ディラック場〜伝播関数〜

ディラック場の伝播関数を定義します。
ここでも「クライン・ゴルドン場〜伝播関数〜」と同じように遅延グリーン関数を出しています。

最初に「ディラック場」では雑に扱った規格化による係数をはっきりさせておきます。ディラック場を

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}\sum_{s=1}^{2}(a^s(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p})e^{ipx})$$

$$\psi^\dagger(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}\sum_{s=1}^{2}(a^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{ipx}+b^s(\boldsymbol{p})v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-ipx})\quad (p_0=E_{\boldsymbol{p}}=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2})$$

規格化を $N_{\boldsymbol{p}}$ としています。これによる同時刻反交換関係を求めます。$\psi(\boldsymbol{x},t)\psi^\dagger(\boldsymbol{y},t)$ は

$$\begin{aligned}\psi_a(\boldsymbol{x},t)\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}N_{\boldsymbol{q}}\sum_{s,r=1}^{2}\\&\times(a^s(\boldsymbol{p})u_a^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v_a^s(\boldsymbol{p})e^{ipx})(a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})u_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{iqy}+b^r(\boldsymbol{q})v_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-iqy})\\=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}N_{\boldsymbol{q}}\sum_{s,r=1}^{2}\\&\times(a^s(\boldsymbol{p})a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})u_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{iqy}+b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})v_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{iqy}\\&+a^s(\boldsymbol{p})b^r(\boldsymbol{q})u_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{-iqy}+b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})b^r(\boldsymbol{q})v_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{-iqy})\end{aligned}$$

下付きの a,b はスピノール成分を表し、iqy での y_0 は t です。$\psi^\dagger(\boldsymbol{y},t)\psi(\boldsymbol{x},t)$ は

$$\begin{aligned}\psi^\dagger(\boldsymbol{y},t)\psi(\boldsymbol{x},t)=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}N_{\boldsymbol{q}}\sum_{s,r=1}^{2}\\&\times(a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})a^s(\boldsymbol{p})u_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{iqy}+a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{iqy}\\&+b^r(\boldsymbol{q})a^s(\boldsymbol{p})u_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{-iqy}+b^r(\boldsymbol{q})b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{-iqy})\end{aligned}$$

これらによる反交換関係は

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}N_{\boldsymbol{q}}\sum_{s,r=1}^{2}\\&\times(\{a^s(\boldsymbol{p}),a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\}u_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{iqy}+\{b^{s\dagger}(\boldsymbol{p}),a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\}v_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{iqy}\\&+\{a^s(\boldsymbol{p}),b^r(\boldsymbol{q})\}u_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{-iqy}+\{b^{s\dagger}(\boldsymbol{p}),b^r(\boldsymbol{q})\}v_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{-iqy})\end{aligned}$$

これが

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}$$

となればいいので

$$\begin{aligned}&\{a^s(\boldsymbol{p}),a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\}=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{sr}\ ,\ \{b^s(\boldsymbol{p}),b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\}=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{sr}\\&\{a^s(\boldsymbol{p}),b^r(\boldsymbol{q})\}=\{a^{s\dagger}(\boldsymbol{p}),b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\}=0\end{aligned}$$

と与えます。また、他の反交換関係は ψ 同士と $\psi^\dagger$ 同士での同時刻反交換関係から 0 になります。これらによって

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}N_{\boldsymbol{q}}\sum_{s,r=1}^2\\&\qquad\times((2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{sr}u_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{-ipx}e^{iqy}+(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{sr}v_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})e^{ipx}e^{-iqy})\\=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}^2(u_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-ip_0t}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}e^{ip_0t}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}}+v_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{ip_0t}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}e^{-ip_0t}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{y}})\\=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}^2(u_a^s(\boldsymbol{p})u_b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+v_a^s(\boldsymbol{p})v_b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})\\=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}^2(u_a^s(\boldsymbol{p})\overline{u}_c^s(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+v_a^s(\boldsymbol{p})\overline{v}_c^s(\boldsymbol{p})e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{cb}\end{aligned}$$

スピノール部分の規格化を（「ディラック方程式の解とスピン」参照）

$$\begin{aligned}&u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p})=2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{sr}\ ,\ v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^r(\boldsymbol{p})=2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{sr}\\&\sum_{s=1}^2u^s(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{p})=p_\mu\gamma^\mu+m\ ,\ \sum_{s=1}^2v^s(\boldsymbol{p})\overline{v}^s(\boldsymbol{p})=p_\mu\gamma^\mu-m\end{aligned}$$

と与えれば

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\boldsymbol{x},t),\psi_b^\dagger(\boldsymbol{y},t)\}=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}^2((p_\mu\gamma^\mu+m)_{ac}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+(p_\mu\gamma^\mu-m)_{ac}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{cb}\\=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}^2((p_0\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)_{ac}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+(p_0\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}-m)_{ac}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{cb}\\=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}^2((p_0\gamma_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}+m)_{ac}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}+(p_0\gamma_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}-m)_{ac}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{cb}\\=&\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}2p_0N_{\boldsymbol{p}}^2e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\delta_{ab}\end{aligned}$$

$N_{\boldsymbol{p}} = 1/\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}$ として

$$\{\psi_a(\boldsymbol{x}, t), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y}, t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta_{ab}$$

もしくは生成、消滅演算子に $\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}$ をくっつけて定義しなおせば

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s=1}^{2}(a^s(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + b^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p})e^{ipx})$$

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s=1}^{2}(a^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{ip\cdot x} + b^s(\boldsymbol{p})v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot x}$$

$$\{a^s(\boldsymbol{p}), a^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\} = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{sr}\ ,\ \{b^s(\boldsymbol{p}), b^{r\dagger}(\boldsymbol{q})\} = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{sr}$$

となり、「規格化について」での規格化になります。また、スピノール部分の規格化を

$$u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p}) = \frac{E_{\boldsymbol{p}}}{m}\delta^{sr}\ ,\ v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^r(\boldsymbol{p}) = \frac{E_{\boldsymbol{p}}}{m}\delta^{sr}$$

$$\sum_{s=1}^{2}u^s(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{p}) = \frac{p_\mu\gamma^\mu + m}{2m}\ ,\ \sum_{s=1}^{2}v^s(\boldsymbol{p})\overline{v}^s(\boldsymbol{p}) = \frac{p_\mu\gamma^\mu - m}{2m}$$

とした場合では

$$\begin{aligned}\{\psi_a(\boldsymbol{x}, t), \psi_b^\dagger(\boldsymbol{y}, t)\} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}N_{\boldsymbol{p}}^2(\frac{(p_\mu\gamma^\mu + m)_{ac}}{2m}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + \frac{(p_\mu\gamma^\mu - m)_{ac}}{2m}e^{-i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})})(\gamma_0)_{cb}\\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p_0}{m}N_{\boldsymbol{p}}^2\delta_{ab}\end{aligned}$$

となるので、$N_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{m/E_{\boldsymbol{p}}}$ となります。他にも「ディラック場」でのように $2E_{\boldsymbol{p}}$ が出てこないように規格化することもできます。

ここから伝播関数の話になります。ディラック場でも伝播関数の定義は同じで、時間順序積 T によって

$$S_F^{(ab)}(x-y) = \langle 0|\mathrm{T}(\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y))|0\rangle$$

と与えます。ディラック場では反交換関係に従うために、クライン・ゴルドン場と違い時間順序積での入れ替えで符号が反転し

$$S_F^{(ab)}(x-y) = \langle 0|\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)|0\rangle \quad (x^0 > y^0)$$

$$S_F^{(ab)}(x-y) = -\langle 0|\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle \quad (x^0 < y^0)$$

このようにフェルミオン (フェルミ粒子) では反交換することに注意してください。階段関数 Θ を使ってまとめれば

$$S_F^{(ab)}(x-y)=\Theta(x^0-y^0)\langle 0|\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)|0\rangle-\Theta(y^0-x^0)\langle 0|\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle$$

となります。

　場の演算子を

$$\psi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1}^{2}(a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(p)e^{-ipx}+b^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}v^s(p)e^{ipx})$$

$$\overline{\psi}(x)=\int\frac{d^3p}{(2\boldsymbol{\pi})^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1}^{2}(a^{s\dagger}_{\boldsymbol{p}}\overline{u}^s(p)e^{ipx}+b^s_{\boldsymbol{p}}\overline{v}^s(p)e^{-ipx})$$

として実際に計算していきます。規格化には $1/\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}$ を使っています。場 2 つによる真空期待値は

$$\begin{aligned}
\langle 0|\psi_a(x)\overline{\psi}_b(y)|0\rangle&=\langle 0|\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}'}}}\sum_{s,r}a^s_{\boldsymbol{p}}a^{r\dagger}_{\boldsymbol{p}'}u^s_a(p)\overline{u}^r_b(p')e^{-ipx}e^{ip'y}|0\rangle\\
&=\langle 0|\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^6}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}'}}}\sum_{s,r}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\delta^{rs}u^s_a(p)\overline{u}^r_b(p')e^{-ipx}e^{ip'y}|0\rangle\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_s u^s_a(p)\overline{u}^s_b(p)e^{-ip(x-y)}\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(p_\mu\gamma^\mu+m)_{ab}e^{-ip(x-y)}\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(i\partial_\mu\gamma^\mu+m)_{ab}e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}$$

入れ替えたものは

$$\langle 0|\overline{\psi}_b(y)\psi_a(x)|0\rangle=-\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}(i\partial_\mu\gamma^\mu+m)_{ab}e^{ip(x-y)}$$

∂_μ は x の偏微分です。これらは、$(i\partial_\mu\gamma^\mu+m)_{ab}$ がいるだけで、クライン・ゴルドン場のときと同じ形をしているので、クライン・ゴルドン場での $\Delta^{(\pm)}$ を使って

$$S_F^{(ab)}(x-y)=\Theta(x^0-y^0)(i\partial_\mu\gamma^\mu+m)_{ab}\Delta^{(+)}(x-y)-\Theta(y^0-x^0)(i\partial_\mu\gamma^\mu+m)_{ab}\Delta^{(-)}(x-y)$$

$\Delta^{(\pm)}$ の $\pm$ は $\exp[\mp ip(x-y)]$ に対応したものです。留数定理による計算から言えば、プラスは $+E_{\boldsymbol{p}}$、マイナスは $-E_{\boldsymbol{p}}$ に対応します。

　「クライン・ゴルドン場～伝播関数～」と同じように遅延グリーン関数を求めます。ディラック場による遅延グリーン関数は

$$S_R^{(ab)}(x-y)=\Theta(x^0-y^0)\langle 0|\{\psi_a(x),\overline{\psi}_b(y)\}|0\rangle$$

と定義されます。真空期待値はクライン・ゴルドン場に $(i\partial_\mu\gamma^\mu+m)_{ab}$ が作用している形なので、クライン・ゴルドン場での遅延グリーン関数 $D_R(x-y)$ を使って

$$S_R^{(ab)}(x-y)=(i\partial_\mu\gamma^\mu+m)_{ab}D_R(x-y)$$

と書けます。これの両辺に $(i\partial_\mu\gamma^\mu-m)_{ab}$ を作用させてやれば

$$\begin{aligned}(i\partial_\mu\gamma^\mu-m)_{ac}S_R^{(cb)}(x-y)&=-(\Box+m^2)D_R(x-y)\delta_{ab}\quad(\partial_\mu\gamma^\mu\partial_\nu\gamma^\nu=\Box)\\&=i\delta_{ab}\delta^4(x-y)\end{aligned}$$

「クライン・ゴルドン場〜伝播関数〜」の結果を使っています。δ_{ab} はクロネッカーデルタで、スピノール成分の単位行列として使っています。この結果から、S_R がディラック方程式のグリーン関数になっていることが分かります。

次に、$S_R(x-y)$ がどうなっているのかを求めます。フーリエ変換を使って

$$S_R(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}e^{-ip(x-y)}S_R(p)$$

これの両辺に $(i\partial_\mu\gamma^\mu-m)_{ab}$ を作用させて (行列要素 a,b は省いて書きます)

$$i\delta^4(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}(p_\mu\gamma^\mu-m)e^{-ip(x-y)}S_R(p)$$

これを満たすのは

$$S_R(p)=\frac{i}{p_\mu\gamma^\mu-m}=\frac{i(p_\mu\gamma^\mu+m)}{p^2-m^2}\tag{1}$$

なので、$x_0>y_0$ となる遅延グリーン関数がこれで与えられます。

というわけで、伝播関数にするには分母に $i\epsilon$ をつければいいだけで

$$S_F(x-y)=\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(p_\mu\gamma^\mu+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}e^{-ip(x-y)}$$

これは積分経路も QED で出てきたのと同じです。QED での「伝播関数」でも触れていますが、ディラック場 (フェルミオン) の伝播関数を (1) の最右辺のように書いたとき分母は行列ではないです。