ディラック場

ディラック方程式によるディラック場を見ていきます。ディラック場ではスピン 1/2 のためにいろいろとやっかいなことになります。
相対論的量子力学の「ディラック方程式」と「ディラック方程式の共変性」での話は知っているとしています。「ディラック方程式の解とスピン」でも同様の話をしています。

先にガンマ行列の定義と関連する表記を与えておきます。ガンマ行列 γ^μ は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

を満たす 4×4 行列のことです。覚えておくと便利なのは $a_\mu a_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu = a^2$ という関係です。
ガンマ行列との内積 $a_\mu\gamma^\mu,\ \partial_\mu\gamma^\mu$ には $\not{a},\ \not{\partial}$ という表記がよく使われます。4 成分スピノール ψ のエルミート共役 $\psi^\dagger$ と γ^0 の積は $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ と表記されます。
他の性質は「表記と定義」でまとめています。導出は相対論的量子力学の「ディラック方程式の共変性」を見てください。
ディラック方程式は 2 階微分方程式であるクライン・ゴルドン方程式を 1 階微分方程式にしたもので

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{1}$$

ψ は 4 成分スピノールで、スピノール成分を明確にするときは $\psi_a\ (a = 1, 2, 3, 4)$ と書きます。m と単独で書いていますが、スピノール成分による 4×4 単位行列 I がいます (ψ は 4×1 行列)。単位行列は基本的に書かないので、注意してください。
もしくは、$\boldsymbol{\alpha}, \beta$ を

$$\beta = \gamma^0\ ,\ \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0\boldsymbol{\gamma}\ ,\ \overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \quad (\alpha_i = \gamma^0\gamma^i)$$

として

$$(i\partial_0 + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla - m\beta)\psi(x) = 0$$

とも書けます。$\boldsymbol{\alpha}$ は $\alpha_i = \gamma^0\gamma^i$ で、4 元ベクトルではないので α_i の添え字の位置は無関係です。左から γ^0 をかければ、$\gamma^0\gamma^0 = 1$ から (1) になります。また、ハミルトニアン演算子は

$$i\partial_0\psi(x) = \hat{H}\psi(x)$$

で定義されるので、ディラック方程式のハミルトニアン演算子は

$$\hat{H} = -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m = -i\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + \gamma_0 m$$

となります。
ディラック方程式に対するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = i\psi^\dagger\partial_0\psi + i\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi - m\psi^\dagger\beta\psi$$

ψ と $\psi^\dagger$ (もしくは $\overline{\psi}$) を独立な場として扱い、2 つのオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^\dagger} - \nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi^\dagger)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^\dagger} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla\psi)} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = 0 \quad (\dot{\psi} = \partial_0\psi)$$

から

$$i\partial_0\psi + i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi - m\beta\psi = 0\ ,\ i\partial_0\psi^\dagger + i\nabla\cdot(\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}) + m\psi^\dagger\beta = 0$$

として、ディラック方程式とそれに共役なディラック方程式が出てきます。$\psi^\dagger$ では $\gamma_0\gamma_0 = 1$ より

$$\begin{aligned}
0 &= i\partial_0\psi^\dagger\gamma_0\gamma_0 + i\nabla\cdot(\psi^\dagger\gamma^0\boldsymbol{\gamma}) + m\psi^\dagger\gamma_0 \\
&= i\partial_0\overline{\psi}\gamma_0 + i\partial_i\overline{\psi}\gamma^i + m\overline{\psi}0 \\
&= i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu + m\overline{\psi} \\
&= \overline{\psi}(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m)
\end{aligned}$$

矢印は矢印の方向へ演算子が作用することを表します。こうすれば ψ の方程式と同じ格好になるので、式の見た目を似せたいときによく使われます。行列計算なので、γ^μ と $\psi, \psi^\dagger$ の並びは $\gamma^\mu\psi,\ \psi^\dagger\gamma^\mu$ とする必要があることに注意してください。

今のラグランジアンのエルミート共役は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\dagger = (\overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi)^\dagger =& -i(\partial_\mu\psi)^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\psi^\dagger\gamma_0)^\dagger - m\psi^\dagger(\psi^\dagger\gamma_0)^\dagger \\
=& -i\partial_\mu\psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma_0^\dagger\psi - m\psi^\dagger\gamma_0^\dagger\psi \\
=& -i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0\gamma_0\psi - m\psi^\dagger\gamma_0\psi \quad (\gamma_0^\dagger = \gamma_0\ ,\ (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma_0\gamma^\mu\gamma_0) \\
=& -i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi - m\overline{\psi}\psi
\end{aligned}$$

となっているので、実数ではありません。ラグランジアンは実数であることを要求するなら

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^\dagger) = \frac{i}{2}(\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) - m\overline{\psi}\psi$$

とすればいいです ($\mathcal{L}'^\dagger = \mathcal{L}'$)。実際にオイラー・ラグランジュ方程式に入れればすぐに分かるように、$\mathcal{L}'$ はディラック方程式を導きます (対称性も変更されない)。ここでは $\mathcal{L}$ を使っていきます。

ψ と $\psi^\dagger$ の正準共役な $\pi_\psi, \pi_{\psi^\dagger}$ は

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\psi^\dagger \ , \ \pi_{\psi^\dagger} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\dagger} = 0$$

となります。ハミルトニアンは正準共役な量によるルジャンドル変換から

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x(\pi_\psi \partial_0\psi + \pi_{\psi^\dagger}\partial_0\psi^\dagger - \mathcal{L}) \\
&= \int d^3x(\pi_\psi \partial_0\psi + \pi_{\psi^\dagger}\partial_0\psi^\dagger - i\psi^\dagger\partial_0\psi - i\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi + m\psi^\dagger\beta\psi) \\
&= \int d^3x(-i\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi + m\psi^\dagger\beta\psi) \\
&= \int d^3x\psi^\dagger(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta)\psi \\
&= \int d^3x\overline{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi
\end{aligned}$$

これは 1 粒子のハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ を $\psi^\dagger, \psi$ で挟んだ 3 次元空間積分です。

　保存量としての場のハミルトニアンにもなっています。エネルギー・運動量テンソルは今の場合にネーターの定理を合わせることで

$$\Theta_{\mu\boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi)}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\psi^\dagger)}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\psi^\dagger - g_{\mu\boldsymbol{\nu}}\mathcal{L} = \overline{\psi}i\gamma_\mu\partial_{\boldsymbol{\nu}}\psi - g_{\mu\boldsymbol{\nu}}\overline{\psi}(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m)\psi$$

となり、４元運動量 P_ν は

$$P_{\boldsymbol{\nu}} = \int d^3x\Theta_{0\boldsymbol{\nu}} = \int d^3x(\overline{\psi}i\gamma_0\partial_{\boldsymbol{\nu}}\psi - g_{0\boldsymbol{\nu}}\mathcal{L})$$

と与えられます。これの 0 成分は

$$\begin{aligned}
P_0 = \int d^3x(i\psi^\dagger\gamma_0\gamma_0\partial_0\psi - \mathcal{L}) &= \int d^3x(\pi_\psi\partial_0\psi - \mathcal{L}) \\
&= \int d^3x(\pi_\psi\partial_0\psi - \pi_\psi\partial_0\psi - i\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi + m\psi^\dagger\beta\psi) \\
&= \int d^3x(-i\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi + m\psi^\dagger\beta\psi) \\
&= \int d^3x\overline{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi
\end{aligned}$$

となり、ハミルトニアンと一致します。3 次元運動量 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \int d^3x(\overline{\psi}i\gamma_0\nabla\psi) = \int d^3x\psi^\dagger(-i\nabla)\psi$$

となります。

場の量子化を行います。ディラック方程式は、左から $i\gamma^\nu\partial_\nu+m$ を作用させれば、$\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu=\Box$ から

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu+m)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=-(\Box+m^2)\psi(x)$$

となり、行列としたクライン・ゴルドン方程式の解にもなるのが分かります (ディラック方程式の解はクライン・ゴルドン方程式の解になるが、その逆は一般的に成立しない)。なので、クライン・ゴルドン方程式の解と同じように、ディラック方程式の解を

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x)\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})e^{ipx}+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})e^{-ipx}\qquad(p_0=E_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})\end{aligned}$$

実際に、「クライン・ゴルドン方程式〜複素スカラー場〜」の補足で示したのと同様の手順でこの形にできます。第一項が負エネルギー、第二項が正エネルギーの平面波に対応します。このため、ディラック方程式でも負エネルギー解は存在します。

クライン・ゴルドン方程式と違い、ディラック方程式の解 $\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ はヘリシティ±1 でさらに区別できます。なので、ヘリシティ$+1$ を持つ 4 成分スピノール u^1,v^1、-1 を持つ u^2,v^2 と係数 $a^{1,2}_{\boldsymbol{p}},b^{1,2}_{\boldsymbol{p}}$ によって

$$\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})=\sum_{s=1}^{2}a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})=a^1_{\boldsymbol{p}}u^1(\boldsymbol{p})+a^2_{\boldsymbol{p}}u^2(\boldsymbol{p})\ ,\ \psi^{(+)}(\boldsymbol{p})=\sum_{s=1}^{2}b^s_{\boldsymbol{p}}v^s(\boldsymbol{p})$$

と展開して

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\psi^{(+)}(x)+\psi^{(-)}(x)\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}b^s_{\boldsymbol{p}}v^s(\boldsymbol{p})e^{ipx}+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx}\qquad(p_0=E_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})\end{aligned}$$

u^s は正エネルギーの平面波、v^s は負エネルギーの平面波の解に対応しています。$1/2E_{\boldsymbol{p}}$ は a,b に含めてしまいます。「クライン・ゴルドン場〜複素スカラー場〜」では、上手くいくように初めから $b^\dagger$ としましたが、ここでは空孔理論との対応を見やすくするために b とします。

交換関係が上手く出てくるように、u^s,v^s の規格化を

$$u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p})=\delta^{sr}\ ,\ v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^r(\boldsymbol{p})=\delta^{sr}$$

と与えることにします。このときの u^s,v^r の関係は

- $u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p})=\delta^{sr}\ ,\ v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^r(\boldsymbol{p})=\delta^{sr}$
- $\overline{u}^r(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p})=\dfrac{m}{p_0}\delta^{rs}\ ,\ \overline{v}^r(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p})=-\dfrac{m}{p_0}\delta^{rs}$
- $v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(-\boldsymbol{p})=0$

- $\displaystyle\sum_{s=1}^{2} u^s(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{p}) = \frac{p_\mu\gamma^\mu + m}{2p_0}$, $\displaystyle\sum_{s=1}^{2} v^s(\boldsymbol{p})\overline{v}^s(\boldsymbol{p}) = \frac{p_\mu\gamma^\mu - m}{2p_0}$

となります ($p_0 = E_{\boldsymbol{p}}$)。これらの導出は「ディラック方程式の解とスピン」の補足で触れています。

ここから、$\psi(x)$ を演算子とし、$a^s_{\boldsymbol{p}}, b^s_{\boldsymbol{p}}$ を演算子とします。クライン・ゴルドン方程式と同じように、同時刻交換関係が (下の補足も参照)

$$[\psi_a(\boldsymbol{x},t), \psi^\dagger_b(\boldsymbol{y},t)] = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}\ ,\ [\psi_a(\boldsymbol{x},t), \psi_b(\boldsymbol{y},t)] = [\psi^\dagger_a(\boldsymbol{x},t), \psi^\dagger_b(\boldsymbol{y},t)] = 0$$

となるためには、$a^s_{\boldsymbol{p}}, b^s_{\boldsymbol{p}}$ の交換関係がどうなればいいのかを求めます。スピノール成分を $\psi_a\ (a = 1, 2, 3, 4)$ として書いています。同時刻での積 $\psi_a(\boldsymbol{x},t)\psi^\dagger_b(\boldsymbol{y},t)$ は ($x_0 = y_0 = t$)

$$\begin{aligned}
\psi_a(x)\psi^\dagger_b(y) &= \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p})e^{ipx} + \psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p})e^{-ipx})(\psi^{(+)\dagger}_b(\boldsymbol{q})e^{-iqy} + \psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})e^{iqy}) \\
&= \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p})\psi^{(+)\dagger}_b e^{ipx}e^{-iqy} + \psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p})\psi^{(+)\dagger}_b(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{-iqy} \\
&\qquad + \psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p})\psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{iqy} + \psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p})\psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{iqy})
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\psi^\dagger_b(y)\psi_a(x) &= \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(\psi^{(+)\dagger}_b(\boldsymbol{q})e^{-iqy} + \psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})e^{iqy})(\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p})e^{ipx} + \psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}) \\
&= \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(\psi^{(+)\dagger}_b(\boldsymbol{q})\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p})e^{ipx}e^{-iqy} + \psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p})e^{ipx}e^{iqy} \\
&\qquad + \psi^{(+)\dagger}_b(\boldsymbol{q})\psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}e^{-iqy} + \psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})\psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p})e^{-ipx}e^{iqy})
\end{aligned}$$

そうすると、$\psi_a(x)\psi^\dagger_b(y) - \psi^\dagger_b(y)\psi_a(x)$ では交換関係として

$$\begin{aligned}
&[\psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p}), \psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})]\ ,\ [\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p}), \psi^{(+)\dagger}_b(\boldsymbol{q})] \\
&[\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p}), \psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})]\ ,\ [\psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p}), \psi^{(+)\dagger}_b(\boldsymbol{q})]
\end{aligned}$$

というのが出てき、これらは

$$\begin{aligned}
&[\psi^{(-)}_a(\boldsymbol{p}), \psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})] = \sum_{r,s=1}^{2} u^r_a(\boldsymbol{p})u^{s\dagger}_b(\boldsymbol{q})[a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}] \\
&[\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p}), \psi^{(+)\dagger}_b(\boldsymbol{q})] = \sum_{r,s=1}^{2} v^r_a(\boldsymbol{p})v^{s\dagger}_b(\boldsymbol{q})[b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}] \\
&[\psi^{(+)}_a(\boldsymbol{p}), \psi^{(-)\dagger}_b(\boldsymbol{q})] = \sum_{r,s=1}^{2} v^r_a(\boldsymbol{p})u^{s\dagger}_b(\boldsymbol{q})[b^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}]
\end{aligned}$$

なので、スカラー場のときと同じように

$$[a_{\boldsymbol{p}}^r, a_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}\ ,\ [b_{\boldsymbol{p}}^r, b_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}$$

$$[b_{\boldsymbol{p}}^r, a_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}] = [a_{\boldsymbol{p}}^r, b_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}] = 0$$

とします。そうすると

$$\begin{aligned}
[\psi_a(\boldsymbol{x},t), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)] &= \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}([\psi_a^{(-)}(\boldsymbol{p}), \psi_b^{(-)\dagger}(\boldsymbol{q})]e^{-ipx}e^{iqy} + [\psi_a^{(+)}(\boldsymbol{p}), \psi_b^{(+)\dagger}(\boldsymbol{q})]e^{ipx}e^{-iqy}) \\
&= \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^3}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})(\sum_{s=1}^{2} u_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{s\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{iqy} + \sum_{s=1}^{2} v_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{s\dagger}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{-iqy})
\end{aligned}$$

デルタ関数によって $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$ から $p_0 = q_0 = E_{\boldsymbol{p}}$ になるので

$$\begin{aligned}
[\psi_a(\boldsymbol{x},t), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)] &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}(u_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + v_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}(u_a^s(\boldsymbol{p})u_c^{s\dagger}(\boldsymbol{p})(\gamma_0)_{cd}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + v_a^s(\boldsymbol{p})v_c^{s\dagger}(\boldsymbol{p})(\gamma_0)_{cd}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{db} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}(u_a^s(\boldsymbol{p})\overline{u}_c^s(\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + v_a^s(\boldsymbol{p})\overline{v}_c^s(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{cb} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\frac{(p_\mu\gamma^\mu + m)_{ac}}{2E_{\boldsymbol{p}}}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + \frac{(p_\mu\gamma^\mu - m)_{ac}}{2E_{\boldsymbol{p}}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{cb} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}((p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m)_{ac}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + (p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)_{ac}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{cb} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}((E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m)_{ac} + (E_{\boldsymbol{p}}\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)_{ac})(\gamma_0)_{cb}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}I_{ab} \\
&= \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}
\end{aligned}$$

として、同時刻交換関係になります。よって、消滅演算子 $a_{\boldsymbol{p}}^s, b_{\boldsymbol{p}}^s$ として真空の定義は

$$a_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle = b_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle = 0$$

このように出来るはずです。

この交換関係と (**??**),(**??**) を使ってハミルトニアンを計算してみます。ハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3x \overline{\psi}(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6} \\
&\quad \times (\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + \psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{ipx})\gamma_0(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)(\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{iqx} + \psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx}) \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}(\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + \psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{ipx})\gamma_0 \\
&\quad \times ((-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{iqx} + (-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx})
\end{aligned}
$$

第一項は

$$
(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{iqx} = (-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi^{(+)}(x)
$$

$\psi^{(+)}(x)$ はディラック方程式に従うので

$$
(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi^{(+)}(x) = \gamma_0 i\partial_0\psi^{(+)}(x) = -\gamma_0 E_{\boldsymbol{q}}\psi^{(+)}
$$

第二項も同様に

$$
(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx} = (-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla + m)\psi^{(-)}(x) = \gamma_0 E_{\boldsymbol{q}}\psi^{(-)}(x)
$$

これらから

$$
\begin{aligned}
H &= \int d^3x \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6} \\
&\quad \times (\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + \psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{ipx})\gamma_0(-E_{\boldsymbol{q}}\gamma_0\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{iqx} + E_{\boldsymbol{q}}\gamma_0\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx}) \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}E_{\boldsymbol{q}}(\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + \psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})e^{ipx})(-\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{iqx} + \psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx}) \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}E_{\boldsymbol{q}}(-\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{iqx} - \psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{iqx} \\
&\qquad + \psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{-iqx} + \psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{-iqx}) \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}E_{\boldsymbol{q}}(-\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{-i(p-q)x} - \psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{i(p+q)x} \\
&\qquad + \psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{-i(p+q)x} + \psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{i(p-q)x})
\end{aligned}
$$

exp は

$$
\int d^3x e^{i(p\pm q)x} = e^{i(p_0\pm q_0)x_0}\int d^3x e^{i(\boldsymbol{p}\pm\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{x}} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}\pm\boldsymbol{q})e^{i(p_0\pm q_0)x_0}
$$

なので、$\boldsymbol{p}=\pm\boldsymbol{q}$ で $p_0=q_0=E_{\boldsymbol{p}}$ から

$$
\begin{aligned}
H=&\int\frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^3}E_{\boldsymbol{q}}\\
&\times(-\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{-i(p_0-q_0)x_0}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})-\psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(\boldsymbol{q})e^{i(p_0+q_0)x_0}\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\\
&\quad+\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{-i(p_0+q_0)x_0}\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})+\psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(\boldsymbol{q})e^{i(p_0-q_0)x_0}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}))\\
=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\boldsymbol{p}}(\psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})-\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(\boldsymbol{p}))\\
&\qquad\qquad-\psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(-\boldsymbol{p})e^{i2p_0x_0}+\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(-\boldsymbol{p})e^{-i2p_0x_0})
\end{aligned}
$$

各項は u^s,v^s の関係から

$$
\begin{aligned}
&\psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})=\sum_{r,s=1}^{2}a_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s}u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p})=\sum_{r,s=1}^{2}a_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s}\delta^{rs}=\sum_{s=1}^{2}a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s}\\
&\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})=\sum_{r,s=1}^{2}b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^{s}v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p})=\sum_{s=1}^{2}b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^{s}\\
&\psi^{(-)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(+)}(-\boldsymbol{p})=\sum_{r,s=1}^{2}a_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}b_{-\boldsymbol{p}}^{s}u^{r\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(-\boldsymbol{p})=0\\
&\psi^{(+)\dagger}(\boldsymbol{p})\psi^{(-)}(-\boldsymbol{p})=\sum_{r,s=1}^{2}b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}a_{-\boldsymbol{p}}^{s}v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(-\boldsymbol{p})=0
\end{aligned}
$$

となるので

$$
H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\boldsymbol{p}}\sum_{s=1}^{2}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s}-b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^{s})
$$

しかし、$b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^{s}$ は粒子数演算子なので、これに対応する粒子が $a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s}$ の粒子数を上回っていたらハミルトニアン (エネルギー) は負の値を持ちます。「クライン・ゴルドン場〜複素スカラー場〜」ではハミルトニアンが正の値になるように粒子数演算子が出てきていたので、エルミート共役が取れる複素場だからというのは理由になりません。

というわけで修正します。間違いの元凶は同時刻交換関係を

$$
[\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)]=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}
$$

このように設定したことです。ディラック方程式はスピン 1/2 の電子を記述することから、フェルミ・ディラック統計に従います。なので、交換関係でなく反交換関係を使えばいいという発想が出てきます。よって、同時刻交換関係を反交換にして

$$
\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=\psi_a(\boldsymbol{x},t)\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)+\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\psi_a(\boldsymbol{x},t)=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}
$$

他のも

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi(\boldsymbol{y},t)\}=\{\psi_a^\dagger(\boldsymbol{x},t),\psi^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=0$$

これによって $a_{\boldsymbol{p}},b_{\boldsymbol{p}}$ も

$$\{a_{\boldsymbol{p}}^r,a_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}\}=\{b_{\boldsymbol{p}}^r,b_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}\}=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}$$

として反交換関係に修正されます。ハミルトニアン自体は、反交換関係になったからといって変化するわけでなく(交換関係で書いていた部分を反交換関係に書き直すだけだから)

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}E_{\boldsymbol{p}}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^s-b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^s)$$

ただ、今回は $b_{\boldsymbol{p}}^s,b_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}$ が反交換関係になっていることから $b_{\boldsymbol{p}}^s$ と $b_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}$ を逆にしても対称になっています。つまり、反交換関係は壊れないことから小細工ができます (交換関係でのハミルトニアンで同じように逆にすると交換関係を壊す)。つまり

$$\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^s=b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\ ,\ \tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}=b_{\boldsymbol{p}}^s$$

このようにしても全く影響がないということです。そうするとハミルトニアンの第二項は

$$\begin{aligned}-E_{\boldsymbol{p}}b_{\boldsymbol{p}}^\dagger b_{\boldsymbol{p}}=&-E_{\boldsymbol{p}}((2\boldsymbol{\pi})^3\delta^{(3)}(0)\delta^{rs}-b_{\boldsymbol{p}}b_{\boldsymbol{p}}^\dagger)\\=&-E_{\boldsymbol{p}}((2\boldsymbol{\pi})^3\delta^{(3)}(0)\delta^{rs}-\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^s)\\=&E_{\boldsymbol{p}}\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^s-const\end{aligned}$$

定数部分はクライン・ゴルドン方程式と同じように零点エネルギーとして無視して

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}E_{\boldsymbol{p}}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^s+\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^s)$$

このようにハミルトニアンは正の値になります。これにともなって、真空の定義も交換関係の場合から変えます。今までは $a_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle=b_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle=0$ としていましたが、それを

$$a_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle=b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}|0\rangle=\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle=0$$

とします。

この入れ替えで何がおきているのかを見直します。まず $b_{\boldsymbol{p}}^\dagger,b_{\boldsymbol{p}}$ の意味は、入れ替える前のハミルトニアンは第二項にマイナスがいることから、$b_{\boldsymbol{p}}^\dagger,b_{\boldsymbol{p}}$ は負エネルギー粒子を生成、消滅させる演算子と考えられます ($b_{\boldsymbol{p}}^\dagger b_{\boldsymbol{p}}$ は負エネルギー粒子の粒子数演算子となる)。そして、$\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger},\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^s$ と入れ替えたことで第二項はプラスになったために、$\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger},\tilde{b}_{\boldsymbol{p}}^s$ は正エネルギー粒子を生成、消滅させる演算子と考えられます。このため、負エネルギー粒子を生成することは正エネルギー粒子を消滅させること、負エネルギー粒子を消滅させることは正エネルギー粒子を生成するこ

と、と同じ意味と捉えられます。つまり、この負エネルギー粒子と正エネルギー粒子の生成、消滅の関係を演算子の解釈にそのまま適用させれば、$\tilde{b}^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}, \tilde{b}^{s}_{\boldsymbol{p}}$ は反粒子の生成、消滅演算子となります。

この結果をディラックの空孔理論に当てはめます。空孔理論では、反粒子はディラックの海 (負エネルギーで満たされた状態) に空く孔と解釈されています。これを今の定義に当てはめると、$b^{s}_{\boldsymbol{p}} = \tilde{b}^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}$ によって負エネルギーを消して空孔を作る、つまり正エネルギーを持つ反粒子を生成していると考えられます。

また、空孔理論では負エネルギーが敷き詰められたディラックの海の扱いが問題になりますが、それも出てきません。なぜなら、ハミルトニアンにおける

$$E_{\boldsymbol{p}}\tilde{b}^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}\tilde{b}^{s}_{\boldsymbol{p}} - const$$

この負の無限大の定数部分を無視することは、ディラックの海を無視することと言えるからです。このように場の量子論によって、空孔理論での真空の解釈による問題が自動的に解決されます。

反交換関係でフェルミ・ディラック統計になるのは、反交換関係から、同じ状態では

$$b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle = 0 \quad (b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}} = 0)$$

となり、そして異なる状態では

$$b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}|0\rangle = -b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$$

となるために、反交換関係を満たすことでフェルミ・ディラック統計に従うことになるからです。

注：これ以降は $\tilde{b}^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}, \tilde{b}^{s}_{\boldsymbol{p}}$ でなく $b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}, b_{\boldsymbol{p}}$ を反粒子の生成・消滅演算子として扱います

このようにして、生成、消滅演算子の反交換関係

$$\{a^{r}_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^{r}_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}$$
$$\{a^{r}_{\boldsymbol{p}}, a^{s}_{\boldsymbol{q}}\} = \{a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^{r}_{\boldsymbol{p}}, b^{s}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = 0$$

が与えられます。これらを使って時間発展を見ていきます。そのために、場の演算子を $t=0$ として (b は $b^\dagger$ に変えて)

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}(a^{s}_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}v^s(\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}})$$

とします。規格化については「ディラック場〜伝播関数〜」を見てください。

a^{r}_{q} とハミルトニアンの交換関係は

$$
\begin{aligned}
[H, a_q^r] =& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1}^{2} [a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^s + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^s, a_q^r] \\
=& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1}^{2} E_{\boldsymbol{p}} ([a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^s, a_q^r] + [b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^s, a_q^r]) \\
=& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1}^{2} (a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} [a_{\boldsymbol{p}}^s, a_q^r] + [a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}, a_q^r] a_{\boldsymbol{p}}^s) \\
=& -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1}^{2} (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \delta^{rs} a_q^s \\
=& -E_q a_q^r
\end{aligned}
$$

同様に $a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}$ では

$$
\begin{aligned}
[H, a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}] =& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1}^{2} [a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^s + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^s, a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}] \\
=& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1}^{2} ([a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^s, a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}] + [b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^s, a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}]) \\
=& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1}^{2} (a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} [a_{\boldsymbol{p}}^s, a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}] + [a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}, a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}] a_p^{s\dagger}) \\
=& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\boldsymbol{p}} \sum_{s=1}^{2} (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \delta^{rs} a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger} \\
=& E_{\boldsymbol{q}} a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}
\end{aligned}
$$

$b_{\boldsymbol{p}}^r$ でも同様なので

$$
\begin{aligned}
e^{iHt} a_{\boldsymbol{p}}^r e^{-iHt} &= a_{\boldsymbol{p}}^r + i[H, a_{\boldsymbol{p}}^r]t - \cdots = a_{\boldsymbol{p}}^r - iE_{\boldsymbol{p}} a_{\boldsymbol{p}}^r t + \cdots = a_{\boldsymbol{p}}^r e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t} \\
e^{iHt} b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger} e^{-iHt} &= b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger} + i[H, b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}]t - \cdots = b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger} + iE_{\boldsymbol{p}} b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger} t - \cdots = b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger} e^{+iE_{\boldsymbol{p}}t}
\end{aligned}
$$

これらを (**??**) に入れれば (b は $b^\dagger$ に変えて)

$$
\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{x}, t) =& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} (a_{\boldsymbol{p}}^r u^s(\boldsymbol{p}) e^{-iE_{\boldsymbol{p}}t} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} v^s(\boldsymbol{p}) e^{+iE_{\boldsymbol{p}}t} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}) \\
=& \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=1}^{2} (a_{\boldsymbol{p}}^s u^s(\boldsymbol{p}) e^{-ipx} + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} v^s(\boldsymbol{p}) e^{ipx})
\end{aligned}
$$

$\overline{\psi}(\boldsymbol{x}, t)$ は

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\overline{u}^s(\boldsymbol{p})e^{ipx}+b_{\boldsymbol{p}}^{s}\overline{v}^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx})$$

場の演算子に対する同時刻反交換関係は

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}$$

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b(\boldsymbol{y},t)\}=\{\psi_a^\dagger(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=0$$

真空 $|0\rangle$ は

$$a_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle=b_{\boldsymbol{p}}^s|0\rangle=0$$

で定義します。ハミルトニアンは

$$H=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}E_{\boldsymbol{p}}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^s+b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^s)$$

ちなみに、ハイゼンベルグ描像ではディラック方程式から

$$\begin{aligned}H=&\int d^3x\overline{\psi}(x)(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+m)\psi(x)\\=&\int d^3x\overline{\psi}(x)i\partial_0\psi(x)\\=&\int d^3x\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\overline{\psi}(x)i\sum_{s=1}^{2}(-ip_0a_{\boldsymbol{p}}^su^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+ip_0b_{\boldsymbol{p}}^sv^s(\boldsymbol{p})e^{ipx})\end{aligned}$$

とすることで、簡単に計算できます。
運動量演算子は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} = &\int d^3x \psi^\dagger(-i\nabla)\psi \\
= &\int d^3x \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\boldsymbol{p}\sum_{s=1}^{2} \\
&\times (a_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}u^{s\dagger}(\boldsymbol{q})e^{iqx} + b_{\boldsymbol{q}}^{s}v^{s\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-iqx})(\boldsymbol{p}a_{\boldsymbol{p}}^{s}u^{s}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} - \boldsymbol{p}b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}v^{s}(\boldsymbol{p})e^{ipx}) \\
= &\int d^3x \int \frac{d^3pd^3q}{(2\pi)^6}\boldsymbol{p}\sum_{s=1}^{2} \\
&\times (a_{\boldsymbol{q}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s}u^{s\dagger}(\boldsymbol{q})u^{s}(\boldsymbol{p})e^{i(q_0-p_0)t}e^{-i(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} - b_{\boldsymbol{q}}^{s}b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}v^{s\dagger}(\boldsymbol{q})v^{s}(\boldsymbol{p})e^{-i(q_0-p_0)t}e^{i(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}} + \cdots) \\
= &\int \frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3}\boldsymbol{p}\sum_{s=1}^{2}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s}u^{s\dagger}(\boldsymbol{q})u^{s}(\boldsymbol{p})\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) - b_{\boldsymbol{p}}^{s}b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}v^{s\dagger}(\boldsymbol{q})v^{s}(\boldsymbol{p})\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})) \\
= &\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\boldsymbol{p}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s} - b_{\boldsymbol{p}}^{s}b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}) \\
= &\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\boldsymbol{p}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s} + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^{s})
\end{aligned}
$$

ハミルトニアン演算子と運動量演算子から、$a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}$ はエネルギー $E_{\boldsymbol{p}}$、運動量 $\boldsymbol{p}$ を持った粒子を生成し、$b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}$ はエネルギー $E_{\boldsymbol{p}}$、運動量 $\boldsymbol{p}$ を持った反粒子を生成することがわかります。例えば $a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}|0\rangle = |1\rangle$ として

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}|1\rangle = &\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\boldsymbol{p}(a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s} + b_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}b_{\boldsymbol{p}}^{s})a_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger}|0\rangle \\
= &\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}\boldsymbol{p}\{a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}((2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs} - a_{q}^{r\dagger}a_{\boldsymbol{p}}^{s})\}|0\rangle \\
= &\int d^3p\sum_{s=1}^{2}\boldsymbol{p}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}a_{p}^{s\dagger}|0\rangle \\
= &\,\boldsymbol{p}|1\rangle
\end{aligned}
$$

となっています。

最後に電荷を保存量と対応させます。ディラック方程式のラグランジアンは任意の定数 α による位相変換

$$
\psi(x) \ \Rightarrow \ \psi(x)e^{i\alpha} \ , \ \psi^\dagger(x) \ \Rightarrow \ \psi^\dagger(x)e^{-i\alpha}
$$

に対して不変です。そのため、ネーターの定理によって

$$
\begin{aligned}
J_\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\psi)}\delta\psi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\psi^\dagger)}\delta\psi^\dagger(x) \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\psi)}i\alpha\psi(x) - \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial^\mu\psi^\dagger)}i\alpha\psi^\dagger(x) \\
&= -\alpha\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)
\end{aligned}
$$

というネーターカレントが求まります。これを電荷密度、電流密度による 4 元カレントとみなします。実際に保存カレントになっているのは、ディラック方程式を使って

$$
\begin{aligned}
\partial^\mu J_\mu &= (\partial^\mu\overline{\psi}(x))\gamma_\mu\psi(x) + \overline{\psi}(x)\gamma_\mu\partial^\mu\psi(x) \\
&= im\overline{\psi}(x)\psi(x) - im\overline{\psi}(x)\psi(x) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となることから確かめられます。そして、保存量として

$$
Q = \int d^3x J_0 = -\alpha\int d^3x\psi^\dagger(x)\psi(x)
$$

というのが求まります。$\psi^\dagger(x)\psi(x)$ は明らかに粒子数演算子部分なので

$$
Q = -\alpha\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}a^s_{\boldsymbol{p}} - b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}b^s_{\boldsymbol{p}})
$$

Q は電子と陽電子による電荷の和 $e^-N_a + e^+N_b$ になっています (N_a, N_b は電子、陽電子の粒子数で、素電荷 $e>0$ に対して、$e^- = -e < 0$ は電子の電荷、$e^+ = e > 0$ は陽電子の電荷)。

・補足

ディラック場を解析力学で扱うときに注意があります。それは、ディラック場の反交換関係を古典的に対応させるときは、ディラック場をグラスマン数 ($ab = -ba$ となるもの。「経路積分〜ディラック場〜」参照) に置き換える必要があることと、拘束条件があることです。ただし、ディラック場をグラスマン数とすると、もはや古典的な物理量ではなくなり (観測量は普通の数だから)、解析力学での形式的な話になります。このため、物理的な粒子に対応するものとしてディラック場を導入しているここではグラスマン数とする必要がないです。

拘束条件があることはすぐに分かります。$\psi, \psi^\dagger$ の正準共役な量

$$
\pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^\dagger\ ,\ \pi_{\psi^\dagger} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^\dagger} = 0
$$

を見ると、正準共役な量の片方が 0 です、このため拘束条件 (第一次拘束条件)

$$
\pi_\psi - i\psi^\dagger = 0\ ,\ \pi_{\psi^\dagger} = 0
$$

が存在します。拘束条件があると正準量子化でのポアソン括弧から交換関係への置き換えが使えなくなり、ディラック括弧に書き換えてから交換関係にするという手順を踏む必要が出てきます。これを見るには拘束条件の話に触れないといけないので、表面的な話をするだけにしておきます。

ディラック場の反交換関係を複素数でのクライン・ゴルドン場と同じように正準共役な量による反交換関係として

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)\} = i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab} \quad (\pi=\pi_\psi)$$

とし、他の反交換関係は 0 と設定すると

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)\} = i\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t))\} = 0$$

となるために矛盾しているのが分かります。これを修正する必要があります。どう修正するかは、ラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = i\psi^\dagger\partial_0\psi + i\overline{\psi}\gamma^i\partial_i\psi - m\overline{\psi}\psi = i\psi^\dagger\partial_0\psi - \mathcal{H} = \pi_\psi\partial_0\psi - \mathcal{H}$$

と書くと分かります。これをラグランジアンとハミルトニアンを繋ぐルジャンドル変換と見たとき、$\partial_0\psi^\dagger$ と $\pi_{\psi^\dagger}$ がいないです。なので、ψ と $\psi^\dagger$ の反交換関係を 0 とする必要がないと考えて

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\} = -i\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)\} = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}$$

とすれば、ψ_a と π_b の反交換関係が正準量子化での関係を再現できます。

ディラック場では拘束条件は深刻な問題にならないですが、ゲージ場ではゲージ固定が必要になるために拘束条件を真面目に見ないと構造が分からなくなっています。ちなみに、ディラック場では第二類拘束条件、ゲージ場では第一類拘束条件というように拘束条件の種類が異なっていて、ゲージ場では第一類から第二類にすることで交換関係を設定できます。