

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 過程

電子が対消滅してミューオンと反ミューオンが生成される過程を電磁相互作用と、レプトン同士の反応なので弱い相互作用もあるとして見ていきます。それほど高いエネルギーでなければ弱い相互作用の効果は無視できる程度なんです、高エネルギー領域では弱い相互作用の効果は無視しきれなくなり、干渉効果が現れます。どの程度現れるのか簡単に見積もっておきます。電磁相互作用の効果弱い相互作用よりも十分大きいということは、各不変振幅が $\mathcal{M}_{EM} \gg \mathcal{M}_W$ であり、全体の不変振幅 $\mathcal{M}_W + \mathcal{M}_{EM}$ の二乗が

$$|\mathcal{M}_W + \mathcal{M}_{EM}|^2 \simeq |\mathcal{M}_{EM}|^2 + 2|\mathcal{M}_W \mathcal{M}_{EM}| = |\mathcal{M}_{EM}|^2 \left(1 + \frac{2|\mathcal{M}_W \mathcal{M}_{EM}|}{|\mathcal{M}_{EM}|^2}\right)$$

そうすると、電磁相互作用と弱い相互作用が干渉している項は (弱い相互作用の結合定数にはフェルミ結合定数を使って)

$$\frac{|\mathcal{M}_W \mathcal{M}_{EM}|}{|\mathcal{M}_{EM}|^2} \simeq \frac{Ge^2/q^2}{e^4/q^4} = \frac{G}{e^2} q^2 \simeq \frac{10^{-5}(GeV^2)}{4\pi/137} q^2 \simeq 10^{-4}(GeV^2) q^2$$

衝突する電子、陽電子が 10GeV のエネルギーを持っていたとすれば $q^2 \simeq 20^2(GeV)^2$ 、なので干渉効果による割合は 1% 程度、 15GeV なら 10% 程度現れてくるはず、

具体的に計算していきます。電磁相互作用はただの QED なので特に気にすることはないです。そして弱い相互作用を考えると、電子からミューオンであるために電荷の変化が起きていないことから、中性弱カレントです (中性弱カレントが見つかっていなければこのとき弱い相互作用を考慮していない)。そうすると中間状態として関わってくるベクトルボソンは Z ボソンだと考えられます。なので、まずは Z ボソン-レプトン-レプトンによる頂点がどうなっているのか知る必要があります。これはワインバーグ・サラムモデルでの相互作用ラグランジアン

$$\mathcal{L}_{LG}^{int} = \frac{g}{2\sqrt{2}}(J_-^{(l)\mu} W_\mu^- + J_+^{(l)\mu} W_\mu^+ + J_0^{(l)\mu} Z_\mu) - eJ_{(em)\mu}^{(l)} A_\mu$$

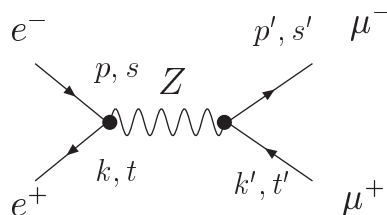
この Z_μ の項を見ればわかります。中性カレント J_0 は

$$J_0^\mu = \frac{\sqrt{2}}{2\cos\theta}(\bar{\psi}_{\nu_l}\gamma^\alpha(1-\gamma^5)\psi_{\nu_l} - \bar{\psi}_l\gamma^\alpha(g'_V - \gamma^5)\psi_l)$$

今は電子やミューオンに対してのものが要なので、 $\bar{\psi}_l\gamma^\alpha(g'_V - \gamma^5)\psi_l$ の部分だけを拾います。そうすると非可換ゲージ場でやったように、相互作用ラグランジアンから頂点は

$$\frac{-ig}{2\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2\cos\theta}\gamma^\alpha(g'_V - \gamma^5) = \frac{-ig}{4\cos\theta}\gamma^\alpha(g'_V - \gamma^5)$$

であることがわかります。というわけで、 Z ボソンを伝播関数とする場合の不変振幅は



$$\mathcal{M}_Z = \bar{u}_\mu(p', s') \frac{-ig}{4 \cos \theta} \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t') \frac{-i(g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / M_Z^2)}{q^2 - M_Z^2} \bar{v}_e(k, t) \frac{-ig}{4 \cos \theta} \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s)$$

$$q = p + k$$

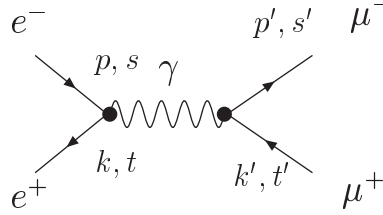
$$\psi_e = \sqrt{\frac{1}{2p_0}} u_e(p, s) \exp[-ip \cdot x] , \quad \psi_{\bar{e}} = \sqrt{\frac{1}{2k_0}} v_e(k, t) \exp[+ik \cdot x]$$

$$\psi_\mu = \sqrt{\frac{1}{2p'_0}} u_\mu(p', s') \exp[-ip' \cdot x] , \quad \psi_{\bar{\mu}} = \sqrt{\frac{1}{2k'_0}} v_\mu(k', t') \exp[+ik' \cdot x]$$

u は粒子、 v は反粒子を表します。真ん中にあるのが Z ボソンの伝播関数で、これは前に求めたスピン 1 での伝播関数です。電磁相互作用での不変振幅は、頂点を $-ie\gamma_\alpha$ 、伝播関数を光子での

$$\frac{-i(g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / q^2)}{q^2}$$

これに変えればいいだけです



$$\mathcal{M}_{EM} = \bar{u}_\mu(p', s') (-ie\gamma^\alpha) v_\mu(k', t') \frac{-i(g_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta / q^2)}{q^2} \bar{v}_e(k, t) (-ie\gamma^\beta) u_e(p, s)$$

スピン 1 のに合わせてランダウゲージで書きましたが簡単のためにファインマンゲージに変えます。 Z ボソンに対しても ξ による任意性があることから $q_\alpha q_\beta / M_Z^2$ の部分は消せるので消してしまいます。

この二つの影響が干渉している場合をみるので計算する全体の不変振幅は

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_Z + \mathcal{M}_{EM}$$

これを二乗してスピン和をとります。その前に、考える系を質量重心系に置き換えます。質量重心系では、衝突粒子が等しい運動量をもって正面衝突するので

$$k_0 = p_0 , \quad \mathbf{k} = -\mathbf{p} , \quad k'_0 = p'_0 , \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{p}'$$

なので、マンデルスタム変数 s は

$$s = (p + k)^2 = 4p_0^2 = 4k_0^2 \tag{1}$$

さらに、最初に見たように、実験的にも干渉効果が現れるであろう高エネルギー領域（ 10GeV 以上）での結果を知りたいので電子とミュオンの質量は無視します。こういった状況で計算していきます。まずは、スピン和を求めます
ここでは入射粒子である、電子、陽電子では平均、対生成されるミュオン、反ミュオンは和を取るようにします。

$$\begin{aligned}
\sum_{s,t,s',t'} |\mathcal{M}|^2 &= \sum_{s,t,s',t'} (|\mathcal{M}_Z|^2 + |\mathcal{M}_{EM}|^2 + \mathcal{M}_Z \mathcal{M}_{EM}^\dagger + \mathcal{M}_{EM} \mathcal{M}_Z^\dagger) \\
\sum_{s,t,s',t'} |\mathcal{M}_Z|^2 &= \sum_{s,t,s',t'} \frac{ig^2 g_{\alpha\beta}}{16 \cos^2 \theta (s - M_Z^2)} [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t')] [\bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s)] \\
&\quad \times \frac{-ig^2 g_{\lambda\rho}}{16 \cos^2 \theta (s - M_Z^2)} ([\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t')] [\bar{v}_e(k, t) \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s)])^\dagger \\
&= \sum_{s,t,s',t'} \frac{g^4 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{256 \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} \\
&\quad \times [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t')] [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t')]^\dagger \\
&\quad \times [\bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s)] [\bar{v}_e(k, t) \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s)]^\dagger \\
&= \sum_{s,t,s',t'} \frac{g^4 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{256 \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} \\
&\quad \times [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t')] [\bar{u}_\mu(k', t') \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5) u_\mu(p', s')] \\
&\quad \times [\bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s)] [\bar{u}_e(p, s) \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5) v_e(k, t)] \\
&= \frac{g^4 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{256 \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} \\
&\quad \times \text{Tr}[(\not{p}' + m_\mu) \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) (\not{k}' - m_\mu) \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5)] \\
&\quad \times \text{Tr}[(\not{k} - m_e) \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) (\not{p} + m_e) \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5)] \\
&\simeq \frac{g^4 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{256 \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} \\
&\quad \times \text{Tr}[\not{p}' \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) \not{k}' \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5)] \times \text{Tr}[\not{k} \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) \not{p} \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5)] \\
|\mathcal{M}_{EM}|^2 &= \sum_{s,t,s',t'} \frac{ie^2 g_{\alpha\beta}}{s} [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha v_\mu(k', t') \bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta u_e(p, s)] \\
&\quad \times \frac{-ie^2 g_{\lambda\rho}}{s} [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\lambda v_\mu(k', t') \bar{v}_e(k, t) \gamma^\rho u_e(p, s)]^\dagger \\
&= \sum_{s,t,s',t'} \frac{e^4 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{s^2} [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha v_\mu(k', t') \bar{u}_\mu(k', t') \gamma^\lambda u_\mu(p', s')] \\
&\quad \times [\bar{u}_e(p, s) \gamma^\rho v_e(k, t) \bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta u_e(p, s)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^4 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{s^2} Tr[(\not{p}' + m_\mu) \gamma^\alpha (\not{k}' - m_\mu) \gamma^\lambda] \times Tr[(\not{p}' + m_e) \gamma^\rho (\not{p}' - m_e) \gamma^\beta] \\
&\simeq \frac{e^4 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{s^2} Tr[\not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda] \times Tr[\not{p}' \gamma^\rho \not{p}' \gamma^\beta]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{s,t,s',t'} \mathcal{M}_Z \mathcal{M}_{EM}^\dagger \\
&= \sum_{s,t,s',t'} \frac{e^2 g^2 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{16s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t') \bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s)] \\
&\quad \times [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\lambda v_\mu(k', t') \bar{v}_e(k, t) \gamma^\rho u_e(p, s)]^\dagger \\
&= \sum_{s,t,s',t'} \frac{e^2 g^2 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{16s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t') \bar{v}_\mu(k', t') \gamma^\lambda u_\mu(p', s')] \\
&\quad \times [\bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s) \bar{u}_e(p, s) \gamma^\rho v_e(k, t)] \\
&= \frac{e^2 g^2 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{16s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} Tr[(\not{p}' + m_\mu) \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) (\not{k}' - m_\mu) \gamma^\lambda] \\
&\quad \times Tr[(\not{k} - m_e) \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) (\not{p}' + m_e) \gamma^\rho] \\
&\simeq \frac{e^2 g^2 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{16s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} Tr[\not{p}' \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) \not{k}' \gamma^\lambda] \times Tr[\not{k} \gamma^\beta (g'_V - \gamma^5) \not{p} \gamma^\rho]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{s,t,s',t'} \mathcal{M}_{EM} \mathcal{M}_Z^\dagger \\
&= \sum_{s,t,s',t'} \frac{e^2 g^2 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{16s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha v_\mu(k', t') \bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta u_e(p, s)] \\
&\quad \times [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5) v_\mu(k', t') \bar{v}_e(k, t) \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5) u_e(p, s)]^\dagger \\
&= \sum_{s,t,s',t'} \frac{e^2 g^2 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{16s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} [\bar{u}_\mu(p', s') \gamma^\alpha v_\mu(k', t') \bar{v}_\mu(k', t') \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5) u_\mu(p', s')] \\
&\quad \times [\bar{v}_e(k, t) \gamma^\beta u_e(p, s) \bar{u}_e(p, s) \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5) v_e(k, t)] \\
&= \frac{e^2 g^2 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{16s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} Tr[(\not{p}' + m_\mu) \gamma^\alpha (\not{k}' - m_\mu) \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5)] \\
&\quad \times Tr[(\not{k} - m_e) \gamma^\beta (\not{p}' + m_e) \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5)] \\
&\simeq \frac{e^2 g^2 g_{\alpha\beta} g_{\lambda\rho}}{16s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} Tr[\not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5)] \times Tr[\not{k} \gamma^\beta \not{p} \gamma^\rho (g'_V - \gamma^5)]
\end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned}
\sum_{s,t,s',t'} |\mathcal{M}|^2 &\simeq \frac{g^4}{256 \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} Tr[\not{p}' \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) \not{k}' \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5)] \times Tr[\not{k} \gamma_\alpha (g'_V - \gamma^5) \not{p} \gamma_\lambda (g'_V - \gamma^5)] \\
&+ \frac{e^4}{s^2} Tr[\not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda] \times Tr[\not{k} \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\lambda] \\
&+ \frac{e^2 g^2}{8s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} Tr[\not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5)] \times Tr[\not{k} \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\lambda (g'_V - \gamma^5)]
\end{aligned}$$

トレース計算は g'_V があるせいでまたやり直さなければいけません。

- 第一項

$$\begin{aligned}
Tr[\not{p}' \gamma^\alpha (g'_V - \gamma^5) \not{k}' \gamma^\lambda (g'_V - \gamma^5)] &= Tr[g_V'^2 \not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda - g'_V \not{p}' \gamma^\alpha \gamma^5 \not{k}' \gamma^\lambda - g'_V \not{p}' \gamma^\alpha \gamma^5 \not{k}' \gamma^\lambda + \not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda] \\
&= Tr[g_V'^2 \not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda - 2g'_V \not{p}' \gamma^\alpha \gamma^5 \not{k}' \gamma^\lambda + \not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda] \\
&= g_V'^2 Tr[\not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda] + Tr[\not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^\lambda] + 2g'_V Tr[\not{p}' \gamma^\alpha \not{k}' \gamma^5 \gamma^\lambda] \\
&= 4g_V'^2 (p'^\alpha k'^\lambda - g^{\alpha\lambda} p' \cdot k' + p'^\lambda k'^\alpha) + 4(p'^\alpha k'^\lambda - g^{\alpha\lambda} p' \cdot k' + p'^\lambda k'^\alpha) \\
&\quad + 8ig'_V \epsilon^{\alpha\rho\lambda\tau} k'_\rho p'_\tau
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
Tr[\not{k} \gamma_\alpha (g'_V - \gamma^5) \not{p} \gamma_\lambda (g'_V - \gamma^5)] \\
= 4g_V'^2 (k_\alpha p_\lambda - g_{\alpha\lambda} k \cdot p + k_\lambda p_\alpha) + 4(k_\alpha p_\lambda - g_{\alpha\lambda} k \cdot p + k_\lambda p_\alpha) + 8ig'_V \epsilon_{\alpha\rho\lambda\tau} p^\rho k^\tau
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& Tr[\not{p}'\gamma^\alpha(g'_V - \gamma^5)\not{k}'\gamma^\lambda(g'_V - \gamma^5)] \times Tr[\not{k}\gamma_\alpha(g'_V - \gamma^5)\not{p}\gamma_\lambda(g'_V - \gamma^5)] \\
&= (4g_V'^2(p'^\alpha k'^\lambda - g^{\alpha\lambda}p' \cdot k' + p'^\lambda k'^\alpha) + 4(p'^\alpha k'^\lambda - g^{\alpha\lambda}p' \cdot k' + p'^\lambda k'^\alpha) + 8ig'_V\epsilon^{\alpha\rho\lambda\tau}k'_\rho p'_\tau) \\
&\quad \times (4g_V'^2(k_\alpha p_\lambda - g_{\alpha\lambda}k \cdot p + k_\lambda p_\alpha) + 4(k_\alpha p_\lambda - g_{\alpha\lambda}k \cdot p + k_\lambda p_\alpha) + 8ig'_V\epsilon_{\alpha\mu\lambda\nu}p^\mu k^\nu) \\
&= 16(g_V'^2 + 1)^2(p'^\alpha k'^\lambda - g^{\alpha\lambda}p' \cdot k' + p'^\lambda k'^\alpha)(k_\alpha p_\lambda - g_{\alpha\lambda}k \cdot p + k_\lambda p_\alpha) - 64g_V'^2\epsilon_{\alpha\mu\lambda\nu}\epsilon^{\alpha\rho\lambda\tau}k'_\rho p'_\tau p^\mu k^\nu \\
&= 16(g_V'^2 + 1)^2\{((p' \cdot k)(k' \cdot p) - (p' \cdot k')(k \cdot p) + (p' \cdot p)(k' \cdot k)) \\
&\quad - ((p' \cdot k')(k \cdot p) - g^{\alpha\lambda}g_{\alpha\lambda}(p' \cdot k')(k \cdot p) + (p' \cdot k')(k \cdot p)) \\
&\quad + ((p' \cdot p)(k' \cdot k) - (p' \cdot k')(k \cdot p) + (p' \cdot k)(k' \cdot p))\} - 64g_V'^2\epsilon_{\alpha\mu\lambda\nu}\epsilon^{\alpha\rho\lambda\tau}k'_\rho p'_\tau p^\mu k^\nu \\
&= 32(g_V'^2 + 1)^2\{(p' \cdot k)(k' \cdot p) + (p' \cdot p)(k' \cdot k)\} - 64g_V'^2\epsilon_{\alpha\mu\lambda\nu}\epsilon^{\alpha\rho\lambda\tau}k'_\rho p'_\tau p^\mu k^\nu \\
&= 32(g_V'^2 + 1)^2\{(p' \cdot k)(k' \cdot p) + (p' \cdot p)(k' \cdot k)\} + 128g_V'^2(\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\tau - \delta_\mu^\tau\delta_\nu^\rho)p^\mu k^\nu k'_\rho p'_\tau \\
&= 32(g_V'^4 + 2g_V'^2 + 1)\{(p' \cdot k)(k' \cdot p) + (p' \cdot p)(k' \cdot k)\} + 128g_V'^2((p \cdot k')(k \cdot p') - (p \cdot p')(k \cdot k')) \\
&= (32g_V'^4 + 192g_V'^2 + 32)(p' \cdot k)(k' \cdot p) + (32g_V'^4 - 64g_V'^2 + 32)(p' \cdot p)(k' \cdot k)
\end{aligned}$$

• 第二項

$$\begin{aligned}
& Tr[\not{p}'\gamma^\alpha\not{k}'\gamma^\lambda] \times Tr[\not{k}\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\lambda] \\
&= 16(p'^\lambda k'^\alpha + p'^\alpha k'^\lambda - (p' \cdot k')g^{\alpha\lambda})(k_\lambda p_\alpha + k_\alpha p_\lambda - (p \cdot k)g_{\alpha\lambda}) \\
&= 16(p'^\lambda k'^\alpha k_\lambda p_\alpha + p'^\lambda k'^\alpha k_\lambda p_\alpha - g_{\alpha\lambda}p'^\lambda k'^\alpha(p \cdot k) + p'^\alpha k'^\lambda k_\lambda p_\alpha + p'^\alpha k'^\lambda k_\lambda p_\alpha - g_{\alpha\lambda}p'^\alpha k'^\lambda(p \cdot k) \\
&\quad - g^{\alpha\lambda}(p' \cdot k')k_\lambda p_\alpha - g^{\alpha\lambda}(p' \cdot k')k_\alpha p_\lambda + 4(p' \cdot k')(p \cdot k)) \\
&= 32((p' \cdot k)(k' \cdot p) + (p' \cdot p)(k' \cdot k))
\end{aligned}$$

• 第三項

$$\begin{aligned}
Tr[\not{p}'\gamma^\alpha\not{k}'\gamma^\lambda(g'_V - \gamma^5)] &= g'_V Tr[\not{p}'\gamma^\alpha\not{k}'\gamma^\lambda] - Tr[\not{p}'\gamma^\alpha\not{k}'\gamma^\lambda\gamma^5] \\
&= 4g'_V(p'^\lambda k'^\alpha + p'^\alpha k'^\lambda - (p' \cdot k')g^{\alpha\lambda}) + Tr[\not{p}'\gamma^\alpha\not{k}'\gamma^5\gamma^\lambda] \\
&= 4g'_V(p'^\lambda k'^\alpha + p'^\alpha k'^\lambda - (p' \cdot k')g^{\alpha\lambda}) + 4i\epsilon^{\alpha\mu\lambda\nu}p'_\mu k'_\nu
\end{aligned}$$

同様に

$$Tr[\not{k}\gamma_\alpha\not{p}\gamma_\lambda(g'_V - \gamma^5)] = 4g'_V(k_\lambda p_\alpha + k_\alpha p_\lambda - (p \cdot k)g_{\alpha\lambda}) + 4i\epsilon_{\alpha\rho\lambda\tau}k^\rho p^\tau$$

よって

$$\begin{aligned}
& Tr[\not{p}'\gamma^\alpha \not{k}'\gamma^\lambda (g_V' - \gamma^5)] \times Tr[\not{k}\gamma_\alpha \not{p}\gamma_\lambda (g_V' - \gamma^5)] \\
&= \{4g_V'(p'^\lambda k'^\alpha + p'^\alpha k'^\lambda - (p' \cdot k')g^{\alpha\lambda}) + 4i\epsilon^{\alpha\mu\lambda\nu}p'_\mu k'_\nu\} \{4g_V'(k_\lambda p_\alpha + k_\alpha p_\lambda - (p \cdot k)g_{\alpha\lambda}) + 4i\epsilon_{\alpha\rho\lambda\tau}k^\rho p^\tau\} \\
&= 16g_V'^2(p'^\lambda k'^\alpha + p'^\alpha k'^\lambda - (p' \cdot k')g^{\alpha\lambda})(k_\lambda p_\alpha + k_\alpha p_\lambda - (p \cdot k)g_{\alpha\lambda}) - 16\epsilon^{\alpha\mu\lambda\nu}\epsilon_{\alpha\rho\lambda\tau}p'_\mu k'_\nu k^\rho p^\tau \\
&= 16g_V'^2\{(p' \cdot k)(k' \cdot p) + (p' \cdot p)(k' \cdot k) - (p' \cdot k')(p \cdot k) + (p' \cdot p)(k' \cdot k) + (p' \cdot k)(k' \cdot p) - (p' \cdot k')(p \cdot k) \\
&\quad - (p' \cdot k')(k \cdot p) - (p' \cdot k')(k \cdot p) + 4(p' \cdot k')(p \cdot k)\} + 32(\delta_\rho^\mu \delta_\tau^\nu - \delta_\rho^\nu \delta_\tau^\mu)p'_\mu k'_\nu k^\rho p^\tau \\
&= 32g_V'^2((p' \cdot k)(k' \cdot p) + (p' \cdot p)(k' \cdot k)) + 32((p' \cdot k)(k' \cdot p) - (p' \cdot p)(k' \cdot k)) \\
&= 32(g_V'^2 + 1)(p' \cdot k)(k' \cdot p) + 32(g_V'^2 - 1)(p' \cdot p)(k' \cdot k)
\end{aligned}$$

これらを代入して

$$\begin{aligned}
\sum_{s,t,s',t'} |\mathcal{M}|^2 &\simeq \frac{g^4((32g_V'^4 + 192g_V'^2 + 32)(p' \cdot k)(k' \cdot p) + (32g_V'^4 - 64g_V'^2 + 32)(p' \cdot p)(k' \cdot k)big)}{256 \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} \\
&\quad + \frac{32e^4 big((p' \cdot k)(k' \cdot p) + (p' \cdot p)(k' \cdot k)big)}{s^2} \\
&\quad + \frac{32e^2 g^2 big((g_V'^2 + 1)(p' \cdot k)(k' \cdot p) + (g_V'^2 - 1)(p' \cdot p)(k' \cdot k)big)}{8s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} \\
&= \left[\frac{g^4(g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)}{8 \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{32e^4}{s^2} + \frac{4e^2 g^2 (g_V'^2 + 1)}{s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} \right] (p' \cdot k)(k' \cdot p) \\
&\quad + \left[\frac{g^4(g_V'^2 - 1)^2}{8 \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{32e^4}{s^2} + \frac{4e^2 g^2 (g_V'^2 - 1)}{s(s - M_Z^2) \cos^2 \theta} \right] (p' \cdot p)(k' \cdot k)
\end{aligned}$$

ここで、結合定数の関係

$$e = g \sin \theta$$

を使って

$$\begin{aligned}
\sum_{s,t,s',t'} |\mathcal{M}|^2 &\simeq \left[\frac{e^4(g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)}{8 \sin^4 \theta \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{32e^4}{s^2} + \frac{4e^4(g_V'^2 + 1)}{s(s - M_Z^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right] (p' \cdot k)(k' \cdot p) \\
&\quad + \left[\frac{e^4(g_V'^2 - 1)^2}{8 \sin^4 \theta \cos^4 \theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{32e^4}{s^2} + \frac{4e^4(g_V'^2 - 1)}{s(s - M_Z^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right] (p' \cdot p)(k' \cdot k) \\
&= \left[\frac{e^4(g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)}{8 \frac{1}{16} \sin^4 2\theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{32e^4}{s^2} + \frac{4e^4(g_V'^2 + 1)}{\frac{1}{4}s(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} \right] (p' \cdot k)(k' \cdot p) \\
&\quad + \left[\frac{e^4(g_V'^2 - 1)^2}{8 \frac{1}{16} \sin^4 2\theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{32e^4}{s^2} + \frac{4e^4(g_V'^2 - 1)}{\frac{1}{4}s(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} \right] (p' \cdot p)(k' \cdot k) \\
&= \left[\frac{2e^4(g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)}{\sin^4 2\theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{32e^4}{s^2} + \frac{16e^4(g_V'^2 + 1)}{s(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} \right] (p' \cdot k)(k' \cdot p) \\
&\quad + \left[\frac{2e^4(g_V'^2 - 1)^2}{\sin^4 2\theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{32e^4}{s^2} + \frac{16e^4(g_V'^2 - 1)}{s(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} \right] (p' \cdot p)(k' \cdot k) \\
&= \frac{32e^4}{s^2} \left[\frac{1}{16} \frac{s^2(g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)}{\sin^4 2\theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{s(g_V'^2 + 1)}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} + 1 \right] (p' \cdot k)(k' \cdot p) \\
&\quad + \frac{32e^4}{s^2} \left[\frac{1}{16} \frac{s^2(g_V'^2 - 1)^2}{\sin^4 2\theta (s - M_Z^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{s(g_V'^2 - 1)}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} + 1 \right] (p' \cdot p)(k' \cdot k)
\end{aligned}$$

ここでは、 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ を使っています。

これで不変振幅は計算できたでの微分断面積を求めます。微分断面積は

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_A 2E_B |J|} (2\pi)^4 \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

入射フラックスは

$$J = \frac{\sqrt{(p \cdot k)^2 - m_e^2 m_e^2}}{p_0 k_0}$$

これは質量重心系では

$$\begin{aligned}
J &\Rightarrow \frac{\sqrt{(p_0^2 + |\mathbf{p}|^2)^2 - m_e^4}}{p_0^2} = \frac{\sqrt{(|\mathbf{p}|^2 + m_e^2 + |\mathbf{p}|^2)^2 - m_e^4}}{p_0^2} \\
&= \frac{\sqrt{4|\mathbf{p}|^2(|\mathbf{p}|^2 + m_e^2)}}{p_0^2} \\
&= \frac{2|\mathbf{p}|}{p_0}
\end{aligned}$$

立体角を使った表現にするには QED で出てきたように

$$d^3 p = |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\Omega$$

を使えばよく、今の場合に合わせて微分断面積を書くと

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2p_0 2k_0} \frac{p_0}{2|\mathbf{p}|} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'_0} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \\
&= \frac{|\mathcal{M}|^2}{8k_0 |\mathbf{p}|} (2\pi)^4 \delta^4(p' + k' - p - k) \frac{|\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3 2p'_0} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} d\Omega \\
\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{(2\pi)^4}{8k_0 |\mathbf{p}|} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3 2p'_0} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p' + k' - p - k)
\end{aligned}$$

スピンは入射粒子は平均、生成粒子は和をとるので

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \sum_{s, s', t, t'} \frac{(2\pi)^4}{8k_0 |\mathbf{p}|} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3 2p'_0} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} |\mathcal{M}|^2 \delta^4(p' + k' - p - k)$$

これに対して質量重心系での関係を適用させていきます。質量重心系では $\mathbf{p} = -\mathbf{k}, \mathbf{p}' = -\mathbf{k}'$ であり、質量は無視することから

$$k^2 = p^2 = k'^2 = p'^2 = 0 \Rightarrow k_0 \simeq |\mathbf{k}|, p_0 \simeq |\mathbf{p}|, k'_0 \simeq |\mathbf{k}'|, p'_0 \simeq |\mathbf{p}'|$$

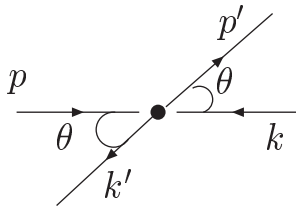
そしてエネルギーの関係は

$$p_0 \simeq k_0, p'_0 \simeq k'_0$$

となっており、これは (1) を見れば分かるように、 s を使って

$$p_0 \simeq k_0 \simeq p'_0 \simeq k'_0 \simeq \frac{1}{2}\sqrt{s}$$

散乱角の関係は



$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' &= |\mathbf{p}| |\mathbf{p}'| \cos \theta \simeq p_0 p'_0 \cos \theta = \frac{s}{4} \cos \theta \\
\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' &\simeq \frac{s}{4} \cos \theta \\
\mathbf{p}' \cdot \mathbf{k} &\simeq -\frac{s}{4} \cos \theta \\
\mathbf{k}' \cdot \mathbf{p} &\simeq -\frac{s}{4} \cos \theta
\end{aligned}$$

下の二つの符号が反転しているのはベクトルの向き関係上です。これによって

$$\begin{aligned}
p' \cdot p &= p'_0 p_0 - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} \simeq \frac{s}{4} - \frac{s}{4} \cos \theta = \frac{s}{4} (1 - \cos \theta) \\
k' \cdot k &\simeq \frac{s}{4} (1 - \cos \theta) \\
p' \cdot k &\simeq \frac{s}{4} (1 + \cos \theta) \\
k' \cdot p &\simeq \frac{s}{4} (1 + \cos \theta)
\end{aligned}$$

この散乱角の関係を不変振幅部分に適用することで

$$\begin{aligned}
\sum_{s,s',t,t'} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{32e^4}{s^2} \left[\frac{1}{16} \frac{s^2 (g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)}{(s - M_Z^2)^2 \sin^4 2\theta} + \frac{1}{2} \frac{s(g_V'^2 + 1)}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} + 1 \right] (p' \cdot k)(k' \cdot p) \\
&\quad + \frac{32e^4}{s^2} \left[\frac{1}{16} \frac{s^2 (g_V'^2 - 1)^2}{(s - M_Z^2)^2 \sin^4 2\theta} + \frac{1}{2} \frac{s(g_V'^2 - 1)}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} + 1 \right] (p' \cdot p)(k' \cdot k) \\
&= \frac{32e^4}{s^2} \left[\frac{1}{16} \frac{s^2 (g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)}{(s - M_Z^2)^2 \sin^4 2\theta} + \frac{1}{2} \frac{s(g_V'^2 + 1)}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} + 1 \right] \frac{s^2}{16} (1 + \cos \theta)^2 \\
&\quad + \frac{32e^4}{s^2} \left[\frac{1}{16} \frac{s^2 (g_V'^2 - 1)^2}{(s - M_Z^2)^2 \sin^4 2\theta} + \frac{1}{2} \frac{s(g_V'^2 - 1)}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta} + 1 \right] \frac{s^2}{16} (1 - \cos \theta)^2 \\
&= 2e^4 \left[\left\{ \frac{1}{16} (g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1) R^2 + \frac{1}{2} (g_V'^2 + 1) R + 1 \right\} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{16} (g_V'^2 - 1)^2 R^2 + \frac{1}{2} (g_V'^2 - 1) R + 1 \right\} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \right] \\
&= 2e^4 \left[\left\{ \frac{1}{16} (g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1) R^2 + \frac{1}{2} (g_V'^2 + 1) R + 1 \right\} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{16} (g_V'^2 - 1)^2 R^2 + \frac{1}{2} (g_V'^2 - 1) R + 1 \right\} (1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) \right]
\end{aligned}$$

途中で

$$R = \frac{s}{(s - M_Z^2) \sin^2 2\theta}$$

という置き換えをしています。各項を個別に取り出して計算すると

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{16} (g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1) R^2 + \frac{1}{2} (g_V'^2 + 1) R + 1 \right] + \left[\frac{1}{16} (g_V'^2 - 1)^2 R^2 + \frac{1}{2} (g_V'^2 - 1) R + 1 \right] (1 + \cos^2 \theta) \\
&= \left[\frac{1}{16} (g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1 + g_V'^4 - 2g_V' + 1) R^2 + \frac{1}{2} (g_V'^2 + 1 + g_V'^2 - 1) R + 2 \right] (1 + \cos^2 \theta) \\
&= \left[\frac{1}{16} (2g_V'^4 + 4g_V'^2 + 2) R^2 + \frac{1}{2} 2g_V'^2 R + 2 \right] (1 + \cos^2 \theta) \\
&= \left[\frac{1}{8} (g_V'^4 + 2g_V'^2 + 1) R^2 + g_V'^2 R + 2 \right] (1 + \cos^2 \theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\left[\frac{1}{16}(g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)R^2 + \frac{1}{2}(g_V'^2 + 1)R + 1\right] \cos \theta - 2\left[\frac{1}{16}(g_V'^2 - 1)^2 R^2 + \frac{1}{2}(g_V'^2 - 1)R + 1\right] \cos \theta \\
&= 2 \cos \theta \left[\frac{1}{16}(g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)R^2 + \frac{1}{2}(g_V'^2 + 1)R + 1 - \frac{1}{16}(g_V'^2 - 1)^2 R^2 - \frac{1}{2}(g_V'^2 - 1)R - 1\right] \\
&= 2 \cos \theta \left[\frac{1}{16}(g_V'^4 + 6g_V'^2 + 1)R^2 + \frac{1}{2}(g_V'^2 + 1)R + 1 - \frac{1}{16}(g_V'^2 - 2g_V'^2 + 1)R^2 - \frac{1}{2}(g_V'^2 - 1)R - 1\right] \\
&= 2 \cos \theta \left[\frac{1}{2}g_V'^2 R^2 + R\right]
\end{aligned}$$

まとめて

$$\begin{aligned}
\sum_{s,s',t,t'} |\mathcal{M}|^2 &= 2e^4 \left[\left[\frac{1}{8}(g_V'^4 + 2g_V'^2 + 1)R^2 + g_V'^2 R + 2 \right] (1 + \cos^2 \theta) + 2 \cos \theta \left[\frac{1}{2}g_V'^2 R^2 + R \right] \right] \\
&= 4e^4 \left[\left[\frac{1}{16}(g_V'^4 + 2g_V'^2 + 1)R^2 + \frac{1}{2}g_V'^2 R + 1 \right] (1 + \cos^2 \theta) + \cos \theta \left[\frac{1}{2}g_V'^2 R^2 + R \right] \right]
\end{aligned}$$

積分部分にも関係を活用していくことで

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \sum_{s,s',t,t'} \frac{(2\pi)^4}{32k_0|\mathbf{p}|} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3 2p'_0} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} |\mathcal{M}|^2 \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{k}') \delta^0(p'_0 + k'_0 - p_0 - k_0) \\
&= \sum_{s,s',t,t'} \frac{(2\pi)^4}{32k_0|\mathbf{p}|} \int_0^\infty \frac{|\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3 2p'_0} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} |\mathcal{M}|^2 \delta^3(\mathbf{p}' + \mathbf{k}') \delta^0(p'_0 + k'_0 - \sqrt{s}) \\
&\simeq \sum_{s,s',t,t'} \frac{(2\pi)^4}{32k_0|\mathbf{p}|} \int_0^\infty \frac{p_0'^2 dp'_0}{(2\pi)^3 2p'_0} \frac{1}{(2\pi)^3 2p'_0} |\mathcal{M}|^2 \delta^0(2p'_0 - \sqrt{s}) \\
&= \sum_{s,s',t,t'} \frac{(2\pi)^4}{128k_0|\mathbf{p}|} \int_0^\infty \frac{p_0'^2 dp'_0}{(2\pi)^6 p_0'^2} |\mathcal{M}|^2 \delta^0(2p'_0 - \sqrt{s}) \\
&= \sum_{s,s',t,t'} \frac{(2\pi)^4}{128k_0|\mathbf{p}|} \int_0^\infty \frac{p_0'^2 dp'_0}{(2\pi)^6 p_0'^2} |\mathcal{M}|^2 \delta^0(2p'_0 - \sqrt{s}) \\
&= \sum_{s,s',t,t'} \frac{(2\pi)^4}{128k_0|\mathbf{p}|} \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^6} |\mathcal{M}|^2 \\
&= \sum_{s,s',t,t'} \frac{1}{256k_0|\mathbf{p}|} \frac{1}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}|^2 \\
&\simeq \sum_{s,s',t,t'} \frac{1}{64s} \frac{1}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}|^2
\end{aligned}$$

というわけで微分断面積は

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{64s} \frac{1}{(2\pi)^2} 4e^4 \left[\left\{ \frac{1}{16}(g_V'^4 + 2g_V'^2 + 1)R^2 + \frac{1}{2}g_V'^2 R + 1 \right\} (1 + \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{2}g_V'^2 R^2 + R \right) \cos \theta \right] \\
&= \frac{1}{16s} \frac{e^4}{4\pi^2} \left[\left\{ \frac{1}{16}(g_V'^2 + 1)^2 R^2 + \frac{1}{2}g_V'^2 R + 1 \right\} (1 + \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{2}g_V'^2 R^2 + R \right) \cos \theta \right] \\
&= \frac{\alpha^2}{4s} \left[\left\{ \frac{1}{16}(g_V'^2 + 1)^2 R^2 + \frac{1}{2}g_V'^2 R + 1 \right\} (1 + \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{2}g_V'^2 R^2 + R \right) \cos \theta \right] \tag{2}
\end{aligned}$$

($\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$)。もし、電磁相互作用しか考えていなかったとしたら微分断面積は

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{EM}}{d\Omega} &= \sum_{s,s',t,t'} \frac{1}{64s} \frac{1}{(2\pi)^2} |\mathcal{M}_{EM}|^2 \\
&= \frac{1}{64s} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{32e^4((1+2\cos\theta+\cos^2\theta)+(1-2\cos\theta+\cos^2\theta))}{16} \\
&= \frac{1}{64s} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{64e^4(1+\cos^2\theta)}{16} \\
&= \frac{\alpha^2}{4s} (1+\cos^2\theta)
\end{aligned}$$

見て分かるように、QED の効果だけだと $\theta = 0$ を中心に対称に分布することがわかります。しかし、今見ている高エネルギー領域での実験結果は対称にはなっていません (高次まで計算しても合わせられない)。それに対して弱い相互作用も加えた結果 (2) では対称な結果を出しません。比べやすいように (2) を $s \ll M_Z, R^2 = 0$ の近似を取れば

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &\simeq \frac{\alpha^2}{4s} \left[\left(\frac{1}{2} g_V'^2 R + 1 \right) (1 + \cos^2\theta) + R \cos\theta \right] \\
&\simeq \frac{\alpha^2}{4s} \left[\left(1 - \frac{g_V'^2 s}{2M_Z^2 \sin^2 2\theta} \right) (1 + \cos^2\theta) - \frac{s}{M_Z^2 \sin^2 2\theta} \cos\theta \right]
\end{aligned}$$

このように、 Z ボソンの質量による項によって対称な分布ではなくなっています。ワインバーグ・サラムモデルを使った結果は実験値とよく一致しています。