

1 ループでの有効ポテンシャル

有効ポテンシャルの 1 ループからの寄与を計算します。単純に積分を実行するだけなので、計算自体は単純です。「有効作用と有効ポテンシャル」で出てきた関係はそのまま使っちゃいます。

「有効作用と有効ポテンシャル」の最初に行ったことを繰り返しておきます。ラグランジアンのは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V_0(\phi)$$

これによる源ありでの作用 $S[\phi, J]$ は

$$S[\phi, J] = \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)$$

作用を ϕ に対して ϕ_0 まわりで展開すると、作用 $S[\phi, J]$ は

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \int d^4x \phi(x) \frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi=\phi_0} + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \phi(y) \frac{\delta^2 S[\phi, J]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \Big|_{\phi=\phi_0} \cdots$$

このとき、 ϕ_0 は汎関数で書いた時のオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} = 0 \quad (1)$$

に従っているとすれば

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) \phi(y) \frac{\delta^2 S[\phi, J]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \Big|_{\phi=\phi_0} \cdots$$

ここでの作用の 2 階汎関数微分は

$$\begin{aligned} -G^{-1}(x, y) &= \frac{\delta^2 S[\phi, J]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \Big|_{\phi=\phi_0} \\ &= \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \int d^4z \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V_0(\phi) + J\phi \right) \Big|_{\phi=\phi_0} \\ &= -(\square + V''(\phi)) \delta^4(x - y) \Big|_{\phi=\phi_0} \end{aligned}$$

「'」は ϕ 微分を表わします。これによって、 ϕ_0 周りで展開された生成汎関数は

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp[iS[\phi, J]] \simeq e^{iS[\phi_0, J]} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \phi(x) G^{-1}(x, y) \phi(y) \right]$$

そして、 ϕ 積分は (定数は無視して)

$$Z[J] = e^{iS[\phi_0, J]} \det[G^{-1}]^{-\frac{1}{2}}$$

というわけで、 $W[J] = -i \log Z[J]$ は

$$W[J] = S[\phi_0, J] + \frac{i}{2} \log[\det G^{-1}] = S[\phi_0, J] + \frac{i}{2} \text{tr} \log G^{-1} \quad (2)$$

これを有効作用に変えます。

有効作用は

$$\phi_c = \frac{\delta W}{\delta J}$$

で与えられるので、 ϕ_c を ϕ_0 から

$$\phi_c = \phi_0 + \phi'$$

とします。そうすると、源 J のない作用 $S[\phi_c]$ は

$$\begin{aligned} S[\phi_c] &= S[\phi_0 + \phi'] = S[\phi_0] + \int d^4x \phi'(x) \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi=\phi_0} + \cdots \\ &\simeq S[\phi_0] - \int d^4x J(x) \phi'(x) \end{aligned}$$

(1) での

$$\frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \Big|_{\phi=\phi_0} + J = 0$$

を使っています。よって、有効作用は (2) を入れて

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_c] &= W[J] - \int d^4x J(x) \phi_c(x) \\ &= S[\phi_0, J] + \frac{i}{2} \text{tr} \log G^{-1} - \int d^4x J(x) \phi_c(x) \\ &= S[\phi_0] + \int d^4x J(x) \phi_0(x) + \frac{i}{2} \text{tr} \log G^{-1} - \int d^4x J(x) (\phi_0(x) + \phi') \\ &= S[\phi_0] - \int d^4x J(x) \phi'(x) + \frac{i}{2} \text{tr} \log G^{-1} \\ &= S[\phi_c] + \frac{i}{2} \text{tr} \log G^{-1} \end{aligned}$$

ここから有効ポテンシャルへは $\phi_c(x) = \text{const}$ として、4次元の全空間体積を抜いて符号を反転させればいいです。

有効作用の第二項が今知りたい 1 ループ部分なので、この項を見ていきます。計算するには運動量の方が便利なので、運動量表示に持っていきます (下に補足参照)。まず、ここでのトレースは、 G が行列ではなく演算子なので、積分が出てきて

$$\text{tr} A = \int d^4x d^4y \langle x | A(x, y) | y \rangle \delta^4(x - y) = \int d^4x \langle x | A | x \rangle$$

という意味です。そして、対角化されている行列は

$$\langle a | \log A | b \rangle = \log[\langle a | A | b \rangle]$$

と書けます。位置表示での $G^{-1}(x)$ は対角化されていませんが、運動量表示では対角化されていることを利用します。 $\text{tr} \log G^{-1}$ は位置と運動量の状態 $|x\rangle, |p\rangle$ によって

$$\begin{aligned} \text{tr} \log G^{-1} &= \int d^4x \langle x | \log[G^{-1}] | x \rangle \\ &= \int d^4x \int d^4p_2 d^4p_1 \langle x | p_1 \rangle \langle p_1 | \log[G^{-1}] | p_2 \rangle \langle p_2 | x \rangle \end{aligned}$$

これらの $\langle p_1 | \cdots | p_2 \rangle$ 部分は運動量表示になっているので、対数の中にいれられて

$$\text{tr} \log G^{-1} = \int d^4x \int d^4p_1 d^4p_2 \langle x | p_1 \rangle \langle p_2 | x \rangle \log[\langle p_1 | G^{-1} | p_2 \rangle]$$

対数部分は伝播関数の並進不変性 (運動量保存) から

$$\log[\langle p_1 | G^{-1} | p_2 \rangle] = \log[\langle p_1 | G^{-1} | p_1 \rangle] \delta^4(p_1 - p_2)$$

そして、位置と運動量の状態は

$$\langle x | p_1 \rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} e^{-ip_1 x}$$

となっていることから

$$\begin{aligned} \text{tr} \log G^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \int d^4p_1 d^4p_2 e^{-i(p_1 - p_2)x} \delta(p_1 - p_2) \log[G^{-1}(p_1)] \\ &= \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log[G^{-1}(p)] \end{aligned}$$

$G^{-1}(x, y)$ のフーリエ変換は通常通りなので

$$G^{-1}(p) = -p^2 + V_0''(\phi)$$

となるだけです。

というわけで、 $\phi_c(x) = \text{const}$ として、時空の全体積を抜いて、符号を反転させれば有効ポテンシャルが求まります。1 ループでの有効ポテンシャルの運動量表示は (全空間体積を Ω として)

$$V_1(\phi_0)\Omega = -\frac{i}{2}\text{tr}\log G^{-1} = -\frac{i}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\log[-p^2 + m_{eff}^2]\Omega$$

記号が上でのものと重なってしまいますが、 $\phi_c(x) = const = \phi_0$ とします。また、 V_0'' を m_{eff}^2 と書くことにします。

積分を実行します。そのために、ユークリッド化 $p_0 \rightarrow ip_4$ して

$$\begin{aligned} V_1(\phi_0) &= -\frac{i}{2}\int \frac{id^4p_E}{(2\pi)^4}\log[p_E^2 + m_{eff}^2] \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d^4p_E}{(2\pi)^4}\log[p_E^2 + m_{eff}^2] \\ &= \frac{1}{2}\int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{d|p_E|}{(2\pi)^4}|p_E|^3\log[p_E^2 + m_{eff}^2] \\ &= \frac{1}{2}\int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{dl}{(2\pi)^4}l^3\log[l^2 + m_{eff}^2] \end{aligned}$$

$l = |p_E|$ とし、 $d\Omega_4$ は 4 次元の角度積分で

$$\int d\Omega_4 = \frac{2\pi^{4/2}}{\Gamma(4/2)} = 2\pi^2$$

l 積分は無限大で発散しています。なので、上限の切断 Λ を入れて

$$\begin{aligned} V_1(\phi_0) &= \frac{1}{2}\frac{2\pi^2}{(2\pi)^4}\int_0^\Lambda dl\ l^3\log[l^2 + m_{eff}^2] \\ &= \frac{1}{2}\frac{2\pi^2}{(2\pi)^4}\int_0^{\Lambda^2} dl^2\ \frac{1}{2}l^2\log[l^2 + m_{eff}^2] \\ &= \frac{1}{32\pi^2}\int_0^{\Lambda^2} dx\ x\log[x + m_{eff}^2] \\ &= \frac{1}{32\pi^2}\left(\left[\frac{1}{2}x^2\log[x + m_{eff}^2]\right]_0^{\Lambda^2} - \frac{1}{2}\int_0^{\Lambda^2} dx\ \frac{x^2}{x + m_{eff}^2}\right) \\ &= \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{\Lambda^4}{2}\log[\Lambda^2 + m_{eff}^2] - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + (-m_{eff}^2)x + (-m_{eff}^2)^2\log[x + m_{eff}^2]\right]_0^{\Lambda^2}\right) \\ &= \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{\Lambda^4}{2}\log[\Lambda^2 + m_{eff}^2] - \frac{1}{2}\left[\frac{\Lambda^4}{2} - m_{eff}^2\Lambda^2 + m_{eff}^4\log[\Lambda^2 + m_{eff}^2] - m_{eff}^4\log m_{eff}^2\right]\right) \end{aligned}$$

これを m_{eff}^2/Λ^2 で展開して、 $1/\Lambda^2$ の項を無視すれば

$$\begin{aligned}
V_1(\phi_0) &= \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{2} \log[1 + \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2}] + \frac{\Lambda^4}{2} \log \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda^4}{2} - m_{eff}^2 \Lambda^2 + m_{eff}^4 \log[1 + \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2}] + m_{eff}^4 \log \Lambda^2 - m_{eff}^4 \log m_{eff}^2 \right] \right) \\
&= \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{2} \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{\Lambda^4}{4} (\frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2})^2 + \frac{\Lambda^4}{2} \log \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left[\frac{\Lambda^4}{2} - m_{eff}^2 \Lambda^2 + m_{eff}^4 \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} + m_{eff}^4 \log \Lambda^2 - m_{eff}^4 \log m_{eff}^2 \right] \right) \\
&= \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{2} \log \Lambda^2 - \frac{\Lambda^4}{4} - \frac{m_{eff}^4}{4} + \frac{\Lambda^2}{2} m_{eff}^2 + \frac{\Lambda^2}{2} m_{eff}^2 - \frac{m_{eff}^4}{2} [\log \Lambda^2 - \log m_{eff}^2] \right) \\
&= \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} (2 \log \Lambda^2 - 1) + \frac{m_{eff}^4}{4} (2 \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - 1) + \Lambda^2 m_{eff}^2 \right)
\end{aligned}$$

この時に物理として致命的な発散を含んでいるのは m_{eff}^2 と Λ^2 が一緒の項です。有効ポテンシャルでは ϕ_0 と無関係な項は重要でないので無視します。

発散はくり込みを行うことでなくすことができます。つまり、相殺項を加えることになり、そのときのくり込み条件は、「くり込み $\sim \phi^4$ 理論 $\sim$ 」で出てきた、2点関数からの質量、4点関数からの結合定数に対する条件

$$\Gamma^{(2)}(0) = -m_r^2$$

$$i\Gamma^{(4)}(0) = \lambda_r$$

に対して、有効ポテンシャルと有効作用の関係

$$V(\phi_0) = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \phi_0^n (-\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n = 0))$$

を使うことで

$$-\Gamma^{(2)}(0) = \frac{d^2 V(\phi_0)}{d\phi_0^2} \Big|_{\phi_0=0} = m_r^2$$

$$i\Gamma^{(4)}(0) = -i \frac{d^4 V(\phi_0)}{d\phi_0^4} \Big|_{\phi_0=0} = \lambda_r$$

r はくり込まれた量を表わしています。ここで有効ポテンシャルの便利な性質が出てきています。それは、くり込み条件を介して、有効ポテンシャルの ϕ_0 による2階微分はくり込まれた質量に対応することです。また、4点関数では「くり込み $\sim \phi^4$ 理論 $\sim$ 」での計算に合わせて i をかけて結合定数になるように定義していますが、ここでは

$$\frac{d^4 V(\phi_0)}{d\phi_0^4} \Big|_{\phi_0=0} = \lambda_r$$

と定義します。

求めたように、1ループでの ϕ^4 理論での有効ポテンシャル V は

$$\begin{aligned}
V &= V_0(\phi_0) + \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} (2 \log \Lambda^2 - 1) + \frac{m_{eff}^4}{4} (2 \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - 1) + \Lambda^2 m_{eff}^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_0^4 + \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} (2 \log \Lambda^2 - 1) + \frac{m_{eff}^4}{2} (\log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}) + \Lambda^2 m_{eff}^2 \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

m_{eff}^2 は

$$m_{eff}^2 = V_0''[\phi] = m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2$$

この式がくり込まれた質量と結合定数で書かれていると思えば、相殺項 δm^2 と $\delta \lambda$ を

$$V = \frac{1}{2} (m^2 + \delta m^2) \phi_0^2 + \frac{\lambda + \delta \lambda}{4!} \phi_0^4 + \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} (2 \log \Lambda^2 - 1) + \frac{m_{eff}^4}{2} (\log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}) + \Lambda^2 m_{eff}^2 \right) \tag{4}$$

このように加えればいいです (波動関数のくり込みは出てこない)。記号が錯綜しますが、ここでの m, λ がくり込まれた量で、 $m^2 + \delta m^2, \lambda + \delta \lambda$ が裸の量となります。

これを ϕ_0 で 2 回微分を行います。面倒なのは m_{eff} がある項なので、その部分を実行していきます ($\phi_0 = 0$ で消える項は無視していきます)。 m_{eff}^2 と m_{eff}^4 では

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 m_{eff}^2}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} &= \left. \frac{d^2}{d\phi_0^2} (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2) \right|_{\phi_0=0} = \lambda \\
\left. \frac{d^2 m_{eff}^4}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} &= \left. \frac{d^2}{d\phi_0^2} (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \right|_{\phi_0=0} = 2\lambda \left. \frac{d}{d\phi_0} \phi_0 (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2) \right|_{\phi_0=0} = 2\lambda m^2
\end{aligned}$$

$m_{eff}^4 \log m_{eff}^2$ では

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2}{d\phi_0^2} m_{eff}^4 \log m_{eff}^2 \right|_{\phi_0=0} &= \left. \frac{d^2}{d\phi_0^2} (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \log [m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] \right|_{\phi_0=0} \\
&= \left. \frac{d}{d\phi_0} \left[2\lambda (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2) \phi_0 \log [m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] + (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \frac{\lambda \phi_0}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} \right] \right|_{\phi_0=0} \\
&= 2\lambda m^2 \log m^2 + m^4 \frac{\lambda}{m^2} \\
&= 2\lambda m^2 \log m^2 + \lambda m^2
\end{aligned}$$

他の項とあわせれば

$$\left. \frac{d^2 V}{d\phi_0^2} \right|_{\phi_0=0} = (m^2 + \delta m^2) + \frac{1}{32\pi^2} [\lambda m^2 \log m^2 + \frac{1}{2} \lambda m^2 - \lambda m^2 \log \Lambda^2 - \frac{1}{2} \lambda m^2 + \lambda \Lambda^2]$$

よって、相殺項は

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda m^2}{32\pi^2} (\log m^2 - \log \Lambda^2 + \frac{\Lambda^2}{m^2})$$

同様に結合定数に対しては、4 階微分をすればいいので

$$\left. \frac{d^4 m_{eff}^4}{d\phi_0^4} \right|_{\phi_0=0} = \left. \frac{d^4}{d\phi_0^4} (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \right|_{\phi_0=0} = 6\lambda^2$$

$m_{eff}^4 \log m_{eff}^2$ では

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4}{d\phi_0^4} m_{eff}^4 \log m_{eff}^2 \right|_{\phi_0=0} &= \left. \frac{d^4}{d\phi_0^4} (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \log[m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] \right|_{\phi_0=0} \\ &= \left. \frac{d^3}{d\phi_0^3} \left(2\lambda(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2) \phi_0 \log[m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] + (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \frac{\lambda \phi_0}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} \right) \right|_{\phi_0=0} \\ &= \left. \frac{d^2}{d\phi_0^2} \left(2\lambda m^2 \log[m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] + 3\lambda^2 \phi_0^2 \log[m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] + 2(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2) \frac{\lambda^2 \phi_0^2}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2) \frac{\lambda^2 \phi_0^2}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} + (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \frac{\lambda}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} - (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \frac{\lambda^2 \phi_0^2}{(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2} \right) \right|_{\phi_0=0} \\ &= \left. \frac{d^2}{d\phi_0^2} \left(2\lambda m^2 \log[m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] + 3\lambda^2 \phi_0^2 \log[m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] + 4(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2) \frac{\lambda^2 \phi_0^2}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \frac{\lambda}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} - (m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 \frac{\lambda^2 \phi_0^2}{(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2} \right) \right|_{\phi_0=0} \\ &= \left(2\lambda m^2 \frac{\lambda}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} + 6\lambda^2 \log[m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2] + 8m^2 \frac{\lambda^2}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda m^2 \frac{\lambda}{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2} - m^4 \frac{\lambda^2}{(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2} - m^4 \frac{2\lambda^2}{(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2} \right) \Big|_{\phi_0=0} \\ &= 2\lambda m^2 \frac{\lambda}{m^2} + 6\lambda^2 \log m^2 + 8m^2 \frac{\lambda^2}{m^2} + 2m^2 \frac{\lambda^2}{m^2} - m^4 \frac{\lambda^2}{m^4} - 2m^4 \frac{\lambda^2}{m^4} \\ &= 2\lambda^2 + 6\lambda^2 \log m^2 + 8\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^2 - 2\lambda^2 \\ &= 6\lambda^2 \log m^2 + 9\lambda^2 \end{aligned}$$

これによって

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^4 V}{d\phi_0^4} \right|_{\phi_0=0} &= \lambda + \delta\lambda + \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{m_{eff}^4}{4} (2 \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - 1) + \Lambda^2 m_{eff}^2 \right) \\ &= \lambda + \delta\lambda + \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{1}{2} (m_{eff}^4 \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{m_{eff}^4}{2}) + \Lambda^2 m_{eff}^2 \right) \\ &= \lambda + \delta\lambda + \frac{1}{64\pi^2} (m_{eff}^4 \log m_{eff}^2 - 6\lambda^2 \log \Lambda^2 - 3\lambda^2) \\ &= \lambda + \delta\lambda + \frac{1}{64\pi^2} (6\lambda^2 \log m^2 + 9\lambda^2 - 6\lambda^2 \log \Lambda^2 - 3\lambda^2) \\ &= \lambda + \delta\lambda + \frac{1}{64\pi^2} (6\lambda^2 \log m^2 + 6\lambda^2 - 6\lambda^2 \log \Lambda^2) \end{aligned}$$

よって

$$\delta\lambda = \frac{-1}{64\pi^2}(6\lambda^2 \log m^2 + 6\lambda^2 - 6\lambda^2 \log \Lambda^2) = \frac{-1}{64\pi^2}(6\lambda^2 \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + 6\lambda^2)$$

δm^2 と $\delta\lambda$ を (4) に入れると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(m^2 + \delta m^2)\phi_0^2 + \frac{\lambda + \delta\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{m_{eff}^4}{2}(\log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}) + \Lambda^2 m_{eff}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{m_{eff}^4}{2}(\log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}) + \Lambda^2 m_{eff}^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\lambda\phi_0^2}{32\pi^2}\left[m^2 \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + \Lambda^2\right] - \frac{1}{24}\frac{6\phi_0^4}{64\pi^2}\left(\lambda^2 \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + \lambda^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{m_{eff}^4}{2}(\log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}) + \Lambda^2 m_{eff}^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\lambda\phi_0^2}{32\pi^2}\left(m^2 \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + \Lambda^2\right) - \frac{1}{8}\frac{\phi_0^4}{32\pi^2}\left(\lambda^2 \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + \lambda^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{m_{eff}^4}{2}(\log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}) + \Lambda^2 m_{eff}^2 - \frac{\lambda\phi_0^2}{2}\Lambda^2 - \frac{\lambda^2\phi_0^4}{8}\right) \\ &\quad - \frac{1}{32\pi^2}\frac{1}{2}(\lambda m^2\phi_0^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi_0^4)\log \frac{m^2}{\Lambda^2} \\ &= \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{m_{eff}^4}{2}(\log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}) + \Lambda^2(m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2) - \frac{\lambda\phi_0^2}{2}\Lambda^2 - \frac{\lambda^2\phi_0^4}{8}\right) \\ &\quad - \frac{1}{32\pi^2}\frac{1}{2}(\lambda m^2\phi_0^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi_0^4)\log \frac{m^2}{\Lambda^2} \\ &= \frac{1}{2}m^2\phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_0^4 + \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{m_{eff}^4}{2}\log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2}(\lambda m^2\phi_0^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi_0^4)\log \frac{m^2}{\Lambda^2} - \frac{m_{eff}^4}{4} - \frac{\lambda^2\phi_0^4}{8} + \Lambda^2 m^2\right) \end{aligned}$$

m_{eff}^4 は

$$m_{eff}^4 = (m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2)^2 = m^4 + \frac{\lambda^2}{4}\phi_0^4 + \lambda m^2\phi_0^2$$

なので、 $\log$ の項は

$$\begin{aligned}
& \frac{m_{eff}^4}{2} \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} (\lambda m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi_0^4) \log \frac{m^2}{\Lambda^2} \\
&= \frac{1}{2} (m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2) \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} (\lambda m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi_0^4) \log \frac{m^2}{\Lambda^2} \\
&= \frac{1}{2} ((m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2) \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - (\lambda m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi_0^4) \log \frac{m^2}{\Lambda^2}) \\
&= \frac{1}{2} (m^4 \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} + (\frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2) \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} - (\lambda m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{4} \lambda^2 \phi_0^4) \log \frac{m^2}{\Lambda^2}) \\
&= \frac{1}{2} (m^4 \log \frac{m_{eff}^2}{\Lambda^2} + (\frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2) \log \frac{m_{eff}^2}{m^2}) \\
&= \frac{1}{2} (m^4 \log \frac{m_{eff}^2}{m^2} + m^4 \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + (\frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2) \log \frac{m_{eff}^2}{m^2}) \\
&= \frac{1}{2} (m^4 \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + (m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2) \log \frac{m_{eff}^2}{m^2}) \\
&= \frac{1}{2} (m^4 \log \frac{m^2}{\Lambda^2} + m_{eff}^4 \log \frac{m_{eff}^2}{m^2})
\end{aligned}$$

残っている部分は

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} (m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2) - \frac{\lambda^2 \phi_0^4}{8} = -\frac{1}{4} (m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \phi_0^4) \\
&= -\frac{1}{4} (m^4 + \frac{3\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \lambda m^2 \phi_0^2) \\
&= -\frac{1}{2} (\frac{1}{2} m^4 + \frac{3\lambda^2}{8} \phi_0^4 + \frac{1}{2} \lambda m^2 \phi_0^2) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{1}{3} m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \frac{1}{3} \lambda m^2 \phi_0^2) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{1}{9} m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \frac{1}{3} \lambda m^2 \phi_0^2 + \frac{2}{9} m^4) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{1}{9} m^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \frac{1}{3} \lambda m^2 \phi_0^2) - \frac{1}{6} m^4 \\
&= -\frac{1}{2} \frac{3}{2} (\frac{1}{3} m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)^2 - \frac{1}{6} m^4 \\
&= -\frac{1}{2} \frac{3}{2} (m_{eff}^2 - \frac{2}{3} m^2)^2 - \frac{1}{6} m^4
\end{aligned}$$

まとめると、 ϕ_0 と無関係な項を無視することで $((m_{eff}^2 - \frac{2}{3} m^2)^2$ の部分で無関係な項を含みますが)

$$V = \frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_0^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left(m_{eff}^4 \log \frac{m_{eff}^2}{m^2} - \frac{3}{2} (m_{eff}^2 - \frac{2}{3} m^2)^2 \right)$$

この形を見ると質量 0 の場合が作れないことが分かります。この回避は、くり込み条件での質量をくり込みのパラメータ μ^2 に変えることでできます。つまり、 $\log(m_{eff}^2/\mu^2)$ のように出てきます。

他にも次元正則化での方法を使って積分を計算できます。積分は

$$V_1(\phi_0) = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \log[p_E^2 + m_{eff}^2]$$

このようになっていたので、これを m_{eff}^2 で微分すれば

$$\frac{dV_1}{dm_{eff}^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_E^2 + m_{eff}^2}$$

これはそのまま次元正則化の方法が使えるので (d 次元で)

$$\frac{dV_1}{dm_{eff}^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{m_{eff}^2}\right)^{1-d/2} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(1)}$$

これを m_{eff}^2 で積分すれば

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{-1+d/2+1} (m_{eff}^2)^{-1+d/2+1} \Gamma(1-\frac{d}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (m_{eff}^2)^{d/2} \Gamma(1-\frac{d}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (m_{eff}^2)^{d/2} (-\frac{d}{2}) \Gamma(-\frac{d}{2}) \quad (\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x)) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (m_{eff}^2)^{d/2} \Gamma(-\frac{d}{2}) \end{aligned}$$

$\Gamma(-\frac{d}{2})$ は $d = 0, 2, 4, \dots$ で極を持ちます。知りたいのは 4 次元なので

$$V_1 = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} (m_{eff}^2)^{d/2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\frac{d}{2}(\frac{d}{2}-1)}$$

と変形させれば

$$\Gamma(2-\frac{d}{2}) = \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \dots \quad (\epsilon = 4-d)$$

が使えるので

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{1}{2} \frac{(m_{eff}^2)^{(4-\epsilon)/2}}{(4\pi)^{(4-\epsilon)/2}} \frac{1}{\frac{4-\epsilon}{2}(\frac{4-\epsilon}{2}-1)} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{m_{eff}^4}{(4\pi)^2} \exp[\frac{\epsilon}{2} \log 4\pi] \exp[-\frac{\epsilon}{2} \log m_{eff}^2] \frac{1}{2} (1+\frac{\epsilon}{4})(1+\frac{\epsilon}{2}) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{1}{(4\pi)^2} m_{eff}^4 (1+\frac{\epsilon}{2} \log 4\pi) (1-\frac{\epsilon}{2} \log m_{eff}^2) (1+\frac{\epsilon}{4})(1+\frac{\epsilon}{2}) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \\ &= -\frac{1}{64\pi^2} m_{eff}^4 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log m_{eff}^2 + \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

後はくり込みの方法 (MS スキームとか) を好きなように選択して発散項 $2/\epsilon$ に対する相殺項を入れればいいです。

・補足

$\log[G^{-1}(x)]$ を運動量表示にする方法を形式的に説明しておきます。トレースの意味から、演算子 A のトレースは

$$\text{tr} A = \int d^4x \langle x | A | x \rangle$$

上と同じように状態を挟んで

$$\text{tr} A = \sum_{\alpha, \alpha'} \int d^4p \int d^4p' \int d^4x \langle x | \alpha, p \rangle \langle \alpha, p | A | \alpha', p' \rangle \langle \alpha', p' | x \rangle$$

とします。 α, α' は何かしらの自由度、 p, p' は運動量とします。ここで

$$A | \alpha, p \rangle = \lambda_\alpha(p) | \alpha, p \rangle$$

として、 A の固有値を $\lambda_\alpha(p)$ とします。そうすると

$$\text{tr} A = \sum_{\alpha, \alpha'} \int d^4p \int d^4p' \int d^4x \lambda_{\alpha'}(p') \langle x | \alpha, p \rangle \langle \alpha, p | \alpha', p' \rangle \langle \alpha', p' | x \rangle$$

状態の規格化を

$$\langle x' | x \rangle = \delta^4(x - x') , \quad \langle \alpha, p | \alpha', p' \rangle = \delta^4(p - p') \delta_{\alpha\alpha'}$$

とすれば

$$\begin{aligned} \text{tr} A &= \sum_{\alpha, \alpha'} \int d^4p \int d^4p' \int d^4x \lambda_{\alpha'}(p') \langle x | \alpha, p \rangle \langle \alpha, p | \alpha', p' \rangle \langle \alpha', p' | x \rangle \\ &= \sum_{\alpha} \int d^4p \int d^4x \lambda_{\alpha}(p) \langle x | \alpha, p \rangle \langle \alpha, p | x \rangle \end{aligned}$$

波動関数 (固有関数) として

$$\phi_{\alpha, p}(x) = \langle x | \alpha, p \rangle$$

を定義することで、トレースは

$$\text{tr} A = \sum_{\alpha} \int d^4p \int d^4x \lambda_{\alpha}(p) \phi_{\alpha, p}(x) \phi_{\alpha, p}^*(x)$$

このように固有値と固有関数による形で書けます。

α の自由度がないとして、 $\phi_p(x)$ が上と同じように

$$\phi_p(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^4} e^{-ipx} \quad (5)$$

と書けるなら

$$\text{tr} A = \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \lambda(p)$$

対数がついていても、対角化されていれば $\log$ の中に状態が入れるので

$$\text{tr} \log A = \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log \lambda(p)$$

となるだけです。

V'' は計算に関係ないので $G^{-1}(x)$ での微分部分だけを取り出して

$$\text{tr} \log[\square]$$

を考えます。これは、ハミルトニアン演算子 $\hat{H} = i\partial_0$ と 3 次元運動量演算子 $\hat{\mathbf{P}} = -i\nabla$ によって

$$\text{tr} \log[\square] = \text{tr} \log[\partial_0^2 - \nabla^2] = \text{tr} \log[-\hat{H}^2 + \hat{\mathbf{P}}^2]$$

と書き換えられます。そうすると、 $\hat{H}$ と $\hat{\mathbf{P}}$ は (5) に対して

$$\hat{H}^2 \phi_p(x) = p_0^2 \phi_p(x), \quad \hat{\mathbf{P}}^2 \phi_p(x) = |\mathbf{p}|^2 \phi_p(x)$$

なので、(5) を使って

$$\begin{aligned} \text{tr} \log[-(i\partial_0)^2 + \hat{\mathbf{P}}^2] &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d^4x \log[-(i\partial_0)^2 + \hat{\mathbf{P}}^2] \phi_p^*(x) \phi_p(x) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int d^4x \log[-p_0^2 + |\mathbf{p}|^2] \end{aligned}$$

また、 $V''(\phi)$ は

$$\int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \log[-p^2 + V''(\phi)]$$

と加わるだけです。