\beta} = \frac{1}{2(M^2)^\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

後は

$$\alpha = \frac{1}{2}(d-1)\ ,\ \beta = n - \frac{1}{2}(d-1)$$

と置き換えることで

$$
\begin{aligned}
I &= (-1)^{-n}\frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0'\int_0^{\infty}d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^{d-2}(|\boldsymbol{p}|^2-p_0'^2+q^2+m^2)^{-n} \\
&= (-1)^{-n}\frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0'\int_0^{\infty}d|\boldsymbol{p}|\ |\boldsymbol{p}|^{d-2}(|\boldsymbol{p}|^2+M^2)^{-n} \\
&= (-1)^{-n}\frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(n-\frac{d-1}{2})}{2\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0'(M^2)^{-n+(d-1)/2} \\
&= (-1)^{-n}\pi^{(d-1)/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0'\big(-p_0'^2+q^2+m^2\big)^{-n+(d-1)/2} \\
&= (-1)^{-n}(-1)^{-n+(d-1)/2}\pi^{(d-1)/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0'\big(p_0'^2-q^2-m^2\big)^{-n+(d-1)/2} \\
&= \big(-1\big)^{-2n+(d-1)/2}\pi^{(d-1)/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{\infty}dp_0'\big(p_0'^2-q^2-m^2\big)^{-n+(d-1)/2}
\end{aligned}
$$

p_0' 積分も同じようにベータ関数を使えば

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}dp_0'\big(p_0'^2-q^2-m^2\big)^{-n+(d-1)/2} \\
&\qquad = 2\int_0^{\infty}dp_0'\big(p_0'^2-q^2-m^2\big)^{-n+(d-1)/2} \\
&\qquad = 2\int_0^{\infty}dp_0'\big(p_0'^2+A^2\big)^{-n+(d-1)/2} \\
&\qquad = \big(A^2\big)^{1/2-n+(d-1)/2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(-\frac{1}{2}+n-\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n-(d-1)/2)} \qquad (\alpha=\frac{1}{2}\ ,\ \beta=-\frac{1}{2}+n-(d-1)/2) \\
&\qquad = \sqrt{\pi}\big(-q_0^2-m^2\big)^{-n+d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n-(d-1)/2)}
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
I &= \big(-1\big)^{-2n+(d-1)/2}\sqrt{\pi}\pi^{(d-1)/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d-1}{2})}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n-(d-1)/2)}\big(-q^2-m^2\big)^{-n+d/2} \\
&= \big(-1\big)^{-2n+(d-1)/2}\big(-1\big)^{-n+d/2}\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\big(q^2+m^2\big)^{-n+d/2} \\
&= \big(-1\big)^{2n-(d-1)/2}\big(-1\big)^{-n+d/2}\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\big(q^2+m^2\big)^{-n+d/2} \\
&= \big(-1\big)^{n+1/2}\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\big(q^2+m^2\big)^{-n+d/2} \\
&= i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\big(q^2+m^2\big)^{-n+d/2}
\end{aligned}
$$

よって

$$\int d^dp \frac{1}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^n} = i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}(q^2+m^2)^{-n+d/2}$$

と求まります。上でのユークリッド化した計算は

$$\begin{aligned}\int \frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l^2-m^2)^n} = i\int \frac{d^dl_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(-l_E^2-m^2)^n} &= \frac{i}{(-1)^n}\int \frac{d^dl_E}{(2\pi)^d}\frac{1}{(l_E^2+m^2)^n}\\ &= i(-1)^n\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}(\frac{1}{m^2})^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\end{aligned}$$

となっているので、これに $(2\pi)^d$ をかけることで

$$\int d^dl\frac{1}{(l^2-m^2)^n} = i(-1)^n\frac{(2\pi)^d}{(4\pi)^{d/2}}(\frac{1}{m^2})^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} = i(-1)^n\pi^{d/2}(\frac{1}{m^2})^{n-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

となり、$q^2=0$ $(q_\mu=(q_0,0))$ とした場合と一致します。

q_μ を入れていたのに理由があって、I を q_μ で微分すると

$$I_1^\mu = \frac{\partial}{\partial q_\mu}I = -n\int d^dp\frac{2p^\mu}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^{n+1}}$$

となるので、分子に p^μ がい場合になります。なので、これは

$$\begin{aligned}I_1^\mu =& -n\int d^dp\frac{2p^\mu}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^{n+1}}\\ =& \frac{\partial}{\partial q_\mu}I\\ =& i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\frac{\partial}{\partial q_\mu}(q^2+m^2)^{-n+d/2}\\ =& i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}(-n+\frac{d}{2})\frac{2q^\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+1}} \qquad (\frac{\partial q^2}{\partial q_\mu}=\frac{\partial q_\nu q^\nu}{\partial q_\mu}=2g^{\mu\nu}q_\nu=2q^\mu)\\ =& -i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{(n-\frac{d}{2})\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\frac{2q^\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+1}}\\ =& -i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\frac{2q^\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+1}} \qquad (n\Gamma(n)=\Gamma(n+1))\end{aligned}$$

よって

$$-n\int d^dp\frac{2p^\mu}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^{n+1}} = -i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\frac{2q^\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+1}}$$

$n+1$ を n とすることで

$$\int d^dp \frac{p^\mu}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^n} = i(-1)^{n-1}\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{(n-1)\Gamma(n-1)}\frac{q^\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2}}$$

$$= i(-1)^{n-1}\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\frac{q^\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2}}$$

左辺は全空間積分なので、p^μ の符号を反転させたとき符号が変わる $p\cdot q$ の項がなくなる $q^\mu=0$ では 0 になります。
　さらに q_μ で微分して

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial q_\mu}I =& \; -n\int d^dp\frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{2p^\mu}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^{n+1}} \\
=& \; -n(-n-1)\int d^dp\frac{4p^\mu p_\mu}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^{n+2}} \\
=& \; 4n(n+1)\int d^dp\frac{p^2}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^{n+2}}
\end{aligned}$$

積分後のものを微分すれば

$$\begin{aligned}
I_2 =& \; \frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{\partial}{\partial q_\mu}I \\
=& \; -i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\frac{2q^\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+1}} \\
=& \; -i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\Big(\frac{2g^\mu{}_\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+1}}+(-n+\frac{d}{2}-1)\frac{4q^\mu q_\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+2}}\Big) \\
=& \; -i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\Big(\frac{2d}{(q^2+m^2)^{n-d/2+1}}+(-n+\frac{d}{2}-1)\frac{4q^\mu q_\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+2}}\Big)
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&\int d^dp\frac{p^2}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^{n+2}} \\
&= \; -\frac{1}{4n(n+1)}i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\Big(\frac{2d}{(q^2+m^2)^{n-d/2+1}}+(-n+\frac{d}{2}-1)\frac{4q^\mu q_\mu}{(q^2+m^2)^{n-d/2+2}}\Big)
\end{aligned}$$

$n+2$ を n にして

$$
\begin{aligned}
&\int d^dp\frac{p^2}{(p^2+2p\cdot q-m^2)^n}\\
&=\ -\frac{1}{4(n-2)(n-1)}i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{\Gamma(n-1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n-2)}\Big(\frac{2d}{(q^2+m^2)^{n-d/2-1}}+(-n+1+\frac{d}{2})\frac{4q^2}{(q^2+m^2)^{n-d/2}}\Big)\\
&=\ -i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{1}{\Gamma(n)}\Big(\frac{d}{2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{(q^2+m^2)^{n-d/2-1}}-\frac{q^2\Gamma(n-\frac{d}{2})}{(q^2+m^2)^{n-d/2}}\Big)\\
&=\ -i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{1}{\Gamma(n)}\Big(\frac{d}{2}(q^2+m^2)^{-1}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{(q^2+m^2)^{n-d/2}}-\frac{q^2\Gamma(n-\frac{d}{2})}{(q^2+m^2)^{n-d/2}}\Big)\\
&=i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{1}{\Gamma(n)}\frac{1}{(q^2+m^2)^{n-d/2}}\Big(q^2\Gamma(n-\frac{d}{2})-\frac{d}{2}(q^2+m^2)^{-1}\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)\Big)
\end{aligned}
$$

これも $q^2=0$ とすれば

$$
\int d^dp\frac{p^2}{(p^2-m^2)^n}=-i(-1)^n\pi^{d/2}\frac{d}{2}(\frac{1}{m^2})^{n-d/2+1}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}
$$

となります。$1/(2\pi)^d$ をかければ

$$
\int\frac{d^dp}{(2\pi)^d}\frac{p^2}{(p^2-m^2)^n}=-i(-1)^n\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}(\frac{1}{m^2})^{n-d/2+1}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}
$$

これは上で結果だけ示した

$$
\begin{aligned}
\int\frac{d^dl}{(2\pi)^d}\frac{l^2}{(l^2-m^2)^n}&=\ -i(-1)^n\int\frac{d^dl_E}{(2\pi)^d}\frac{l_E^2}{(l_E^2+m^2)^n}\\
&=\ -i(-1)^n\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}(\frac{1}{m^2})^{n-d/2-1}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}
\end{aligned}
$$

と一致します。

・補足 1

ユークリッド空間へのウイック回転を行うとき、極がいるとどのようになるかを簡単に示します。ウイック回転の進行上に極がいる場合を考えるために、積分経路を

$$
\int_{-\infty}^{\infty}dk_0+\int_{C_1}dk_0+\int_{+i\infty}^{-i\infty}dk_0+\int_{C_2}dk_0
$$

とします。C_1 は $+R$ から $+iR$ へ向かう弧 (4 分円)、C_2 は $-iR$ から $-R$ へ向かう弧です ($R\to\infty$)。なので、全体の経路は $-R$ から $+R$ にいき、iR へ向かい (C_1)、$-iR$ へ進んだら $-R$ へ行きます (C_2)。C_1,C_2 の内側に極がいると、ウイック回転は極にあたります。

実際の積分で出てくるのは基本的に

$$
\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\ ,\ \frac{1}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}
$$

という形の組み合わせです。このとき $1/((p+k)^2-m^2+i\epsilon)$ において

$$p_0 > \sqrt{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2+m^2}$$

なら、積分経路 C_2 の内側に極 $z=\sqrt{(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k})^2+m^2}-p_0-i\epsilon$ がいます。なので、このとき

$$i\Big(\int_{-\infty}^{\infty} dk_0+\int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0+\int_{C_1} dk_0+\int_{C_2} dk_0\Big)\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon} \tag{1}$$

という積分を考えると、積分経路は閉じているので留数定理から極 z を拾ったものになります。

次に C_1 からの寄与を調べます。そのために

$$\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}=\frac{1}{i}\int_0^\infty d\alpha \exp[i\alpha(k^2-m^2+i\epsilon)]\frac{1}{i}\int_0^\infty d\alpha \exp[i\beta((p+k)^2-m^2+i\epsilon)]$$

と変形します。さらに、$k_0=Re^{i\phi}$ とすれば

$$\int_{C_1} dk_0=\int_0^{\pi/2} d\phi\ iRe^{i\phi}$$

なので、大雑把には

$$\int_0^{\pi/2} d\phi\ iR\exp[i\alpha R^2(\cos 2\phi+i\sin 2\phi)+i\phi]$$

という積分が出てき、このため $R\to\infty$ で C_1 からの寄与は消えます (例えばフレネルの公式の証明とほぼ同じ)。C_2 でも同様なので

$$\begin{aligned}
&i\Big(\int_{-\infty}^{\infty} dk_0+\int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0+\int_{C_1} dk_0+\int_{C_2} dk_0\Big)\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}\\
&=i\Big(\int_{-\infty}^{\infty} dk_0+\int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0\Big)\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}
\end{aligned}$$

(1) の留数定理による積分結果を F とすれば

$$\begin{aligned}
i\int_{-\infty}^{\infty} dk_0\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}&=F-i\int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\frac{1}{(p+k)^2-m^2+i\epsilon}\\
&=F-\int_{-\infty}^{\infty} dk_4\frac{1}{k_E^2+m^2-i\epsilon}\frac{1}{(p+k_E)^2+m^2-i\epsilon}\qquad(k_0=ik_4)
\end{aligned}$$

このようにウィック回転の方向に極がいると、余計な項が出てきます (C_1, C_2 内に極がいなければ $F=0$)。しかし、F が有限であるなら発散とは無関係なので、くり込みに寄与しません。なので、極の位置がはっきり分かるループ計算ではウィック回転を何も気にせずに行います。

・補足 2

ガンマ関数の極を求めます。ガンマ関数の定義は

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}\qquad(\mathrm{Re}z>0)$$

と与えられています (z は複素数で、Rez は z の実部)。Re$z>0$ は積分が収束するために必要な条件にもなっているので、それを見ておきます。まず積分を

$$\int_0^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}=\int_0^1 dt\ t^{z-1}e^{-t}+\int_1^\infty dt\ t^{z-1}e^{-t}\tag{2}$$

と分離します。これの第一項から見ていきます。第一項は z 次第で $t=0$ のときに発散しそうなので、下限の 0 を ϵ とします。積分の絶対値の不等式を使うと、$z=x+iy$ (x,y は実数) として

$$\begin{aligned}|\int_\epsilon^1 dt\ t^{z-1}e^{-t}|&\leq\int_\epsilon^1 dt\ |t^{z-1}e^{-t}|\\&=\int_\epsilon^1 dt\ |e^{(z-1)\log t}e^{-t}|\\&=\int_\epsilon^1 dt\ |e^{(x-1+iy)\log t}||e^{-t}|\\&=\int_\epsilon^1 dt\ |e^{(x-1)\log t}||e^{iy\log t}||e^{-t}|\\&=\int_\epsilon^1 dt\ e^{(x-1)\log t}e^{-t}\\&=\int_\epsilon^1 dt\ t^{x-1}e^{-t}\end{aligned}$$

e^{-t} は t が正なら 1 以下なので

$$t^{x-1}e^{-t}<t^{x-1}\qquad(t>0)$$

これから、積分は被積分関数を足していったものであることを踏まえれば

$$\int_\epsilon^1 dt\ t^{x-1}e^{-t}<\int_\epsilon^1 dt\ t^{x-1}=\frac{1}{x}[t^x]_\epsilon^1=\frac{1}{x}-\frac{\epsilon^x}{x}\tag{3}$$

よって、ϵ を 0 の極限に取ったとき、$x>0$ なら積分に上限があることになります。なので、(2) の第一項は $x>0$ で収束しています。

次に (2) の第二項を見ていきます。第二項では t が無限大のときにどうなるかなので、上限を δ として

$$|\int_1^\delta dt\ t^{z-1}e^{-t}|\leq\int_1^\delta dt\ t^{x-1}e^{-t}$$

e^t のテーラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

から、n がどれかの項だけを取り出すなら当然

$$e^t > \frac{t^n}{n!}$$

なので

$$e^{-t} < \frac{n!}{t^n}$$
$$t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1-n}n!$$

これを入れて

$$\begin{aligned}\int_1^{\delta} dt\ t^{x-1}e^{-t} &< n!\int_1^{\delta} dt\ t^{x-1-n}\\ &= n!\big[\frac{t^{x-n}}{x-n}\big]_1^{\delta}\\ &= n!\frac{\delta^{x-n}-1}{x-n}\end{aligned}$$

n は任意に取れるので $n > x+1$ とすれば、δ^{x-n} は δ の増加で十分早く減少させられます (分母も 0 にならない)。なので、δ の無限大の極限を取れば

$$n!\lim_{\delta\to\infty}\int_1^{\delta} dt\ t^{x-1-n} = n!\frac{1}{n-x}$$

となり、積分の上限が与えられます。というわけで、(2) は $\mathrm{Re}z > 0$ で収束しています。

　このように、ガンマ関数は複素平面の右半面 $\mathrm{Re}z > 0$ で与えられています。しかし、複素平面全体に広げることができます。まず、ガンマ関数は

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad\ (\mathrm{Re}z > 0)$$

で与えられて、$\Gamma(z)$ には $\mathrm{Re}z > 0$ の条件があるとします。ここで、$\Gamma(z+1)$ では z の条件が $\mathrm{Re}(z+1) > 0$ ($\mathrm{Re}z > -1$) となることを利用します。つまり、式を

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

と書き換えたとき、右辺は $\Gamma(z+1)$ なので $\mathrm{Re}z > -1$ で定義出来ることから、左辺も $\mathrm{Re}z > -1$ で定義できます。$\mathrm{Re}z > -1$ に広げたガンマ関数を $\Gamma'(z)$ と書くことにして

$$\Gamma'(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad (\mathrm{Re}z > -1)$$

とします。この $\Gamma'(z)$ は $\mathrm{Re}z > -1$ で定義されていますが、右辺から分かるように $z=0$ に 1 位の極を持っています。$\mathrm{Re}z > 0$ では $\Gamma'(z)$ と $\Gamma(z)$ は同じ式になるので

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \quad (\mathrm{Re}z > 0)$$

このように、ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は $\mathrm{Re}z > -1$ でのガンマ関数 $\Gamma'(z)$ に解析接続されます。簡単に言えば、D_1 で定義される正則な $f_1(z)$ と D_2 で定義される正則な $f_2(z)$ があり、2 つには共通部分 D があるとし、D_1, D_2 全体で定義される正則な $g(z)$ があるとき、f_2 は f_1(f_1 は f_2) の解析接続 (analytic continuation) と言います。これは $f_1(z), f_2(z)$ を $\Gamma(z), \Gamma'(z)$ にすれば今の状況になるのが分かると思います。

同様に $\Gamma'(z)$ から

$$\Gamma''(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{z}$$

を作ることが出来て、この場合は $\Gamma'(z)$ が $\mathrm{Re}z > -1$ だったので、$\Gamma'(z+1)$ から $\mathrm{Re}z > -2$ になります。$\Gamma(z)$ まで戻せば

$$\Gamma''(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} \quad (\mathrm{Re}z > -2)$$

なので、$z = 0, -1$ に 1 位の極を持ちます。

この作業を繰り返すことで

$$\Gamma_n(z+1) = z\Gamma_n(z) \quad (\mathrm{Re}z > -n+1)$$

となり、ガンマ関数は複素平面全体に拡張されます。n に対して

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(z) &= \frac{1}{z}\Gamma_1(z+1) \quad (\mathrm{Re}z > 0) \\
\Gamma_2(z) &= \frac{\Gamma_1(z+1)}{z} \quad (\mathrm{Re}z > -1) \\
\Gamma_3(z) &= \frac{\Gamma_1(z+2)}{z(z+1)} \quad (\mathrm{Re}z > -2) \\
\Gamma_4(z) &= \frac{\Gamma_1(z+3)}{z(z+1)(z+2)} \quad (\mathrm{Re}z > -3)
\end{aligned}$$

と続いていきます。このときも

$$\Gamma_n(1) = 1 \ , \ \Gamma_n(m+1) = m!$$

となります (m は整数)。このように複素平面全体に拡張された $\Gamma_n(z)$ もガンマ関数と呼ばれます。

$\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \ldots$ で 1 位の極を持ち、$z = -n$ (n は整数) での留数は

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

から

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z) = \lim_{z\to -n}\frac{\Gamma_1(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{1}{(-1)^n n!} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

と求まります。