

次元正則化～ミンコフスキー空間～

ユークリッド空間に変更せずに積分を行います。

次元正則化をミンコフスキー空間で行います。積分として

$$I = \int d^d p \frac{1}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^n}$$

を考えます。 $p \cdot q$ の項を加えているのは後のためです。 p_0 を除いた $d-1$ 次元はユークリッド空間なので、 p_0 積分を分離して

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int d^{d-1} p \frac{1}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^n}$$

積分自体はローレンツ不変な形になっていることから、 $q_\mu = (q_0, 0)$ という座標系で計算を行うことにします ($q^2 = q_\mu q^\mu = q_0^2$)。こうすれば角度積分に引っかからなくなります。そうすると、 $d-1$ 次元ユークリッド空間での角度積分部分は

$$\int d\Omega_{d-1} = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)}$$

なので

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^{d-2} \frac{1}{(p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 + 2p_0 q_0 - m^2)^n} \int d\Omega_{d-1} \\ &= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{d-2}}{(p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 + 2p_0 q_0 - m^2)^n} \\ &= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{d-2}}{((p_0 + q_0)^2 - q^2 - |\mathbf{p}|^2 - m^2)^n} \\ &= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{d-2}}{(p'^2_0 - |\mathbf{p}|^2 - q^2 - m^2)^n} \quad (p'_0 = p_0 + q_0) \\ &= (-1)^n \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{d-2}}{(|\mathbf{p}|^2 - p'^2_0 + q^2 + m^2)^n} \end{aligned}$$

ベータ関数は

$$B(\alpha, \beta) = 2 \int_0^{\infty} dx x^{2\alpha-1} (1+x^2)^{-\alpha-\beta} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

と与えることができるので、これを

$$\begin{aligned}
B(\alpha, \beta) &= 2 \int_0^\infty dx \, x^{2\alpha-1} (1+x^2)^{-\alpha-\beta} \\
&= \frac{2}{M} \int_0^\infty dy \, \left(\frac{y}{M}\right)^{2\alpha-1} \left(1 + \frac{y^2}{M^2}\right)^{-\alpha-\beta} \quad (y = xM) \\
&= 2 \frac{(M^2)^{\alpha+\beta}}{M} M^{-2\alpha+1} \int_0^\infty dy \, y^{2\alpha-1} (M^2 + y^2)^{-\alpha-\beta} \\
&= 2(M^2)^\beta \int_0^\infty dy \, y^{2\alpha-1} (y^2 + M^2)^{-\alpha-\beta}
\end{aligned}$$

と変形して

$$\int_0^\infty dy \, y^{2\alpha-1} (y^2 + M^2)^{-\alpha-\beta} = \frac{1}{2(M^2)^\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

これに合うように

$$\int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{d-2}}{(|\mathbf{p}|^2 - p_0'^2 + q^2 + m^2)^n} = \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{d-2}}{(|\mathbf{p}|^2 + M^2)^n}$$

とすれば

$$\alpha = \frac{1}{2}(d-1) \, , \, \beta = n - \frac{1}{2}(d-1)$$

から

$$\int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{d-2}}{(|\mathbf{p}|^2 + M^2)^n} = \frac{1}{2(M^2)^{n-(d-1)/2}} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(n - \frac{d-1}{2})}{\Gamma(n)}$$

これを入れて

$$\begin{aligned}
I &= (-1)^{-n} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int_{-\infty}^\infty dp_0' \int_0^\infty d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^{d-2}}{(|\mathbf{p}|^2 + M^2)^n} \\
&= (-1)^{-n} \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(n - \frac{d-1}{2})}{2\Gamma(n)} \int_{-\infty}^\infty dp_0' (M^2)^{-n+(d-1)/2} \\
&= (-1)^{-n} \pi^{(d-1)/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d-1}{2})}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^\infty dp_0' (M^2)^{-n+(d-1)/2}
\end{aligned}$$

残っている積分は

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 (M^2)^{-n+(d-1)/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 (-p_0'^2 + q^2 + m^2)^{-n+(d-1)/2} \\
&= 2 \int_0^{\infty} dp'_0 (-p_0'^2 + q^2 + m^2)^{-n+(d-1)/2} \\
&= 2(-1)^{-n+(d-1)/2} \int_0^{\infty} dp'_0 (p_0'^2 - q^2 - m^2)^{-n+(d-1)/2} \\
&= 2(-1)^{-n+(d-1)/2} \int_0^{\infty} dp'_0 (p_0'^2 + A^2)^{-n+(d-1)/2}
\end{aligned}$$

とすれば、ベータ関数で

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = n - \frac{d}{2}$$

としたものになるので

$$\int_0^{\infty} dp'_0 (p_0'^2 + A^2)^{-n+(d-1)/2} = \frac{1}{2(A^2)^{n-d/2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n - \frac{d-1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(A^2)^{n-d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n - \frac{d-1}{2})}$$

と求まり

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 (M^2)^{-n+(d-1)/2} = (-1)^{-n+(d-1)/2} \frac{\sqrt{\pi}}{(A^2)^{n-d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n - \frac{d-1}{2})}$$

これを入れれば

$$\begin{aligned}
I &= (-1)^{-n} \pi^{(d-1)/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d-1}{2})}{\Gamma(n)} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 (M^2)^{-n+(d-1)/2} \\
&= (-1)^{-2n+(d-1)/2} \pi^{d/2} (A^2)^{-n+d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \\
&= (-1)^{-2n+(d-1)/2} \pi^{d/2} (-q^2 - m^2)^{-n+d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \\
&= (-1)^{-2n+(d-1)/2} (-1)^{-n+d/2} \pi^{d/2} (q^2 + m^2)^{-n+d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)}
\end{aligned}$$

$(-1)^a = (-1)^{-a}$ なので

$$I = (-1)^{n+1/2} \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} (q^2 + m^2)^{-n+d/2} = i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} (q^2 + m^2)^{-n+d/2}$$

よって

$$\int d^d p \frac{1}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^n} = i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} (q^2 + m^2)^{-n+d/2}$$

と求めます。ユークリッド空間での結果は

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - m^2)^n} = i(-1)^n \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

となっているので、これに $(2\pi)^d$ をかけることで

$$\int d^d l \frac{1}{(l^2 - m^2)^n} = i(-1)^n \frac{(2\pi)^d}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} = i(-1)^n \pi^{d/2} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{n-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}$$

となり、 $q^\mu = 0 = (0, 0, 0, 0)$ とした場合と一致します。

q^μ を入れているのには理由があり、 I を q_μ で微分すると

$$I_1^\mu = \frac{\partial}{\partial q_\mu} I = -n \int d^d p \frac{2p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+1}}$$

となるので、分子に p^μ がいる場合になります。なので、これは

$$\begin{aligned} I_1^\mu &= -n \int d^d p \frac{2p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+1}} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_\mu} I \\ &= i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{\partial}{\partial q_\mu} (q^2 + m^2)^{-n+d/2} \\ &= i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(-n + \frac{d}{2}\right) \frac{2q^\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} \quad \left(\frac{\partial q^2}{\partial q_\mu} = \frac{\partial q_\nu q^\nu}{\partial q_\mu} = 2g^{\mu\nu} q_\nu = 2q^\mu\right) \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{(n-\frac{d}{2})\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{2q^\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{2q^\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} \quad (n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)) \end{aligned}$$

よって

$$-n \int d^d p \frac{2p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+1}} = -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{2q^\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}}$$

$n+1$ を n とすることで

$$\begin{aligned} \int d^d p \frac{p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^n} &= i(-1)^{n-1} \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{(n-1)\Gamma(n-1)} \frac{q^\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2}} \\ &= i(-1)^{n-1} \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{q^\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2}} \end{aligned}$$

$q^\mu = 0$ では

$$\int d^d p \frac{p^\mu}{(p^2 - m^2)^n} = 0$$

これは3次元部分では p^i の奇関数になっているので、全空間積分で消えるからです。

さらに q_μ で微分して

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} I = -n \int d^d p \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{2p^\mu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+1}} \\ &= -n(-n-1) \int d^d p \frac{4p^\mu p_\mu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+2}} \\ &= 4n(n+1) \int d^d p \frac{p^2}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+2}} \end{aligned} \quad (1)$$

積分後のものを微分すれば

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu} I \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{2q^\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{2\delta_\mu^\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} + (-n + \frac{d}{2} - 1) \frac{4q^\mu q_\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+2}} \right) \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{2d}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} + (-n + \frac{d}{2} - 1) \frac{4q^\mu q_\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+2}} \right) \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\int d^d p \frac{p^2}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+2}} \\ &= -\frac{1}{4n(n+1)} i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{2d}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} + (-n + \frac{d}{2} - 1) \frac{4q^\mu q_\mu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+2}} \right) \end{aligned}$$

$n+2$ を n にして

$$\begin{aligned} &\int d^d p \frac{p^2}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^n} \\ &= -\frac{1}{4(n-2)(n-1)} i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n-1-\frac{d}{2})}{\Gamma(n-2)} \left(\frac{2d}{(q^2 + m^2)^{n-d/2-1}} + (-n+1+\frac{d}{2}) \frac{4q^2}{(q^2 + m^2)^{n-d/2}} \right) \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{2} \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{(q^2 + m^2)^{n-d/2-1}} - \frac{q^2 \Gamma(n-\frac{d}{2})}{(q^2 + m^2)^{n-d/2}} \right) \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{d}{2} (q^2 + m^2) \frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{(q^2 + m^2)^{n-d/2}} - \frac{q^2 \Gamma(n-\frac{d}{2})}{(q^2 + m^2)^{n-d/2}} \right) \\ &= i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{n-d/2}} \left(q^2 \Gamma(n-\frac{d}{2}) - \frac{d}{2} (q^2 + m^2) \Gamma(n-\frac{d}{2}-1) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

これも $q^2 = 0$ とすれば

$$\int d^d p \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^n} = -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \quad (3)$$

となります。 $1/(2\pi)^d$ をかければ

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^n} = -i(-1)^n \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)}$$

これもユークリッド空間で実行した

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - m^2)^n} = -i(-1)^n \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)}$$

と一致しています。

内積にならないように q_μ, q_ν で I を微分すれば

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} I = -n \int d^d p \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{2p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+1}} \\ &= 4n(n+1) \int d^d p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^{n+2}} \end{aligned}$$

これは (1) での p^2 が $p^\mu p^\nu$ になっているだけです。積分後の微分は

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} I \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{2q^\nu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} \\ &= -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{\Gamma(n+1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{2g^{\mu\nu}}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+1}} + (-n + \frac{d}{2} - 1) \frac{4q^\mu q^\nu}{(q^2 + m^2)^{n-d/2+2}} \right) \end{aligned}$$

(2) とは d が $g^{\mu\nu}$ 、 q^2 が $q^\mu q^\nu$ になっているだけなので、置き換えによって

$$\int d^d p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 + 2p \cdot q - m^2)^n} = i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{n-d/2}} \left(q^\mu q^\nu \Gamma(n - \frac{d}{2}) - \frac{g^{\mu\nu}}{2} (q^2 + m^2) \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1) \right)$$

q_μ を 0 にすれば

$$\int d^d p \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^n} = -i(-1)^n \pi^{d/2} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{n-d/2-1} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)}$$

これを (3) と見比べると、(3) に $g^{\mu\nu}/d$ をかけると一致するのが分かります。このことから、 p^2 に依存する関数 $f(p^2)$ の積分において

$$\int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) = \int d^d p \frac{g^{\mu\nu} p^2}{d} f(p^2)$$

となるのが分かります。