有効作用と有効ポテンシャル

有効作用が古典的な作用に量子論的な寄与が加わる形になることを示します。その後に有効ポテンシャルに触れます。
「$'$」は ϕ 微分です。

生成汎関数を近似的に計算します。相互作用項を $\mathcal{L}_{int}$ とした実スカラー場のラグランジアンを使うことにして、生成汎関数 Z は

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x) - \mathcal{L}_{int} + J(x)\phi(x))\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x(-\frac{1}{2}\phi(x)(\Box + m^2)\phi(x) - \mathcal{L}_{int} + J(x)\phi(x))\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \exp\Big[i\int d^4x(\mathcal{L} + J(x)\phi(x))\Big] \\
&= \int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi, J]]
\end{aligned}$$

規格化定数は無視しています。$\mathcal{L}_{int}$ は ϕ のみに依存するとします。相互作用項があると厳密に計算できないので、鞍点法で近似します。$S[\phi, J]$ の ϕ_0 周りでの展開

$$S[\phi, J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\frac{\delta^nS[\phi, J]}{\delta\phi(x_1)\cdots\delta\phi(x_n)}\Big|_{\phi=\phi_0}(\phi(x_1) - \phi_0(x_1))\cdots(\phi(x_n) - \phi_0(x_1))$$

での 2 次までを考えて

$$\begin{aligned}
S[\phi, J] \simeq S[\phi_0, J] &+ \int d^4x\frac{\delta S[\phi, J]}{\delta\phi(x)}\Big|_{\phi_0}(\phi(x) - \phi_0(x)) \\
&+ \frac{1}{2}\int d^4x_1d^4x_2\frac{\delta^2S[\phi, J]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}\Big|_{\phi_0}(\phi(x_1) - \phi_0(x_1))(\phi(x_2) - \phi_0(x_2))
\end{aligned}$$

とします。ϕ_0 は J を含むオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\delta S[\phi, J]}{\delta\phi(x)}\Big|_{\phi_0} = -(\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi})\Big|_{\phi_0} + J(x) = 0 \tag{1}$$

に従うとします (鞍点法)。今のラグランジアンでは

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = (\Box + m^2)\phi_0 + \frac{\partial\mathcal{L}_{int}(\phi_0)}{\partial\phi_0}$$

から

$$(\Box + m^2)\phi_0(x) + \mathcal{L}'_{int} = J(x)$$

となります。「$'$」は ϕ 微分です。
そうすると、第二項は

$$\frac{\delta S[\phi,J]}{\delta\phi(x)}\Big|_{\phi_0}=0$$

第三項は

$$\begin{aligned}
-\frac{\delta^2 S[\phi,J]}{\delta\phi(x_1)\delta\phi(x_2)}|_{\phi_0} &= \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}((\Box+m^2)\phi(x_2)+\mathcal{L}'_{int}-J)|_{\phi_0}\\
&= \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}((\Box_{x_2}+m^2)\frac{\delta\phi(x_2)}{\delta\phi(x_1)}+\delta^4(x_2-x_1)\frac{\partial}{\partial\phi(x_2)}\mathcal{L}'_{int})|_{\phi_0}\\
&= (\Box_{x_2}+m^2+\mathcal{L}''_{int}(\phi_0(x_2))\delta^4(x_2-x_1)
\end{aligned}$$

$\Box_{x_2}$ は x_2 の微分です。$\mathcal{L}_{int}$ は ϕ のみを含んでいるので、その $\phi(x_2)$ が $\phi(x_1)$ で汎関数微分されることを、デルタ関数と偏微分で書いています。
これらから、$\overline{\phi}=\phi-\phi_0$ として

$$\begin{aligned}
S[\phi,J]\simeq S[\phi_0,J]+\int d^4xJ(x)\overline{\phi}(x)\\
-\frac{1}{2}\int d^4x_1d^4x_2\overline{\phi}(x_1)(\Box_{x_2}+m^2+\mathcal{L}''_{int}(\phi_0))\delta^4(x_2-x_1))\overline{\phi}(x_2)
\end{aligned}$$

第三項は表面項を消すように変形すれば

$$\int d^4x_1d^4x_2\delta^4(x_2-x_1)\overline{\phi}(x_1)(\Box_{x_2}+m^2+\mathcal{L}''_{int})\overline{\phi}(x_2)=\int d^4x\overline{\phi}(x)(\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int})\overline{\phi}(x)$$

となるので

$$\begin{aligned}
S[\phi,J]&\simeq S[\phi_0,J]+\int d^4xJ(x)\overline{\phi}(x)-\frac{1}{2}\int d^4x\overline{\phi}(x)(\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}(\phi_c))\overline{\phi}(x)\\
&= S[\phi_0,J]-\frac{1}{2}\int d^4x\overline{\phi}(x)(\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}(\phi_0))\overline{\phi}(x)
\end{aligned}$$

これを使えば、生成汎関数は

$$\begin{aligned}
Z[J]&\simeq\ \exp[iS[\phi_0,J]]\int\mathcal{D}\phi\exp[-\frac{i}{2}\int d^4x\overline{\phi}(x)(\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}(\phi_0))\overline{\phi}(x)]\\
&=\ \exp[iS[\phi_0,J]]\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[-\frac{i}{2}\int d^4x\phi(\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}(\phi_0))\phi\Big] \qquad (2)
\end{aligned}$$

2 行目へは ϕ の変数変換です。

ちなみに、これは $S[\phi, J]$ を $S[\phi_0+\phi, J]$ とするだけでも同じになります。実際に

$$
\begin{aligned}
&S[\phi_0+\phi, J]\\
&= \int d^4x\big(\frac{1}{2}\partial_\mu(\phi_0+\phi)\partial^\mu(\phi_0+\phi)-\frac{1}{2}m^2(\phi_0+\phi)^2-\mathcal{L}_{int}(\phi_0+\phi)+J(\phi_0+\phi)\big)\\
&= -\int d^4x\big(\frac{1}{2}\phi_0(\Box+m^2)\phi_0+\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi\\
&\quad+\phi(\Box+m^2)\phi_0+\mathcal{L}_{int}(\phi_0+\phi)-J(\phi_0+\phi)\big)\\
&\simeq -\int d^4x\big(\frac{1}{2}\phi_0(\Box+m^2)\phi_0+\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi\\
&\quad+\phi(\Box+m^2)\phi_0-J(\phi_0+\phi)+\mathcal{L}_{int}(\phi_0)+\mathcal{L}'_{int}(\phi_0)\phi+\frac{1}{2}\mathcal{L}''_{int}(\phi_0)\phi^2\big)\\
&= -\int d^4x\big(\frac{1}{2}\phi_0(\Box+m^2)\phi_0+\mathcal{L}_{int}(\phi_0)-J\phi_0\\
&\quad+\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi+\phi(\Box+m^2)\phi_0-J\phi+\mathcal{L}'_{int}(\phi_0)\phi+\frac{1}{2}\mathcal{L}''_{int}(\phi_0)\phi^2\big)\\
&= -\int d^4x\big(\frac{1}{2}\phi_0(\Box+m^2)\phi_0+\mathcal{L}_{int}(\phi_0)-J\phi_0\\
&\quad+\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2)\phi+\phi(J-\mathcal{L}'_{int}(\phi_0))-J\phi+\mathcal{L}'_{int}(\phi_0)\phi+\frac{1}{2}\mathcal{L}''_{int}(\phi_0)\phi^2\big)\\
&= \int d^4x\big(-\frac{1}{2}\phi_0(\Box+m^2)\phi_0-\mathcal{L}_{int}(\phi_0)+J\phi_0-\frac{1}{2}\phi(\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}(\phi_0))\phi\big)\\
&= S[\phi_0, J]-\frac{1}{2}\int d^4x\phi(\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}(\phi_0))\phi
\end{aligned}
$$

となり、一致します（生成汎関数では $\phi_0+\phi$ の変数変換が行われている）。

$\mathcal{D}\phi$ 積分を実行します。これは、下の補足や量子力学の「経路積分～準古典近似～」で示しているように、演算子 A に対して

$$
\int\mathcal{D}\phi\exp[i\int d^4x\phi A\phi]=C(\det A)^{-\frac{1}{2}}
$$

C は定数です。ただし、演算子 A の固有値がどうなっているのかが問題です。簡単に言えば、A の行列式が $\det A>0$ のときに、定義が問題なく与えられるからです。この問題を回避するために、解析接続を使ってユークリッド化させて積分を行い、その後に元のミンコフスキー空間に戻します。これは、ユークリッド空間に移すことで、場の理論で出てくる演算子の固有値は正の値を取れるようになるからです。例えば、クライン・ゴルドン方程式の演算子部分の解析接続は

$$
D=\partial_\mu\partial^\mu=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\ \Rightarrow\ -D_E=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\quad(t=-it)
$$

これによって、固有値、固有ベクトルの式は

$$
-(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2)\phi(x_E)=\lambda\phi(x_E)
$$

x_E はユークリッド化したものです。そして、平面波 $\phi(x_E)=e^{ip_Ex_E}$ を解として入れてみれば

$$-(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\nabla^2)e^{ip_0x_0+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}=(p_0^2+\boldsymbol{p}^2)e^{ip_Ex_E}$$

となるので、固有値は正です。というわけで、ミンコフスキー空間で行わずにユークリッド空間で行った方が数学的に安定します。

(2) で x から x_E ($id^4x=d^4x_E$) へ解析接続して

$$\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[-i\int d^4x\phi(x)D\phi(x)\Big]=\int\mathcal{D}\phi\exp\Big[\int d^4x_E\phi(x_E)(-D_E)\phi(x_E)\Big]=C(\det(-D_E))^{-\frac{1}{2}}$$

D に戻して、Z は

$$Z[J]=\exp[iS[\phi_0,J]](\det[\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}])^{-\frac{1}{2}}$$

定数は寄与しないので無視しています。$W=-i\hbar\log Z$ から、これの対数をとって

$$W[J]=S[\phi_0,J]+\frac{i}{2}\log[\det[\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}]]$$

となります。

しかし、有効作用は ϕ_c の汎関数で、ϕ_0 と $\phi_c=\langle0|\phi|0\rangle_J$ は異なっています (ϕ_0 をただの古典場と見れば、量子論的な寄与がない)。なので、$\phi_c=\phi_0+\varphi$ として、(1) を使えば

$$S[\phi_c]=S[\phi_0+\varphi]=S[\phi_0]+\int d^4x\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi}|_{\phi_0}\varphi+\cdots=S[\phi_0]-\int d^4xJ\varphi+\cdots$$

第二項までを残して

$$\begin{aligned}S[\phi_0,J]&=S[\phi_0]+\int d^4xJ\phi_0\simeq S[\phi_c]+\int d^4xJ(\phi_c-\phi_0)+\int d^4xJ\phi_0\\&=S[\phi_c]+\int d^4xJ\phi_c\end{aligned}$$

これを入れて

$$W[J]=S[\phi_0,J]+\frac{i}{2}\log\det[\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}]=S[\phi_c]+\int d^4xJ\phi_c+\frac{i}{2}\log\det[\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}]$$

となります。

よって、有効作用はルジャンドル変換によって ($\log\det=\mathrm{tr}\log$)

$$\Gamma[\phi_c]=W[J]-\int d^4xJ(x)\phi_c(x)=S[\phi_c]+\frac{i}{2}\mathrm{tr}\log[\Box+m^2+\mathcal{L}''_{int}]$$

これが $\Gamma[\phi_c]$ が有効作用と呼ばれる理由を表わしています。作用はエネルギー $\times$ 時間の次元なので、第二項には $\hbar$ がいます。そうすると、第一項は $\hbar$ を含んでいない古典的な作用で、$\hbar$ を含む第二項がそれに量子論的な寄与を

与えています。このため、$\Gamma[\phi_c]$ は有効作用と呼ばれます (古典的な作用に量子論的な寄与を加えた作用)。また、$\hbar$ で展開することをループ展開と呼びます。

ちなみに、経路積分の規格化を入れるなら ($Z = N^{-1}\exp[\ ]$)

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_c] + \frac{i}{2}\hbar \mathrm{tr}\log[N^{-1}(\Box + m^2 + \mathcal{L}''_{int})]$$

となります。tr log 部分の計算は「1 ループでの有効ポテンシャル」で行います。

有効作用から有効ポテンシャルを作ります。$\phi_c(x)$ と $J(x)$ が x に依存しない定数 ϕ_c, J とすれば、有効作用は並進不変性を持ちます。そうすると、時空の体積積分 (時空の全体積 Ω) を分離することができ ($\phi_c = a$)

$$\Gamma[\phi_c] = \Gamma[a] = -V_{eff}(a)\int d^4x = -V_{eff}(a)\Omega$$

このときの $V_{eff}(a)$ を有効ポテンシャル (effective potential) と呼びます。$V_{eff}(a)$ と書いているように有効ポテンシャルは汎関数でなく関数です。例えば、ϕ_c と J が x に依存しなく、$W[J]$ も体積積分が外に出せるなら

$$\Gamma[a] = W[J] - Ja\int d^4x = -(-W[J]\Omega^{-1} + Ja)\int d^4x \ \Rightarrow\ V_{eff} = -W[J]\Omega^{-1} + Ja$$

となります。

今の結果を入れてみます。有効ポテンシャルにするためには (??) での $\phi_c(x)$ を定数にするので、$\phi_c(x) = a$ として

$$S[a] = \int d^4x(\frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2 - \frac{1}{2}m^2a^2 - \mathcal{L}_{int}(a)) = (-\frac{1}{2}m^2a^2 - \mathcal{L}_{int}(a))\int d^4x$$

質量項と $\mathcal{L}_{int}$ を合わせて

$$-V(a) = -\frac{1}{2}m^2a^2 - \mathcal{L}_{int}(a)$$

とすれば

$$V_{eff}(a) = V(a) - \frac{i}{2}\Omega^{-1}\mathrm{tr}\log[(\Box + V'')]$$

第一項 (古典的な寄与部分) を古典的なポテンシャル $V(a)$ とすれば、そこに寄与が加わるようになります。

有効ポテンシャルについて見ていきます。有効作用を $\phi_c = 0$ で展開して

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\frac{\delta^n\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1)\cdots\delta\phi_c(x_n)}|_{\phi_c=0}\phi_c(x_1)\cdots\phi_c(x_n)$$

$\delta^n\Gamma/(\delta\phi_c\cdots\delta\phi_c)$ は n 点頂点関数 $\Gamma(x_1,\cdots,x_n)$ です。n 点頂点関数 $\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$ のフーリエ変換を

$$\int d^4x_1\cdots d^4x_ne^{ip_1x_1}\cdots e^{ip_nx_n}\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = (2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)$$

逆変換は

$$\Gamma^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}e^{-ip_1x_1}\cdots e^{-ip_nx_n}\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)$$

これを入れて $\phi_c=a$ にすれば

$$\begin{aligned}\Gamma[a]=&\sum_{n=0}\frac{1}{n!}a^n\int d^4x_1\cdots d^4x_n\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}e^{-ip_1x_1}\cdots e^{-ip_nx_n}\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)\\=&\sum_{n=0}\frac{1}{n!}a^n\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4p_n}{(2\pi)^4}(2\pi)^{4n}\delta^4(p_1)\cdots\delta^4(p_n)\Gamma^{(n)}(p_1,\cdots,p_n)(2\pi)^4\delta^4(p_1+\cdots+p_n)\\=&\sum_{n=0}\frac{1}{n!}a^n\Gamma^{(n)}(p_1=0,\cdots,p_n=0)(2\pi)^4\delta^4(0)\end{aligned}$$

デルタ関数の定義による関係式

$$\delta(0)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x$$

を使って

$$\Gamma[a]=\sum_{n=0}\frac{1}{n!}a^n\Gamma^{(n)}(p_1=0,\cdots,p_n=0)\int d^4x$$

とできるので、これによって

$$\Omega^{-1}\Gamma[a]=-V_{eff}(a)=\sum_{n=0}\frac{1}{n!}a^n\Gamma^{(n)}(p_1=0,\cdots,p_n=0)$$

なので、有効ポテンシャルは

$$V_{eff}(a)=\sum_{n=0}\frac{1}{n!}a^n(-\Gamma^{(n)}(p_1=0,\cdots,p_n=0))$$

よって、有効ポテンシャルは運動量 $p_n=0$ での頂点関数の生成汎関数になっています。逆にみれば、頂点関数が求まり、それを $p_n=0$ となるようにフーリエ変換したものが分かれば、有効ポテンシャルは求められます。

他の有効ポテンシャルの性質も見ておきます。有効作用の関係

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}=-J(x)$$

に対して $J\to 0$ とすれば、$\phi_c(x)$ は源なしの真空期待値 $\langle\phi\rangle$(x に依存する) となり、$\langle\phi\rangle$ は方程式として

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}|_{\langle\phi\rangle}=0$$

に従います。そうすると、x に依存しない定数 ϕ_c による有効作用から有効ポテンシャルは

$$\frac{\partial V_{eff}(\phi_c)}{\partial \phi_c}|_{\langle\phi\rangle} = 0$$

この式は、並進不変で定数 $\phi_c = a$ という制限での真空期待値 $\langle\phi\rangle$(並進不変な真空期待値) に対する方程式を与えます。ここで、有効ポテンシャルを計算する分かりやすい理由が出てきます。

有効作用の汎関数微分で真空期待値 $\langle\phi\rangle$ の方程式は求まり、真空を見つけられたように思えます。しかし、場の理論における真空状態は、並進不変性を持つことを要求します (相対論的にはポアンカレ不変性)。つまり、有効ポテンシャルによって求まるのが知りたい真空状態です。このため、真空期待値が 0 でない値を持つ自発的対称性の破れの問題において、有効ポテンシャルは使われます。

最後に、有効ポテンシャルは真空のエネルギー密度に対応していることを示しておきます。「相関関数のファインマン則」の最後に真空のエネルギーについて触れましたが、そこで

$$\lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \langle 0|\mathrm{T}(\exp[-i\int_{-T}^{T} dtH_{int}(t)])|0\rangle = \exp[\sum_i V_i]$$

という関係を求めました。T は時間順序積、H_{int} はハミルトニアンの相互作用項、V_i は真空泡の図の集まりで

$$\sum_i V_i = -i2TV\mathcal{E}_0 \quad (\mathcal{E}_0 = \frac{E_0}{V}\ ,\ 2TV = (2\pi)^4\delta^4(0))$$

と与えられます。E_0 は真空のエネルギー、$\mathcal{E}_0$ が真空のエネルギー密度です。そして生成汎関数 Z は源 J があるときの $-\infty$ での真空から $+\infty$ の真空への振幅によって表現されるものなので (時間発展演算子を U として)

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle_J$$

この 2 つの比較から、J が定数になっているなら、$W[J]$ は

$$W[J] = -2TV\mathcal{E}_0(J)$$

なので、$W[J]$ は真空のエネルギーに関係しています ($\mathcal{E}_0(J)$ は J があるときの真空のエネルギー密度)。この $W[J]$ を使って有効作用を求めると

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_c] = W[J] - J\phi_c\int d^4x =& -2TV\mathcal{E}_0(J) - J\phi_c\int d^4x \\ =& -(2\pi)^4\delta^4(0)\mathcal{E}_0(J) - J\phi_c\int d^4x \\ =& -\mathcal{E}_0(J)\int d^4x - J\phi_c\int d^4x\end{aligned}$$

これから有効ポテンシャルは

$$V_{eff}(a) = \mathcal{E}_0(J) + J\phi_c$$

となるので、有効ポテンシャルは真空のエネルギー密度に対応しています。そして、これは

$$\frac{\partial V_{eff}(\phi_c)}{\partial \phi_c}|_{<\phi>} = 0$$

となります。

また、有効ポテンシャルとくり込みから、自発的対称性の破れがあってもくり込み可能な理論になっていることが示されます。これによって、ワインバーグ・サラムモデルはくり込み可能な理論になることが説明されます。

・補足

$\mathcal{D}\phi$ 積分の話を簡単にしておきます。考える積分として

$$(\prod_i \int dx_i) \exp[-x_a M_{ab} x_b]$$

このようなものを用意します。x は $N\times 1$ の実数行列とします。この x_a をユニタリー行列 U_{ab} を使って、$x_a = U_{ab}y_b$ と変換します (x, y は実数なので x の転置 x^t は、$x^t = x^\dagger = (Uy)^\dagger = y^t U^\dagger$)。このユニタリー行列は行列 M に対して

$$M'_{ab} = U^\dagger_{ac} M_{cd} U_{db}$$

このように作用させることで対角行列 M' を作るとします。そして、M がエルミートであるなら、M' は固有値 λ_k を対角成分に持つ行列になります。ユニタリー変換によって積分測度は変化しないので

$$\begin{aligned}
(\prod_i \int dx_i) \exp[-(U_{ac}y_c)^\dagger M_{ab} U_{bd} y_d] &= (\prod_i \int dy_i \exp[-y_c U^\dagger_{ca} M_{ab} U_{bd} y_d] \\
&= (\prod_i \int dy_i) \exp[-y_c M_{cd} y_d] \\
&= (\prod_i \int dy_i) \exp[-\sum_k \lambda_k y_k^2] \\
&= \prod_i \int dy_i \exp[-\lambda_i y_i^2] \\
&= \prod_i \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} \\
&= C(\det M)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

C は π による定数、下から三行目から、二行目へはガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-ax^2] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

の多数ある場合というので求めています。また、$\exp[-ax^2/2]$ の場合では

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-\frac{1}{2}ax^2] = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

虚数を含んだ場合では単に定数の部分 (通常のガウス積分での a) に入ってくるだけです。この結果の連続極限のようになっているので、本質的な違いは定数部分で発生します (収束性の問題とか)。