ディラック方程式の解とスピン

ディラック方程式の解を求めて、スピンを持つことを見ます。
相対論的量子力学の「ディラック方程式」や「ディラック方程式の共変性」で求めたものを手順を変えて求めるだけです。
3 次元ベクトル成分はローマ文字で書き、その同じローマ文字の場合は 1 から 3 の和を取るようにしてます。

ここでは、ガンマ行列の具体的な計算にはディラック・パウリ表現

$$\beta=\gamma^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{\alpha}=\alpha_i=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}\ ,\ \gamma^i=\beta\alpha_i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\-\sigma_i&0\end{pmatrix}$$

を使います。$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ はパウリ行列で

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$[\sigma_i,\sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\sigma_k\ ,\ (\sigma_iA_i)(\sigma_jA_j)=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})^2=\boldsymbol{A}^2$$

パウリ行列は 3 次元で扱うので、α_i と同じように添え字の上付き下付きは関係ないです。4×4 行列の $\boldsymbol{\alpha},\beta$ とガンマ行列を、成分が 2×2 行列の 2×2 行列の形で書いています。1 は対角行列で、0 は成分が 0 の 2×2 行列です。また、I としたときは 4×4 行列の単位行列です。

最初に、ローレンツ変換に対してスピノールがどう変換されるかを見ます。スピノール $\psi(x)$ はディラック方程式

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=(i\partial_0+i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla-m\beta)\psi(x)=0$$

に従っています。ローレンツ変換を

$$x^{\mu\prime}=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

とし、これに対してスピノールは

$$\psi'(x')=S(\Lambda)\psi(x)$$

と変換されるとします。この $S(\Lambda)$ を求めます。

ローレンツ変換 Λ の逆変換を Λ^{-1} ($\Lambda^\alpha{}_\nu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta=\delta^\alpha_\beta$) として

$$x^\nu=(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x^{\mu\prime}$$

から

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$$

となり、ディラック方程式は

$$\begin{aligned}
0 = (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x') &= (i\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - m)\psi'(x') \\
&= (i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m)S(\Lambda)\psi(x) \\
&= S^{-1}(\Lambda)(i\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu - m)S(\Lambda)\psi(x) \\
&= (iS^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu S(\Lambda)\partial_\nu - m)\psi(x)
\end{aligned}$$

ディラック方程式はローレンツ変換で形が変わらないことが要求されるので、これから

$$\begin{aligned}
S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu S(\Lambda) &= \gamma^\nu \\
S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) &= \gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu
\end{aligned}$$

として、ガンマ行列の変換を与えます。これでローレンツ変換でディラック方程式の形は変わらなくなります。

　無限小変換でのローレンツ変換として

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = x^\mu + \epsilon\omega_{\mu\nu}x^\nu \ ,\ \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon\omega^\mu{}_\nu \ ,\ (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - \epsilon\omega^\mu{}_\nu$$

ϵ は微小量です。これで S を展開すると、S はスピノール成分による 4×4 行列なので

$$S(\Lambda) = 1 + \epsilon T$$

という形になるはずです。T が変換部分 $(\psi' \simeq \psi + \epsilon T\psi)$ なので、$\omega_{\mu\nu}$ の 1 次を含むことから

$$T = -\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \ ,\ T^{-1} = \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

として、$\sigma^{\mu\nu}$ を求めます。$-i/4$ は後のためにつけています。

　ガンマ行列の変換に入れて

$$\begin{aligned}
S(\Lambda)\gamma^\nu S^{-1}(\Lambda) &= \gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \\
(1+\epsilon T)\gamma^\nu (1-\epsilon T) &= \gamma^\mu (\delta^\nu_\mu - \epsilon\omega^\nu{}_\mu)
\end{aligned}$$

ϵ は微小なので左辺の ϵ^2 の項は無視して

$$(1+\epsilon T)\gamma^\nu (1-\epsilon T) \simeq (1+\epsilon T)\gamma^\nu - \epsilon\gamma^\nu T = \gamma^\nu + \epsilon T\gamma^\nu - \epsilon\gamma^\nu T$$

そうすると、両辺の ϵ の項は

$$\gamma^\nu T - T\gamma^\nu = \gamma^\mu \omega^\nu{}_\mu \tag{1}$$

これの右辺は $\omega^\nu{}_\mu$ の反対称性から

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu \omega^\nu{}_\mu = g^{\nu\alpha}\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\nu\alpha}\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta} + g^{\nu\alpha}\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2}(g^{\nu\alpha}\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta} - g^{\nu\alpha}\gamma^\beta\omega_{\beta\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}(g^{\nu\alpha}\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta} - g^{\nu\beta}\gamma^\alpha\omega_{\alpha\beta}) \\
&= \frac{1}{2}(g^{\nu\alpha}\gamma^\beta - g^{\nu\beta}\gamma^\alpha)\omega_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

そうすると、$\gamma^\nu T$ は $g^{\nu\alpha}\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta}$ になると予想して

$$\begin{aligned}
\gamma^\nu T &= g^{\nu\alpha}\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta} \\
\gamma_\nu\gamma^\nu T &= g^{\nu\alpha}\gamma_\nu\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta} \\
4T &= \gamma^\alpha\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta} \\
T &= \frac{1}{4}\gamma^\alpha\gamma^\beta\omega_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

これでいいのか確かめるために、(1) に入れてみれば

$$\begin{aligned}
\gamma^\nu T - T\gamma^\nu &= \frac{1}{4}(\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta - \gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu)\omega_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}(\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta - (2g^{\beta\nu}\gamma^\alpha - \gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta))\omega_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}(\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta - 2g^{\beta\nu}\gamma^\alpha + \gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)\omega_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{4}(\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta - 2g^{\beta\nu}\gamma^\alpha + 2g^{\alpha\nu}\gamma^\beta - \gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta)\omega_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}(g^{\alpha\nu}\gamma^\beta - g^{\beta\nu}\gamma^\alpha)\omega_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

となって、(1) の右辺に一致します。よって

$$T = -\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu$$

から

$$\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = i\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\omega_{\mu\nu}$$

となるので、$\sigma^{\mu\nu}$ は

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

と求まります。

　というわけで、スピノールの無限小変換は

$$\psi'(x') = (1 - \frac{i}{4}\epsilon\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\psi(x)$$

これを使って $\psi'(x')$ を展開すると

$$\begin{aligned}
\psi'(x') = \ & S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \\
&= (1 - \frac{i}{4}\epsilon\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})\psi((\delta^\mu_\nu - \epsilon\omega^\mu{}_\nu)x'^\nu) \\
&= (1 - \frac{i}{4}\epsilon\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})(\psi(x') - \epsilon\omega^\mu{}_\nu x'^\nu\partial'_\mu\psi(x')) \\
&= (1 - \frac{i}{4}\epsilon\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})\psi(x') - \epsilon\omega^\mu{}_\nu x'^\nu\partial'_\mu\psi(x') \\
&= \psi(x') - \frac{i}{4}\epsilon\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\psi(x') - \epsilon\omega^\mu{}_\nu x'^\nu\partial'_\mu\psi(x') \\
&= \psi(x') + \epsilon(-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - \omega^\mu{}_\nu x'^\nu\partial'_\mu)\psi(x') \qquad (2)
\end{aligned}$$

これは同じ位置でのスピノールに対する変換の式です。

　ローレンツ変換が求まったところで、対応する保存量を作ります。そのために、ネーターの定理を持ってきます。ディラック方程式のラグランジアンを

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

とします。ネーターカレントは $\psi(x)$ がディラック方程式に従っているときに出てくるので、ネーターカレント

$$J_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\alpha\psi)}\overline{\delta}\psi + \mathcal{L}\delta x_\mu$$

において $\mathcal{L} = 0$ です。$\overline{\delta}\psi$ には (2) を入れることで

$$J_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\alpha\psi)}\overline{\delta}\psi = i\epsilon\overline{\psi}\gamma_\alpha(-\frac{i}{4}\sigma^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu} - \omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu)\psi \qquad (3)$$

第二項は

$$\omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu = \frac{1}{2}(\omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu\partial_\mu) = \frac{1}{2}(\omega^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu + \omega^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu) = -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$$

なので、「ネーターの定理」で見たように軌道角運動量に対応します。そして、第一項はスピンに対応すると考えます。

$\sigma^{\mu\nu}$ は反対称で $\mu \neq \nu$ のときに 0 でないので、3 次元で可能なのは $\sigma^{12}, \sigma^{31}, \sigma^{23}$ だけです。ディラック・パウリ表現では

$$\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^2\gamma^1 = -i\Sigma_3\ ,\ \gamma^3\gamma^1 = -\gamma^1\gamma^3 = -i\Sigma_2\ ,\ \gamma^2\gamma^3 = -\gamma^3\gamma^2 = -i\Sigma_1$$

となることから、これらは

$$\sigma^{12} = \frac{i}{2}(\gamma^1\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1) = \Sigma_3$$

$$\sigma^{31} = \frac{i}{2}(\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3) = \Sigma_2$$

$$\sigma^{23} = \frac{i}{2}(\gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) = \Sigma_1$$

$\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ は

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

としています。そうすると、J_0 の第一項での 3 次元部分は $\psi^\dagger\boldsymbol{\Sigma}\psi$ となります。このことと、$\boldsymbol{\Sigma}$ は量子力学でのスピン演算子を 4 次元に拡張したように見えることから、スピン演算子と考えられます。実際に、後で見るようにディラック場による 1 粒子状態に対して ± 1 の固有値を持ちます（1/2 を付ければ $\pm 1/2$）。

ここからディラック方程式の解を求めます。ディラック方程式は

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0$$

に左から $(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)$ をかければ

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = -(\Box + m^2)\psi(x)$$

なので、$\psi(x)$ はクライン・ゴルドン方程式 (単位行列 I がいる) の解にもなっていることが分かります。このことから解の形を

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x)\\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})e^{ipx} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})e^{-ipx} \quad (p_0 = E = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2})\end{aligned}$$

と与え、ディラック方程式を満たす $\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ を求めます。$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ は 4 成分スピノールです。ディラック方程式に入れれば

$$(p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)\psi^{(-)}(\boldsymbol{p}) = 0\ ,\ (-p_0\gamma_0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)\psi^{(+)}(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{4}$$

となります $(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}=-p_i\gamma^i)$。$\gamma_0$ をかければ

$$(p_0-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\beta m)\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})=0\ ,\ (-p_0+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}-\beta m)\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})=0$$

$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ は 4 成分持っていますが、これを 2 成分スピノール χ_1,χ_2 に分けて

$$\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\chi_1^{(\pm)}(\boldsymbol{p})\\ \chi_2^{(\pm)}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$$

ディラック・パウリ表現によって、$\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})$ では

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\beta m)\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})=p_0\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})$$
$$\left(\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m&0\\0&-m\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})\\ \chi_2^{(-)}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}=p_0\begin{pmatrix}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})\\ \chi_2^{(-)}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$$

これの 1 行目と 2 行目の成分の式はそれぞれ

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_2^{(-)}(\boldsymbol{p})+m\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})=p_0\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})$$
$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})-m\chi_2^{(-)}(\boldsymbol{p})=p_0\chi_2^{(-)}(\boldsymbol{p})$$

となり、この連立方程式は

$$\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2}{p_0+m}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})+m\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})=p_0\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})\qquad(\chi_2^{(-)}(\boldsymbol{p})=\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p}))$$

パウリ行列での $(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=\boldsymbol{p}^2$ から

$$\frac{\boldsymbol{p}^2+m^2-p_0^2}{p_0+m}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})=0$$

$p_0^2=\boldsymbol{p}^2+m^2$ なので、$\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})$ は任意です。よって、$\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})$ を任意の関数として

$$\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})\\ \chi_2^{(-)}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})\\ \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}\chi_1^{(-)}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$$

としたものが解になります。同様にすれば

$$\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}\chi_1^{(+)}(\boldsymbol{p})\\ \chi_2^{(+)}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}\chi_2^{(+)}(\boldsymbol{p})\\ \chi_2^{(+)}(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}$$

これでディラック方程式を満たす $\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ が求まりました。

最初に見たように、ディラック方程式による粒子はスピンを持つことが予想されます。なので、スピンによって区別できるように $\chi^{(\pm)}_{1,2}$ を選びます。

まず、静止している解を求めます。3 次元運動量が $\boldsymbol{p}=0$ ($p_0=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}=m$) で静止しているので、このときのディラック方程式は

$$m(1-\beta)\psi^{(-)}(0)=0\ ,\ m(1+\beta)\psi^{(+)}(0)=0$$

となり、これらからすぐに

$$\psi^{(-)}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ \psi^{(+)}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

というのが解になるのが分かります。そして、これはスピンの上向き、下向きの状態に対応しているように見えます。なので、スピン演算子 $\boldsymbol{\Sigma}$ の固有値で区別出来るように思えますが、$\boldsymbol{\Sigma}$ はディラック方程式の演算子部分（ハミルトニアン演算子）と交換しません。これは、単純にパウリ行列は

$$[\sigma_i,\sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

なので、$\boldsymbol{\alpha}$ のパウリ行列に引っ掛かって

$$\Sigma_3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha})\neq(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha})\Sigma_3$$

となるからです。このため、固有値、固有関数の形にできません (ハミルトニアン演算子との同時固有関数にならない)。

なので、$\boldsymbol{\Sigma}$ を含む交換できる演算子を作ります。パウリ行列が交換できればいいので、$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha})^2=\boldsymbol{p}^2$ を利用して

$$h(\boldsymbol{p})=\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$$

と作ります。3 次元運動量の方向 $\boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ との内積なので、3 次元運動量の方向を向いたスピン演算子です。これをヘリシティ演算子 (helicity operator) と呼びます。$h(\boldsymbol{p})$ は明らかにエルミート演算子で、$h^2(\boldsymbol{p})$ は

$$\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{p}|^2}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

なので、固有値 ±1 を持ちます。

ヘリシティ演算子を使えば

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma})(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}&0\\0&\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\\\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{p}^2\\\boldsymbol{p}^2&0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma})$$

$$(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma})\beta=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}&0\\0&-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}=\beta(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\Sigma})$$

から

$$h(\boldsymbol{p})(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\beta m)\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\alpha}+\beta m)h(\boldsymbol{p})\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$$

となり、$h(\boldsymbol{p})\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$ もディラック方程式を満たします。このときの解を取り出します。つまり、ヘリシティ演算子の固有値、固有関数として

$$h(\boldsymbol{p})\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})=\pm\psi^{(\pm)}(\boldsymbol{p})$$

となる解です ($\pm$ と $(\pm)$ は無関係)。$h(\boldsymbol{p})$ と $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ は交換するために、これは 2 成分スピノールに対して

$$\begin{aligned}
h(\boldsymbol{p})\chi_1^{(-)}&=\pm\chi_1^{(-)}\ ,\ h(\boldsymbol{p})\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}\chi_1^{(-)}=\pm\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}\chi_1^{(-)}\\
h(\boldsymbol{p})\chi_2^{(+)}&=\pm\chi_2^{(+)}\ ,\ h(\boldsymbol{p})\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}\chi_2^{(+)}=\pm\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}\chi_2^{(+)}
\end{aligned}$$

となるので、これらを満たす 2 成分スピノールを決めればいいです。

それが、$\chi_1^{(-)}$ では固有値 ±1 に対応する $u_\pm$、$\chi_2^{(+)}$ では $v_\pm$ と求まったとします。$u_\pm, v_\pm$ はヘリシティ演算子の固有関数になる 2 成分スピノールであって、任意の 2 成分スピノールではないです。しかし、異なる固有値を持つ固有ベクトルは線形独立なので、u_+, u_- (v_+, v_-) は線形独立です。そして、2 次元ベクトルと同じように考えることで、線形独立な u_+, u_- (v_+, v_-) の線形結合から任意の 2 成分スピノールが作れるので、適当な係数をつけて

$$\begin{aligned}
\chi_1^{(-)}&=a_+(\boldsymbol{p})u_+(\boldsymbol{p})+a_-(\boldsymbol{p})u_-(\boldsymbol{p})\\
\chi_2^{(+)}&=b_+(\boldsymbol{p})v_+(\boldsymbol{p})+b_-(\boldsymbol{p})v_-(\boldsymbol{p})
\end{aligned}$$

よって、$\psi^{(\pm)}$ はヘリシティ演算子の固有値 ±1 で区別される状態の和によって

$$\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})=a_+(\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}u_+(\boldsymbol{p})\\ \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}u_+(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}+a_-(\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}u_-(\boldsymbol{p})\\ \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}u_-(\boldsymbol{p})\end{pmatrix} \tag{5a}$$

$$\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})=b_+(\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}v_+(\boldsymbol{p})\\ v_+(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}+b_-(\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}v_-(\boldsymbol{p})\\ v_-(\boldsymbol{p})\end{pmatrix} \tag{5b}$$

と書けます。これを、$s=1$ で固有値 $+1$、$s=2$ で固有値 -1 に対応させて

$$\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})=\sum_{s=1}^2 a_{\boldsymbol{p}}^s u^s(\boldsymbol{p})\ ,\ \psi^{(+)}(\boldsymbol{p})=\sum_{s=1}^2 b_{\boldsymbol{p}}^s v^s(\boldsymbol{p})$$

とします。u_+ と u_- は 1 に規格化されているとして

$$u^{1\dagger}(\boldsymbol{p})u^1(\boldsymbol{p})=(u_+^\dagger(\boldsymbol{p})\ u_+^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m})\begin{pmatrix} u_+(\boldsymbol{p}) \\ \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{p_0+m}u_+(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}=(1+\frac{\boldsymbol{p}^2}{(p_0+m)^2})u_+^\dagger(\boldsymbol{p})u_+(\boldsymbol{p})$$
$$=\frac{p_0^2+m^2+\boldsymbol{p}^2+2mp_0}{(p_0+m)^2}$$
$$=\frac{2p_0^2+2mp_0}{(p_0+m)^2}$$
$$=\frac{2p_0}{p_0+m}$$

他も同様なので、u^s, v^s の規格化を

$$u^{s\dagger}u^r=N\delta^{sr}\ ,\ v^{s\dagger}v^r=N\delta^{sr}$$

と与えます。$N=1$ に選べば、u^s, v^s の規格化定数は

$$\sqrt{\frac{p_0+m}{2p_0}}$$

となります。

「ディラック場」ではこれらによって

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\psi^{(-)}(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\psi^{(+)}(\boldsymbol{p})e^{ipx}\\&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}a_{\boldsymbol{p}}^s u^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx}+\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{s=1}^{2}b_{\boldsymbol{p}}^s v^s(\boldsymbol{p})e^{ipx}\end{aligned}\tag{6}$$

と表記しています。u^s, v^s の具体的な形は相対論的量子力学の「ディラック方程式」や「自由粒子の解〜別解〜」を見てください。

u^s, v^s の規格化と関係は $(p_0=E_{\boldsymbol{p}})$

(i) $u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p})=\delta^{sr}\ ,\ v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^r(\boldsymbol{p})=\delta^{sr}$

(ii) $\overline{u}^r(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p})=\dfrac{m}{p_0}\delta^{rs}\ ,\ \overline{v}^r(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p})=-\dfrac{m}{p_0}\delta^{rs}$

(iii) $v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(-\boldsymbol{p})=0$

(iv) $\displaystyle\sum_{s=1}^{2}u^s(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{p})=\frac{p_\mu\gamma^\mu+m}{2p_0}\ ,\ \sum_{s=1}^{2}v^s(\boldsymbol{p})\overline{v}^s(\boldsymbol{p})=\frac{p_\mu\gamma^\mu-m}{2p_0}$

導出は下の補足でしています。

最後に、ディラック場の生成演算子を作用させた状態からスピン演算子の固有値が出てくることを見ます。(3) でのスピンに対応すると予想される第一項の 3 次元成分から

$$\boldsymbol{S} = \int d^3x \psi^\dagger \boldsymbol{\Sigma} \psi$$

というものが作れ、これを演算子化します。(6) を演算子化して（$b_{\boldsymbol{p}}$ は「ディラック場」での置き換えを行っています）

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} = & \int d^3x \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \sum_{r,s=1}^{2} (a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) e^{ipx} + b_{\boldsymbol{p}}^{s} v^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) e^{-ipx}) \boldsymbol{\Sigma} (a_{\boldsymbol{q}}^{r} u^{r}(\boldsymbol{q}) e^{-iqx} + b_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger} v^{r}(\boldsymbol{q}) e^{iqx}) \\
= & \int d^3x \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \sum_{r,s=1}^{2} (a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{q}}^{r} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{\Sigma} u^{r}(\boldsymbol{q}) e^{i(p-q)x} + b_{\boldsymbol{p}}^{s} b_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger} v^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{\Sigma} v^{r}(\boldsymbol{q}) e^{-i(p-q)x} \\
& \qquad + a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} b_{\boldsymbol{q}}^{r\dagger} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{\Sigma} v^{r}(\boldsymbol{q}) e^{i(p+q)x} + b_{\boldsymbol{p}}^{s} a_{\boldsymbol{q}}^{r} v^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{\Sigma} u^{r}(\boldsymbol{q}) e^{-i(p+q)x}) \\
= & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{r,s=1}^{2} (a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^{r} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{\Sigma} u^{r}(\boldsymbol{p}) + b_{\boldsymbol{p}}^{s} b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger} v^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{\Sigma} v^{r}(\boldsymbol{p}) \\
& \qquad + a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{\Sigma} v^{r}(\boldsymbol{p}) e^{2ip_0x_0} + b_{\boldsymbol{p}}^{s} a_{\boldsymbol{p}}^{r} v^{s\dagger}(\boldsymbol{p}) \boldsymbol{\Sigma} u^{r}(\boldsymbol{p}) e^{-2ip_0x_0})
\end{aligned}$$

これの S_3 を使います。
　真空 $|0\rangle$ にはスピンはないはずなので

$$S_3|0\rangle = 0$$

を要求します。このとき

$$[S_3, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}]|0\rangle = S_3 a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}|0\rangle - a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger} S_3|0\rangle = S_3 a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}|0\rangle$$

となります。$\boldsymbol{S}$ の各項と $a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}$ の交換関係を見ると、生成、消滅演算子の反交換関係と消滅演算子が $|0\rangle$ に作用すれば 0 になるので

$$\begin{aligned}
&[a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^{r}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}]|0\rangle = (a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\{a_{\boldsymbol{p}}^{r}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}\} - \{a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}\} a_{\boldsymbol{p}}^{r})|0\rangle = a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^{rs'} \\
&[a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}]|0\rangle = (a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}\{b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}\} - \{a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}\} b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger})|0\rangle = 0 \\
&[b_{\boldsymbol{p}}^{s} a_{\boldsymbol{p}}^{r}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}]|0\rangle = (b_{\boldsymbol{p}}^{s}\{a_{\boldsymbol{p}}^{r}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}\} - \{b_{\boldsymbol{p}}^{s}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}\} a_{\boldsymbol{p}}^{r})|0\rangle = 0 \\
&[b_{\boldsymbol{p}}^{s} b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}]|0\rangle = (b_{\boldsymbol{p}}^{s}\{b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}\} - \{b_{\boldsymbol{p}}^{s}, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}\} b_{\boldsymbol{p}}^{r\dagger})|0\rangle = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

なので、$S_3 a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}|0\rangle$ で生き残るのは $a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger} a_{\boldsymbol{p}}^{r}$ の項だけで

$$S_3 a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}|0\rangle = [S_3, a_{\boldsymbol{k}}^{s'\dagger}]|0\rangle = \frac{1}{2}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{r,s=1}^{2} u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})\Sigma_3 u^r(\boldsymbol{p}) a_{\boldsymbol{p}}^{s\dagger}(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{k})\delta^{rs'}|0\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2} u^{s\dagger}(\boldsymbol{k})\Sigma_3 u^{s'}(\boldsymbol{k}) a_{\boldsymbol{k}}^{s\dagger}|0\rangle$$

ここで、p_3 方向のヘリシティ演算子は

$$h(p_3) = \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

なので、ヘリシティ演算子の固有値 $+1, -1$ を持つものとして

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

があることと (5a) から、静止してる解を

$$u^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とします。そうすると、$s' = 1, 2$ で

$$S_3 a_0^{1\dagger}|0\rangle = \sum_{s=1}^{2} u^{s\dagger}(0)\Sigma_3 u^1(0) a_0^{s\dagger}|0\rangle = \xi^{1\dagger}(0)\sigma_3\xi^1 a_0^{1\dagger}|0\rangle = a_0^{1\dagger}|0\rangle$$

$$S_3 a_0^{2\dagger}|0\rangle = \sum_{s=1}^{2} u^{s\dagger}(0)\Sigma_3 u^2(0) a_0^{s\dagger}|0\rangle = \xi^{2\dagger}(0)\sigma_3\xi^2 a_0^{2\dagger}|0\rangle = -a_0^{2\dagger}|0\rangle$$

として、運動量が 0 の粒子状態に対して S_3 は固有値 ± 1 を持ちます。このことから、S_3 はスピン演算子となり、量子力学でのスピン演算子 (角運動量演算子) の性質と同じように、ディラック方程式に従う粒子はスピン 1/2 となります。

$b_0^{s'\dagger}$ で行うと (7) の第 2 項が残るので、$a_0^{s'\dagger}$ のときから符号が反転します。このため、反粒子は逆向きのスピンを持つことになります。

・補足

u^s, v^s の関係を求めます。(i) は、ヘリシティ演算子はエルミート演算子なので、その異なる固有値に対する固有関数である $u^{1,2}, v^{1,2}$ はそれぞれが直交します。そして、1 に規格化するなら

$$u^{s\dagger}u^r = \delta^{sr}\ ,\ v^{s\dagger}v^r = \delta^{sr}$$

なので、(i) は u^s, v^s の規格化です。これらは 4 成分スピノールの行列の式なので、スピノール成分を a とすれば

$$\sum_{a=1}^{4}(u_a^s)^\dagger u_a^r = \delta^{sr}$$

となっています。

(ii) を求めます。u^s は (4) から

$$(p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)u^s(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{8}$$

に従っていて、これに $(u^r)^\dagger$ を左からかければ

$$\begin{aligned}
0 &= (u^r)^\dagger(p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)u^s \\
&= p_0(u^r)^\dagger\gamma_0 u^s - (u^r)^\dagger\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}u^s - m(u^r)^\dagger u^s) \\
&= p_0\overline{u}^r u^s - (u^r)^\dagger\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}u^s - m(u^r)^\dagger u^s
\end{aligned}$$

一方で、(8) のエルミート共役を取って、右から u^r をかければ

$$\begin{aligned}
0 &= (u^s)^\dagger(p_0\gamma_0^\dagger - (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma})^\dagger - m) \\
&= (u^s)^\dagger(p_0\gamma_0^\dagger + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m) \\
&= (u^s)^\dagger(p_0\gamma_0^\dagger + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)u^r \\
&= p_0\overline{u}^s u^r + (u^s)^\dagger\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}u^r - m(u^s)^\dagger u^r
\end{aligned}$$

二つを足して

$$\begin{aligned}
0 &= p_0\overline{u}^r u^s - (u^r)^\dagger\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}u^s - m(u^r)^\dagger u^s + p_0\overline{u}^r u^s + (u^r)^\dagger\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}u^s - m(u^r)^\dagger u^s \\
&= 2p_0\overline{u}^r u^s - 2m\delta^{rs} \\
\overline{u}^r u^s &= \frac{m}{p_0}\delta^{rs}
\end{aligned}$$

v^s では、(4) から

$$(-p_0\gamma_0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)v^s(\boldsymbol{p}) = 0 \tag{9}$$

なので、p_0 の符号が反転した結果になるだけで

$$\overline{v}^r v^s = -\frac{m}{p_0}\delta^{rs}$$

となります。

(iii) を求めます。$u^s(\boldsymbol{p})$ を $u^s(-\boldsymbol{p})$ にすると平面波 e^{-ipx} での $\boldsymbol{p}$ の符号が反転するので

$$(p_0\gamma_0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)u^s(-\boldsymbol{p}) = 0$$

これに $\overline{v}^r(\boldsymbol{p})$ を左からかけて

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{v}^r(\boldsymbol{p})(p_0\gamma_0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)u^s(-\boldsymbol{p}) \\
&= (v^r(\boldsymbol{p}))^\dagger(p_0 + \gamma_0\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - \gamma_0 m)u^s(-\boldsymbol{p})
\end{aligned} \tag{10}$$

そして、$v^s(\boldsymbol{p})$ の式 (9) に $\overline{u}^r(-\boldsymbol{p})$ を左からかけて、エルミート共役を取れば

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{u}^r(-\boldsymbol{p})(-p_0\gamma_0 + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)v^s(\boldsymbol{p}) \\
&= ((u^r(-\boldsymbol{p}))^\dagger(-p_0 + \gamma_0\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - \gamma_0 m)v^s(\boldsymbol{p}))^\dagger \\
&= (v^s(\boldsymbol{p}))^\dagger(-p_0 + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma})^\dagger\gamma_0 - \gamma_0 m)u^r(-\boldsymbol{p}) \\
&= (v^s(\boldsymbol{p}))^\dagger(-p_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma}\gamma_0 - \gamma_0 m)u^r(-\boldsymbol{p}) \\
&= (v^s(\boldsymbol{p}))^\dagger(-p_0 + \gamma_0\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - \gamma_0 m)u^r(-\boldsymbol{p})
\end{aligned}$$

これを (10) から引けば

$$0 = 2p_0(v^r(\boldsymbol{p}))^\dagger u^s(-\boldsymbol{p})$$

なので

$$(v^r(\boldsymbol{p}))^\dagger u^s(-\boldsymbol{p}) = 0$$

となります。

（iv）を求めます。$2mu^s(\boldsymbol{p})$ は (i) を使って

$$2mu^s(\boldsymbol{p}) = 2m\sum_{r=1}^{2} u^r(\boldsymbol{p})\delta^{rs} = 2p_0\sum_{r=1}^{2} u^r\overline{u}^r u^s$$

と変形できるので

$$
\begin{aligned}
0 &= (p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m)u^s(\boldsymbol{p}) \\
&= (-2m + p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m)u^s(\boldsymbol{p}) \\
&= (-2p_0\sum_{r=1}^{2} u^r\overline{u}^r + p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m)u^s(\boldsymbol{p}) \\
\sum_{r=1}^{2} u^r\overline{u}^r &= \frac{p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m}{2p_0}
\end{aligned}
$$

同様にして

$$
\sum_{s=1}^{2} v^s\overline{v}^s = \frac{p_\mu\gamma^\mu - m}{2p_0}
$$

ちなみに、今の導出において

$$
-2p_0\sum_{r=1}^{2} u^r\overline{u}^r + p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m = p_0\gamma_0 - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} - m
$$

となる可能性もありますが、このときは (5a),(5b) の形と一致しません (相対論的量子力学の「自由粒子解〜別解〜」参照)。

u, v の規格化によって関係は変更されます。別の規格化として

(i) $u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{sr}$, $v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^r(\boldsymbol{p}) = 2E_{\boldsymbol{p}}\delta^{sr}$

(ii) $\overline{u}^r(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = 2m\delta^{rs}$, $\overline{v}^r(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p}) = -2m\delta^{rs}$

(iii) $v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(-\boldsymbol{p}) = 0$

(iv) $\sum_{s=1}^{2} u^s(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{p}) = p_\mu\gamma^\mu + m$, $\sum_{s=1}^{2} v^s(\boldsymbol{p})\overline{v}^s(\boldsymbol{p}) = p_\mu\gamma^\mu - m$

これは多くの場合で使われており、$\psi(x)$ は

$$
\begin{aligned}
&\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1}^{2} a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1}^{2} b^s_{\boldsymbol{p}}v^s(\boldsymbol{p})e^{ipx} \\
&\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}
\end{aligned}
$$

と与えられます。もしくは、$\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}$ で再定義して

$$
\begin{aligned}
&\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s=1}^{2} a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\sum_{s=1}^{2} b^s_{\boldsymbol{p}}v^s(\boldsymbol{p})e^{ipx} \\
&\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = 2E_{\boldsymbol{p}}(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}
\end{aligned}
$$

とされます。また、ディラック方程式の解に合わせて

(i) $u^{s\dagger}(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p}) = \dfrac{E_{\boldsymbol{p}}}{m}\delta^{sr}$, $v^{s\dagger}(\boldsymbol{p})v^r(\boldsymbol{p}) = \dfrac{E_{\boldsymbol{p}}}{m}\delta^{sr}$

(ii) $\overline{u}^r(\boldsymbol{p})u^s(\boldsymbol{p}) = \delta^{rs}$, $\overline{v}^r(\boldsymbol{p})v^s(\boldsymbol{p}) = -\delta^{rs}$

(iii) $v^{r\dagger}(\boldsymbol{p})u^s(-\boldsymbol{p}) = 0$

(iv) $\displaystyle\sum_{s=1}^{2} u^s(\boldsymbol{p})\overline{u}^s(\boldsymbol{p}) = \frac{p_\mu\gamma^\mu + m}{2m}$, $\displaystyle\sum_{s=1}^{2} v^s(\boldsymbol{p})\overline{v}^s(\boldsymbol{p}) = \frac{p_\mu\gamma^\mu - m}{2m}$

とする規格化もあり (相対論的量子力学「ディラック方程式の解〜別解〜」参照)、このときは

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1}^{2} a^s_{\boldsymbol{p}}u^s(\boldsymbol{p})e^{-ipx} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{m}{E_{\boldsymbol{p}}}}\sum_{s=1}^{2} b^s_{\boldsymbol{p}}v^s(\boldsymbol{p})e^{ipx}$$

$$\{a^r_{\boldsymbol{p}}, a^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = \{b^r_{\boldsymbol{p}}, b^{s\dagger}_{\boldsymbol{q}}\} = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\delta^{rs}$$

となります。