

次元正則化

高次のファインマン図では運動量積分が発散しています。それをどうにかする方法として次元正則化を使います。この方法は非可換ゲージでのゲージ不変性を壊すことなく行えるという利点があります (正確には、Pauli-Villarsの方法だと質量ありの非可換ゲージ場でゲージ不変性を保証できない)。

高次のファインマン図に現れる運動量積分の発散が収束するように上手いこと手を加えます。一番単純なのが積分の上限に制限を入れる方法で、QED のところで使った Pauli-Villars の正則化がその一種です。ここでは違う方法を示します。

まずはウィック回転を導入します。これは経路積分のところで出てきた複素平面上で実軸を虚軸に回転させるというものです。回転させることで積分をユークリッド空間において実行できるようになります。ただし、下の補足 1 で見ているように積分の変数変換ではないことに注意してください。

例えば

$$\int d^4l \frac{1}{(l^2 - a)^n} = \int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \int d^3l \frac{1}{(l^2 - a)^n} \quad (1)$$

という積分があるとします。添え字の E はユークリッドであることを表すことにして

$$l^0 = il_4, \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_E, \quad l_E^2 = l_4^2 + |\boldsymbol{l}_E|^2, \quad id^4l_E = d^4l$$

という置き換えをし、 l_4 の積分範囲を $-\infty$ から $+\infty$ にすると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \int d^3l \frac{1}{(l^2 - a)^n} &= \int_{-\infty}^{\infty} dl_0 \int d^3l \frac{1}{(l_0^2 - |\boldsymbol{l}|^2 - a)^n} \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} dl_4 \int d^3l_E \frac{1}{(-l_E^2 - a)^n} \\ &= \frac{i}{(-1)^n} \int_{-\infty}^{\infty} dl_4 \int d^3l_E \frac{1}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= i(-1)^n \int d^4l_E \frac{1}{(l_E^2 + a)^n} \end{aligned}$$

このようにユークリッド空間での積分に変えられます。これはウィック回転は積分の変数変換ではなく、 l^0 を虚軸に解析接続することだからです。なので、 l^0 の虚軸への接続は l_4 の複素平面上での実軸に対応します。

また、このように解析接続であるために、特異点の位置が問題になります。しかし、今みている形では問題なく解析接続が行えます。かなり雑に言えば、相互作用のない伝播関数は

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{p_0^2 - (|\boldsymbol{p}|^2 + m^2 - i\epsilon)}$$

となっているために、極の位置は $p_0 = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} - i\epsilon, -\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} + i\epsilon$ であるので、 p_0 の複素平面上で p_0 から ip_0 へ回転 (左回転) させるときに極がないからです (より細かくは極の寄与が発散に寄与しない有限の値なら無視できると考える。下の補足 1 参照)。なので、特異点の位置がはっきりしない複雑な形になると注意が必要になります。解析接続が煩わしければ、後で見るようにミンコフスキー空間のままでも積分を行えます。

(1) の積分を行います。4次元ユークリッド空間での微小体積要素 $d^4x = r^3 \sin^2 \psi \sin \theta d\phi d\theta d\psi dr$ (数学の「 n 次元極座標」参照) を使うことで、 d^4l_E は

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - a)^n} = \frac{i(-1)^n}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^3}{(l_E^2 + a)^n}$$

ファインマン図の積分には $1/(2\pi)^4$ が出てくるので、ついでは加えています。 $d\Omega_4$ の積分は4次元単位球の表面積 $2\pi^2$ なので

$$\begin{aligned} \frac{i(-1)^n}{(2\pi)^4} \int d\Omega_4 \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^3}{(l_E^2 + a)^n} &= \frac{i(-1)^n}{8\pi^2} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^3}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= \frac{i(-1)^n}{8\pi^2} \int_0^\infty dl_E^2 \frac{1}{2l_E} \frac{l_E^3}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= \frac{i(-1)^n}{16\pi^2} \int_a^\infty dx \frac{x - a}{x^n} \quad (x = l_E^2 + a) \\ &= \frac{i(-1)^n}{16\pi^2} \left[\frac{1}{-n+2} \frac{1}{x^{n-2}} - \frac{a}{-n+1} \frac{1}{x^{n-1}} \right]_a^\infty \\ &= \frac{i(-1)^n}{16\pi^2} \left(\frac{a}{-n+1} \frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{-n+2} \frac{1}{a^{n-2}} \right) \\ &= \frac{i(-1)^n}{16\pi^2} \left(-\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \right) \frac{1}{a^{n-2}} \\ &= \frac{i(-1)^n}{16\pi^2} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{a^{n-2}} \end{aligned}$$

よって、(1) は

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - a)^n} = \frac{i(-1)^n}{16\pi^2} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{1}{a^{n-2}} \quad (2)$$

となり、 $n=1, 2$ で発散します。

l^2 が分子にいる場合も同様にすると

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{(l^2 - a)^n} &= i \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{-l_E^2}{(-l_E^2 - a)^n} \\ &= i(-1)^{n-1} \int \frac{d^4l_E}{(2\pi)^4} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= \frac{i(-1)^{n-1}}{8\pi^2} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^5}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= \frac{i(-1)^{n-1}}{8\pi^2} \int_a^\infty dx \frac{(x-a)^2}{2x^n} \\ &= \frac{i(-1)^{n-1}}{16\pi^2} \frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)} \frac{1}{a^{n-3}} \end{aligned}$$

と計算できます。これは $n=1, 2, 3$ で発散します。

(1) を使って、次元正則化 (dimensional regularization) を見ていきます。(2) を見れば分かるように、 $n = 2$ なら (1) の積分は明らかに発散しますが、実際に振幅の計算では $n = 2$ の場合が現れます。なので、この積分を数学的に扱えるものにしないとどうにもなりません。どうするのかというと、次元を 4 から d 次元にして、ウィック回転を行います。

(1) を d 次元にして

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - a)^n} = i(-1)^n \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + a)^n}$$

角度積分を分離して

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + a)^n} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + a)^n}$$

$d\Omega_d$ は d 次元の角度部分です。 $d = 4, n = 1, 2$ で明らかに積分は発散します。 d 次元単位球の表面積はガンマ関数を使って

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

例えば、3 次元では

$$2\pi^{3/2} \frac{1}{\Gamma(3/2)} = 2\pi^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 4\pi$$

となり、3 次元単位球の表面積になります。 l_E 積分は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + a)^n} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E)^2 \frac{l_E^{d-1}}{l_E} \frac{1}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E)^2 \frac{(l_E^2)^{d/2-1}}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^0 dx \frac{(l_E^2 + a)^2}{a} \frac{(l_E^2)^{d/2-1}}{(l_E^2 + a)^n} \quad (x = \frac{a}{l_E^2 + a}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{a} \frac{1}{(\frac{a}{x})^{n-2}} \left(\frac{a}{x} - a\right)^{d/2-1} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{a} \frac{1}{(\frac{a}{x})^{n-2}} \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{d/2-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}} \int_0^1 dx x^{-\frac{d}{2}+n-1} (1-x)^{d/2-1} \end{aligned}$$

これにベータ関数 $B(\alpha, \beta)$ の定義

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

を使うことで

$$\int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + a)^n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + a)^n} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \end{aligned}$$

これが積分の結果になります。 d 次元としているために、積分の発散がなくなり収束した形が求まっています。

l^2 が分子にいる場合でも同様に求めることができます。このときは

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - a)^n} = \frac{i}{(-1)^n} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{-l_E^2}{(l_E^2 + a)^n} = i(-1)^{n-1} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + a)^n}$$

角度積分を分離して

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + a)^n} = \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d+1}}{(l_E^2 + a)^n} = \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d+1}}{(l_E^2 + a)^n}$$

l_E 積分は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d+1}}{(l_E^2 + a)^n} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E)^2 \frac{l_E^{d+1}}{l_E} \frac{1}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d(l_E)^2 \frac{(l_E^2)^{d/2}}{(l_E^2 + a)^n} \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^0 dx \frac{(l_E^2 + a)^2}{a} \frac{(l_E^2)^{d/2}}{(l_E^2 + a)^n} \quad (x = \frac{a}{l_E^2 + a}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{a} \frac{1}{(\frac{a}{x})^{n-2}} \left(\frac{a}{x} - a\right)^{d/2} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{a} \frac{1}{(\frac{a}{x})^{n-2}} \left(\frac{a}{x}\right)^{d/2} (1-x)^{d/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \int_0^1 dx x^{-d/2+n-2} (1-x)^{d/2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(n)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \quad (\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + a)^n} &= \frac{2\pi^{d/2}}{(2\pi)^d \Gamma(d/2)} \frac{d}{4} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}\end{aligned}$$

となります。

結果をまとめれば

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - a)^n} = i(-1)^n \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + a)^n} = \frac{i(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \quad (3a)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - a)^n} = i(-1)^{n-1} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{l_E^2}{(l_E^2 + a)^n} = \frac{i(-1)^{n-1}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)} \quad (3b)$$

また、積分として

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 - a)^n}$$

という形がよく出てきます。これを計算するときは

$$l_\mu l_\nu \Rightarrow \frac{g_{\mu\nu} l^2}{d} \quad (g^{\mu\nu} l_\mu l_\nu = l^2, \quad g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, d-1) \quad (4)$$

という変形を行うことができ (下の補足 2 参照)、(3b) から

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_\mu l_\nu}{(l^2 - a)^n} = \frac{g_{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - a)^n} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \frac{i(-1)^{n-1}}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{n-\frac{d}{2}-1} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}$$

となります。

d 次元の積分として実行できましたが、ガンマ関数の性質から $n=2$ としたとき $d=4, 6, \dots$ で極を持つので、4次元では発散します (数学の「ガンマ関数」参照)。 d は最後には 4 にしなければならないので、 $n=2$, $d \rightarrow 4$ の振舞いを近似を取ることで見てみます。そのために、ガンマ関数の関係

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} + \psi(n+1) + O(\epsilon) \right)$$

$$\psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma$$

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{r}$$

$$\psi(1) = -\gamma$$

を使います。 $O(\epsilon)$ は ϵ 以上のオーダーの項です。これらから

$$\Gamma(1 - \frac{d}{2}) = \Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2}) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + \dots \quad (\epsilon = 4 - d)$$

$$\Gamma(2 - \frac{d}{2}) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots$$

$\gamma \simeq 0.5772$ はオイラー定数です。他の部分も ϵ を微小として展開することで

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(4\pi)^{-\epsilon/2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \exp[\frac{\epsilon}{2} \log 4\pi] \exp[-\frac{\epsilon}{2} \log a] (\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots) \quad (x^\epsilon = \exp[\epsilon \log x]) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} ((1 + \frac{\epsilon}{2} \log 4\pi + \dots)(1 - \frac{\epsilon}{2} \log a + \dots)(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots)) \\ &\simeq \frac{1}{(4\pi)^2} (\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log a \dots) \end{aligned}$$

となり、 ϵ の項で極を持ちます。例えば、Pauli-Villars の正則化での真空偏極では

$$\log(\frac{\Lambda^2}{m^2}) + \Pi^R(q^2)$$

となっており、今の結果はこれの対数発散部分に相当することが分かります。

ファインマン図の計算で出てくるファインマンパラメータにも触れておきます。次元正則化に関わってくるものでなく、積分の形を変形するのに使います。ファインマンパラメータによる変形は

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{(xA + yB)^2} \\ \frac{1}{AB^n} &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{ny^{n-1}}{(xA + yB)^{n+1}} \\ \frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} &= \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)^n} \end{aligned}$$

ファインマンパラメータはこのように 0 から 1 の積分として導入され、積分の形を (3a) に近づける変形に使われます。1 番目の式は

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) = \frac{1}{B-A} \int_a^b \frac{dz}{z^2}$$

として積分にし、 $z = xA + (1-x)B$ と置き換えています。1 番目の式を B で微分することで 2 番目の式になり、3 番目の式は 1 番目の式と 2 番目の式から帰納法的に導けます。

ついでなので、 d 次元での γ 行列の結果だけを載せておきます。ガンマ行列は反交換関係

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad (\delta_\mu^\mu = d, \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, d-1)$$

を満たすとして定義されています。 $d = 4 - \epsilon$ として、ガンマ行列の計算は

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 - \epsilon$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -(2 - \epsilon) \gamma^\nu$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - \epsilon \gamma^\nu \gamma^\rho$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + \epsilon \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma$$

トレースは

$$\text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = f(d) g_{\mu\nu}$$

$$\text{tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda] = F(d)(g_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho})$$

$F(d)$ は $F(d=4) = 4$ となるような関数としています。 $F(4) = 4$ であれば具体的な $F(d)$ の形は必要としません。

・補足 1

ユークリッド空間へのウィック回転を行うとき、極がいるとどのようなになるかを簡単に示します。ウィック回転の進行上に極がいる場合を考えるために、積分経路を

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 + \int_{C_1} dk_0 + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0 + \int_{C_2} dk_0$$

とします。 C_1 は $+R$ から $+iR$ へ向かう弧 (4 分円)、 C_2 は $-iR$ から $-R$ へ向かう弧です ($R \rightarrow \infty$)。なので、全体の経路は $-R$ から $+R$ にいき、 iR へ向かい (C_1)、 $-iR$ へ進んだら $-R$ へ行きます (C_2)。 C_1, C_2 の内側に極があると、ウィック回転は極にあたります。

実際の積分で出てくるのは基本的に

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

という形の組み合わせです。このとき $1/((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)$ において

$$p_0 > \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + m^2}$$

なら、積分経路 C_2 の内側に極 $z = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + m^2} - p_0 - i\epsilon$ がいます。なので、このとき

$$i \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0 + \int_{C_1} dk_0 + \int_{C_2} dk_0 \right) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5)$$

という積分を考えると、積分経路は閉じているので留数定理から極 z を拾ったものになります。

次に C_1 からの寄与を調べます。そのために $\epsilon > 0$ を利用して

$$\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{i} \int_0^\infty d\alpha \exp[i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)] \frac{1}{i} \int_0^\infty d\beta \exp[i\beta((p+k)^2 - m^2 + i\epsilon)]$$

と変形します。さらに、 $k_0 = Re^{i\phi}$ とすれば

$$\int_{C_1} dk_0 = \int_0^{\pi/2} d\phi iRe^{i\phi}$$

なので、大雑把には

$$\int_0^{\pi/2} d\phi iR \exp[i\alpha R^2(\cos 2\phi + i \sin 2\phi) + i\phi]$$

という積分が出てき、このため $R \rightarrow \infty$ で C_1 からの寄与は消えます (例えばフレネルの公式の証明とほぼ同じ)。
 C_2 でも同様なので

$$\begin{aligned} & i \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0 + \int_{C_1} dk_0 + \int_{C_2} dk_0 \right) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= i \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0 \right) \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

(5) の留数定理による積分結果を F とすれば

$$\begin{aligned} i \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} &= F - i \int_{+i\infty}^{-i\infty} dk_0 \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= F - \int_{-\infty}^{\infty} dk_4 \frac{1}{k_E^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{1}{(p+k_E)^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (k_0 = ik_4) \end{aligned}$$

このようにウィック回転の方向に極があると、余計な項が出てきます (C_1, C_2 内に極がいなければ $F = 0$)。しかし、 F が有限であるなら発散とは無関係なので、くり込みに寄与しません。なので、極の位置がはっきり分かるループ計算ではウィック回転を何も気にせずに行います。

・補足 2

(4) を示します。示したいのは

$$\int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int d^d p p^2 f(p^2) \quad (6)$$

となることです。 $f(p^2)$ は p^2 に依存する関数です。4 次元でも同じなので 4 次元とし、 $f(p^2)$ は影響がないので $f(p^2)$ を省いていきます。

$\mu \neq \nu$ では

$$\begin{aligned} \int d^4 p p^0 p^i &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int d^3 p p^0 p^i \\ \int d^4 p p^i p^j &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int d^3 p p^i p^j \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

例えば

$$\int d^3p \, p^1 p^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp^1 dp^2 dp^3 \, p^1 p^2$$

となっており、これは p^1 もしくは p^2 による奇関数の積分なので 0 になります ($f(p^2)$ は偶関数なので寄与しない)。よって、上は p_0, p^i に対して奇関数、下は p^i, p^j に対して奇関数なので、積分は 0 です。

$\mu = \nu$ では

$$\begin{aligned} \int d^4p \, (p_0)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \, (p_0)^2 \int d^3p \\ \int d^4p \, (p^i)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int d^3p \, (p^i)^2 \end{aligned}$$

となっているので、 p_0 もウィック回転させてユークリッド空間にしていれば同じ積分になります。ウィック回転を行って

$$\int d^4p \Rightarrow i \int d^4p_E \quad (p_0 = ip_4)$$

この積分は

$$\int d^4p_E = \int_{-\infty}^{\infty} dp_4 \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 \int_{-\infty}^{\infty} dp_2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_3$$

なので

$$\int d^4p_E \, (p_4)^2 = \int d^4p_E \, (p_1)^2 = \int d^4p_E \, (p_2)^2 = \int d^4p_E \, (p_3)^2$$

そうすると

$$\begin{aligned} \int d^4p \, (p_0)^2 &= i \int d^4p_E \, (-(p_4)^2) = -\frac{i}{4} \int d^4p_E ((p_4)^2 + |\mathbf{p}|^2) \\ \int d^4p \, (p^1)^2 &= i \int d^4p_E \, (p_1)^2 = \frac{i}{4} \int d^4p_E ((p_4)^2 + |\mathbf{p}|^2) \\ \int d^4p \, (p^2)^2 &= i \int d^4p_E \, (p_2)^2 = \frac{i}{4} \int d^4p_E ((p_4)^2 + |\mathbf{p}|^2) \\ \int d^4p \, (p^3)^2 &= i \int d^4p_E \, (p_3)^2 = \frac{i}{4} \int d^4p_E ((p_4)^2 + |\mathbf{p}|^2) \end{aligned}$$

右辺をミンコフスキー空間に戻すと、 p_0 では

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4} \int d^4p_E ((p_4)^2 + |\mathbf{p}|^2) &= -\frac{1}{4} \int d^4p \, (-p_0^2 + |\mathbf{p}|^2) \\ &= \frac{1}{4} \int d^4p (p_0^2 - |\mathbf{p}|^2) \\ &= \frac{1}{4} \int d^4p \, p^2 \end{aligned}$$

p^i では

$$\frac{i}{4} \int d^4 p_E ((p_4)^2 + |\mathbf{p}|^2) = \frac{1}{4} \int d^4 p (-(p_0)^2 + |\mathbf{p}|^2) = -\frac{1}{4} \int d^4 p p^2$$

よって、 $\mu \neq \nu$ では 0、 $\mu = \nu$ ではこれらになるので、計量を当てはめることで (ローレンツ不変性から計量しか使えない)

$$\int d^4 p p^\mu p^\nu = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int d^4 p p^2$$

d 次元でもウィック回転は同じなので、 $1/4$ が $1/d$ になり

$$\int d^d p p^\mu p^\nu = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int d^d p p^2$$

となります。

ローレンツ不変性からこの形になることも分かります。左辺は積分によって p^μ の依存性がなくなるので、その積分結果に使えるローレンツ不変な μ, ν の添え字を持つ量は $g^{\mu\nu}$ しかありません。そうすると

$$\int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) = g^{\mu\nu} \times const$$

という形になるしかありません。そして、 $const$ 部分を p 積分で書くとするなら、左辺の $p^\mu p^\nu$ の次元を合わせることに 4 元ベクトルの添え字を持つ量は使えないことから、スカラーである p^2 しか使えません。よって、ローレンツ不変性から (6) の形が要求され、分母の d は $g^\mu_\mu = \delta^\mu_\mu = d$ に対応させるために出てきます。