

相関関数のファインマン則

n 点相関関数を求めるときのファインマン則を作ります。ここでは ϕ^4 理論を使っています。

後半は Gell-Mann-Low の定理とファインマン図の関係を見ています。

最後に補足として、 n 点グリーン関数のフーリエ変換についての注意を書いています。

Gell-Mann-Low の定理から、相互作用ありでのハイゼンベルグ描像による真空期待値を、相互作用描像を使うことで相互作用なしの真空による真空期待値で書けます。そして、ウィックの定理から、 $\langle 0 | T(\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n)) | 0 \rangle$ を伝播関数の組み合わせで書けます。それを図的に書きます。図はファインマン図と呼ばれ、数式との対応はファインマン則と呼ばれます。

例えば、4つの場による4点相関関数は、ウィックの定理によって

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T(\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)) | 0 \rangle \\ &= D(x_1 - x_2)D(x_3 - x_4) + D(x_1 - x_3)D(x_2 - x_4) + D(x_1 - x_4)D(x_2 - x_3) \end{aligned}$$

これは4つの点 x_1, x_2, x_3, x_4 が伝播関数によってそれぞれ繋がっていると見れます。それを図的に表したのが下の図1です。別々の4つの点のうちの始まりの2つの点で2つ粒子が生成され、残りの2つの点へ伝播していき粒子が消滅するという動きで、全確率振幅はこの3つの図の和になります。ようは相互作用をしない2粒子散乱の振幅です。

ここまではそれほど目新しいことではなく、知りたいのはハイゼンベルグ描像での場の演算子を相互作用ありの真空で挟んだ相関関数 $\langle \Omega | T(\phi_H(x_1) \cdots \phi_H(x_n)) | \Omega \rangle$ です。これは Gell-Mann-Low の定理から、相互作用なしの真空 $|0\rangle$ と相互作用描像によって

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left[\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left[\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right] | 0 \rangle} \quad (1)$$

H_{int} が十分小さいという条件でなら、近似的な計算が行えます。

相互作用ハミルトニアン H_{int} の形を与えます。 ϕ_I をスカラー場として

$$H_{int} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4$$

λ は相互作用の強さを決める結合定数です。このように、相互作用ハミルトニアンが ϕ^4 によるものを ϕ^4 理論と言います。なので、ここでは ϕ^4 理論でのファインマン則を作ります。これ以降添え字の I は省きます。

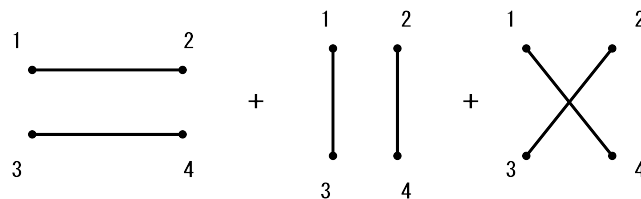


図 1

また、相互作用は $\partial_\mu \phi$ を含んでいないことから、相互作用ラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{int}$ と相互作用ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}_{int}$ の関係は $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$ なので、 ϕ^4 理論のクライン・ゴールドン方程式は

$$(\square + m^2)\phi = -\frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

となります。

相互作用ハミルトニアンが小さいとして (1) の分子の $\exp$ を展開すると

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left[\phi(x)\phi(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right] | 0 \rangle \\ = \langle 0 | T \left[\phi(x)\phi(y) + (-i)\phi(x)\phi(y) \int_{-T}^T dt H_{int}(t) + \cdots \right] | 0 \rangle \\ = \langle 0 | T \left[\phi(x)\phi(y) + (-i)\phi(x)\phi(y) \int_{-T}^T dt \int d^3z \frac{\lambda}{4!} \phi^4(z) + \cdots \right] | 0 \rangle \end{aligned}$$

第 1 項はただの自由な伝播関数（相互作用がないときの伝播関数）になります。この部分はどうでもいいので放っておいて、第 2 項をウィックの定理を使って変形します。

時間 T は無限大に取って、 $\phi^4(z)$ をばらして書いて

$$\langle 0 | T \left[\frac{-i\lambda}{4!} \phi(x)\phi(y) \int d^4z \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) \right] | 0 \rangle$$

$\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)$ の縮約可能な全ての組み合わせは

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)} = D(x-y)D(z-z)D(z-z)$$

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)} = D(x-z)D(y-z)D(z-z)$$

後は $\phi(z)$ との縮約の取り方次第なので、伝播関数の形としてはこの 2 つしかないです。ただし、同じ形のものが同じ組み合わせの数だけあり、 $D(x-y)D(z-z)D(z-z)$ は 3 個、 $D(x-z)D(y-z)D(z-z)$ は 12 個出てきます。というわけで、

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left[\frac{-i\lambda}{4!} \phi(x)\phi(y) \int d^4z \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) \right] | 0 \rangle \\ = 3 \times \frac{-i\lambda}{4!} D(x-y) \int d^4z D(z-z)D(z-z) + 12 \times \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z D(x-z)D(y-z)D(z-z) \end{aligned} \quad (2)$$

となります。位置 x, y, z の並びを見やすくするために第 2 項を、 y から z を経由して x にいくように並びを変え

$$12 \times \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z D(x-z)D(z-z)D(z-y) \quad (3)$$

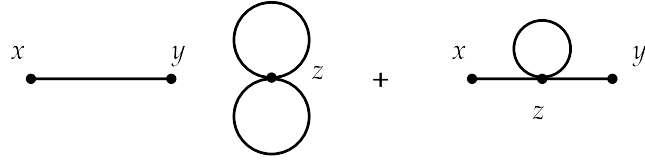
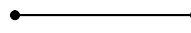
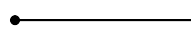


図 2

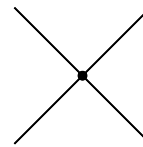
● 伝播関数

 $= D(x-y)$

● 外線

 $= 1$

● 頂点

 $= -i\lambda \int d^4z$

● 対称因子で割る

図 3

右から読んでいくように書いています。図にしたのが図 2 です。点 x 、点 y と全く絡んでこない無限大記号みたいな図がありますが、これの扱いは後に回します。

ここで出てきた係数 $3/4!$ と $12/4!$ は

$$\frac{3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{8}, \quad \frac{12}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

そして、第 2 項部分の図を見ると、この図は頂点 z でループ (輪状の図) が出ていますが、 $z \leftrightarrow z$ の交換に対して対称になっていると言えます (別の言い方をすると右回りと左回りの 2 通りがある)。つまり、係数はこれによる 2 で割ることに対応します。第 1 項では無限記号みたいな図のほうで同じようなものを探すと、 $2 \times 2 \times 2$ あるので 8 で割ることになります。こういった因子を対称因子 (symmetry factor) と呼びます。

これで ϕ^4 理論での相関関数のファインマン則を作ることができて、図 3 です。頂点 (vertex) は、4 つの線がぶつかる真ん中の黒丸のことです。頂点がこのように与えられるのは、例えば (2) の第 2 項の図において、伝播関数による線が 4 つあり、それらがぶつかっている点で $-i\lambda$ と z 積分がいるように見えるからです ($D(z-z)$ は z から出て行って z に戻ってくるので 2 本の線がある)。 ϕ^4 理論ではこのように 4 つの線の結合部分が頂点となります。伝播関数の両端についている黒丸は頂点から頂点を結ぶ線を伝播関数とするという意味なので、そこに $-i\lambda$ を当てません。

そして、外線 (external line) は今の例にはありませんが、頂点と頂点でない部分を結ぶ線を表します。外線に対応した言い方として、頂点と頂点で結ばれている伝播関数部分を内線 (inner line) とも言います。外線は S 行列の計算で主に出てきて、相関関数の計算ではほぼ出てきません。

これは位置表示ですが、運動量表示にするにはフーリエ変換すればいいです。フーリエ変換は

$$D(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D(p) e^{-ip(x-y)} \quad (4)$$

頂点部分は、例えば (2) の第 2 項を $D^{(1)}(x-y)$ として運動量表示にすると

$$\begin{aligned} D^{(1)}(x-y) &= -i\lambda \int d^4 z D(x-z) D(y-z) D(z-z) \\ &= -i\lambda \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p_3}{(2\pi)^{12}} D(p_1) D(p_2) D(p_3) e^{-ip_1(x-z)} e^{-ip_2(y-z)} e^{-ip_3(z-z)} \\ &= -i\lambda \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p_3}{(2\pi)^{12}} D(p_1) D(p_2) D(p_3) e^{-i(p_1+p_2)z} e^{-ip_1 x} e^{-ip_2 y} \\ &= -i\lambda \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p_3}{(2\pi)^8} D(p_1) D(p_2) D(p_3) \delta^4(p_1+p_2) e^{-ip_1 x} e^{-ip_2 y} \\ &= -i\lambda \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_3}{(2\pi)^8} D(p_1) D(-p_1) D(p_3) e^{-ip_1 x} e^{ip_1 y} \end{aligned}$$

これだと左辺がまだ運動量表示になっていないので

$$\begin{aligned} \int d^4 x d^4 y D^{(1)}(x-y) e^{ip(x-y)} &= -i\lambda \int d^4 x d^4 y \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_3}{(2\pi)^8} D(p_1) D(-p_1) D(p_3) e^{ip(x-y)} e^{-ip_1 x} e^{ip_1 y} \\ D^{(1)}(p) &= -i\lambda \int d^4 x d^4 y \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_3}{(2\pi)^8} D(p_1) D(-p_1) D(p_3) e^{i(p-p_1)x} e^{-i(p-p_1)y} \\ &= -i\lambda \int d^4 x \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_3}{(2\pi)^4} D(p_1) D(-p_1) D(p_3) \delta^4(p-p_1) e^{i(p-p_1)x} \\ &= -i\lambda \int d^4 x \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} D(p) D(-p) D(p_3) e^{i(p-p_1)x} \\ &= -i\lambda \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} D(p) D(-p) D(p_3) (2\pi)^4 \delta^4(0) \end{aligned} \quad (5)$$

この結果と上での図にした形を対応させると、伝播関数には $D(p)$ を当てればよく、頂点には $-i\lambda$ を当てればよいことが分かります (p_3 積分は伝播関数にかかっている所以で頂点とは無関係)。(2 π)⁴ $\delta^4(0)$ は運動量保存のデルタ関数で、細かいことは下の補足を見てください。各運動量を運動量保存を満たすように与えているなら、このデルタ関数は無視できます (ここで言っている運動量は、エネルギーと 3 次元運動量の両方を指す)。また、ここでは $D(p)D(-p)$ のように運動量が反転していますが、伝播関数の性質 $D(x-y) = D(y-x)$ を $D(y-z)$ に使えば、 $D(p)D(p)$ とできます。このように出来るために、(3) のように位置の並びをそれぞれの伝播関数の変数で繋げるように書くと便利です。

運動量表示でのファインマン則は図 4 です。残った運動量の積分は $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$ のことです。頂点で運動量が保存するのは、頂点には運動量を持った伝播関数が集中するために、そこで運動量が保存しないと、全体の運動量保存が壊れるからです。そして、その運動量保存とは無関係な運動量に対しては積分を取るようになります。これは (6) から分かります。伝播関数についている矢印は、頂点での運動量保存を満たしつつ、矢印の方向に運動量を運ぶことを表します。例えば、図 5 のように書きます (この図は ϕ^3 理論のものなので ϕ^4 理論ではこの形は出てきませんが、分かりやすいので使います)

- 伝播関数

$$\bullet \longrightarrow \bullet = D(p)$$

- 外線

$$\bullet \text{---} \bullet = e^{-ipx}$$

- 頂点

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} = -i\lambda$$

- 各頂点で保存則を満たすようにする
- 残った運動量は積分を行う
- 対称因子で割る

図 4

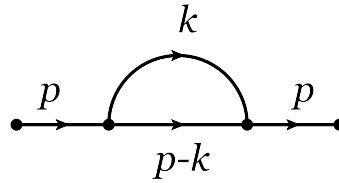


図 5

運動量 p で入ってきた伝播関数が k と $p-k$ に分かれ、最後に k と $p-k$ が合わさって p になります。これは各頂点で運動量が保存しており、運動量 p は最初と最後で保存されています。なので、この例では運動量として最終的に保存されるのは p であって、 k は途中で分かれた運動量でしかありません。つまり、この k が余った運動量となるので、 k 積分を行うことになります。言い換えれば、途中で p から分かれる運動量 k は任意であるために、 k の取れる全ての範囲で積分しなければいけないということです (確率振幅は全ての可能な状態を足し合わせる)。この k 積分をループ積分とも言い、このような積分がある図はループがあると表現されます。

ちなみに、ウィックの定理から当たり前ですが、 ϕ^4 理論では 3 点相関関数の場合は図を書く事ができず、全て消えます。

(2) に戻ります。(2) を見ると、点 x, y が線で繋がったものと繋がっていない図があります。このときの、点 x, y は external point と呼ばれ、線と繋がる点のことです。点 x, y が線で繋がっているものは connected な図、繋がっていないものを disconnected な図と呼びます。 n 点相関関数において、点 $x_1, \dots, x_n$ が全て線で繋がっていれば connected な図、どこかの点が線で繋がっていないなら disconnected な図となります。

(2) の第 1 項は connected な図と disconnected な図の積、第 2 項は connected な図のみという構成になっています。なので、(1) の分子は、一般的には可能な connected と disconnected の積を足したもので構成されていると考えられます。このことを抽象的な式にしてみます。

まず、external poin と繋がっていない disconnected な図の積を

$$\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i}$$



図 6

とします。\$V_i\$ が disconnected 部分の図で、例えば図 6 です。頂点の数が少ない順に \$V_1, V_2, V_3, \dots\$ とします。\$n_i\$ はその対称因子です。そして、\$(V_i)^{n_i}\$ は各 \$n_i\$ で異なる集まりとして、\$n_i\$ の和も取り

$$\sum_{n_i} \prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} = \left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} (V_1)^{n_1} \right) \left(\sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} (V_2)^{n_2} \right) \dots$$

とします。これと connected の積なので、適当な connected を 1 つ選んだとして

$$(\text{connected}) \times \sum_{n_i} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) = (\text{connected}) \times \left(\sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} (V_1)^{n_1} \right) \left(\sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} (V_2)^{n_2} \right) \dots$$

これの各 connected な図の和にすればいいので

$$\sum_{all} (\text{connected}) \times \sum_{n_i} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right)$$

\$all\$ は全ての可能な connected を足せという意味です。disconnected 部分は展開すれば分かるように

$$\prod_i \left(\sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} (V_i)^{n_i} \right) = \prod_i \exp V_i = \exp \left[\sum_i V_i \right]$$

よって、(1) の分子は図の意味で

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left[\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right] | 0 \rangle = \sum_{all} (\text{connected}) \times \exp \left[\sum_i V_i \right]$$

と書けます。分母も同様に考えます。分母は

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left[\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right] | 0 \rangle$$

(2) から予想できるように、積分部分だけが対応する図の部分は external point を持ちません。なので、分母は

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left[\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right] | 0 \rangle = \exp \left[\sum_i V_i \right]$$

となります。

というわけで、(1) は図としては

$$\langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)] | \Omega \rangle = \frac{\sum_{all} (\text{connected}) \times \exp[\sum_i V_i]}{\exp[\sum_i V_i]} = \sum_{all} (\text{connected})$$

よって、点 x_1, x_2 が線で繋がっている connected な図のみを考えればいいことが分かります。これはそのまま一般化されて

$$\langle \Omega | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | \Omega \rangle = \text{全ての } n \text{ 点 connected diagrams}$$

となります。

disconnected 部分についてさらに見ていきます。例えば無限大の形をした図での、エネルギーと運動量の保存は $p_1 = p_2$ です。なので、

$$\int d^4 z \exp[i(p_1 - p_2)z] = (2\pi)^4 \delta^4(0)$$

もしくは

$$\int d^4 z \exp[i(p_1 - p_2)z] = \int_{-T}^T dz^0 \int d^3 z = 2TV$$

V は 3 次元体積です。2 つを比べれば、 $(2\pi)^4 \delta^4(0) = 2TV$ です。このような因子を disconnected ならいつでも持つことになります。(1) を「Gell-Mann-Low の定理」での式を使うと

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \left[\phi(x)\phi(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right] | 0 \rangle \\ = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle (e^{-iE_0 2T} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2) \\ = \sum_{all} (\text{connected}) \times \exp[\sum_i V_i] \end{aligned}$$

E_0 は相互作用ありの真空の基底エネルギーです。そして、時間 T に依存している部分は、1 行目から $\exp[\sum_i V_i]$ とわかるので

$$\exp[\sum_i V_i] \propto \exp[-iE_0 2T]$$

という比例関係を持ちます。これより、[] 部分を取り出して V で割ると

$$\begin{aligned}
-i\frac{E_0}{V} &= \frac{1}{2TV} \sum_i V_i \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4 \delta(0)} \sum_i V_i \\
\frac{E_0}{V} &= i \frac{1}{(2\pi)^4 \delta(0)} \sum_i V_i
\end{aligned}$$

E_0 は相互作用ありの真空の基底エネルギーなので、これは真空 $|\Omega\rangle$ のエネルギー密度に対応します。つまり、相互作用がある真空のエネルギー密度は、disconnected の和になっており、空間の体積 V にも比例しているのがわかります。

今まで disconnected と言ってきましたが、こういった図は真空泡 (vacuum bubbles) と呼ばれています。真空泡は点 $x_1, \dots, x_n$ と連結していない図としてここでは導入されていますが、それとは無関係に分類されます。真空泡というのは名前の通り輪状になっている図の集まりのことを指していて、このタイプの図は n 点相関関数の計算以外のところで connected、disconnected とは無関係に現れます。これは経路積分だとよく分かります。

• 補足

相関関数に対するフーリエ変換の注意をしておきます。伝播関数は $D(x-y)$ のように位置の差にだけ依存するようにしてきました。この性質自体は問題なく、位置の差だけに依存する性質は 4 次元時空での平行移動に対して伝播関数は不変であることを表します (4 次元時空の並進不変性)。このような並進不変な場合は点 x と点 y で運動量も保存されています (並進不変性に対する運動量保存)。このことは、伝播関数のフーリエ変換 (4) において、位置の差に対して 1 つの運動量を対応させていることに出ています (点 x, y を繋ぐ伝播関数の運動量が p)。この運動量保存が位置表示の n 点相関関数のフーリエ変換でどのように出てくるのかを上での話を使って見てみます。

例として (関係ない部分を省いて)

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | T(\phi_H(x)\phi_H(y)) | \Omega \rangle &\simeq \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \\
&+ \frac{-3i\lambda}{4!} D(x-y) \int d^4z D(z-z) D(z-z) + \frac{-12i\lambda}{4!} \int d^4z D(x-z) D(y-z) D(z-z)
\end{aligned}$$

を使います。右辺は、第一項は相互作用のない伝播関数、第二項はその伝播関数で構成されているので、並進不変になっています。つまり、 x, y で運動量は保存されています。なので、左辺も並進不変で運動量が保存されています (伝播関数の定義そのものなので並進不変とも言えます)。

ここで左辺が並進不変かどうかは置いておいて、素直にフーリエ変換するとします。なので、 $G(x, y)$ と書き、 x, y を別々にフーリエ変換して

$$\int d^4x d^4y G(x, y) e^{ip_1x} e^{ip_2y} = G(p_1, p_2)$$

これが一番素直な運動量表示への変換の形です。しかし、この変換の中には並進不変性がなく、右辺に運動量保存の関係 $p_1 = p_2$ もないです ($G(x-y) \Rightarrow G(p)$ となっていない)。なので、これに運動量保存の意味を加えたものを、フーリエ変換として定義しなおす必要があります。そのために右辺に運動量保存の意味を持つデルタ関数を手で加え

$$\int d^4x d^4y G(x, y) e^{ip_1x} e^{ip_2y} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) G(p_1, p_2)$$

これを位置表示の伝播関数のフーリエ変換と定義します。2 個の変数のフーリエ変換なので、 x と y 両方を運動量と組ませる必要があり、さらに $x - y$ にのみに依存するという情報をどこかに加えなければいけないためにこんな面倒なことが起きます。(4) でのフーリエ変換ではこんなことが起きていないのは、 $x - y$ を 1 つの変数として一気にフーリエ変換しているからです ($G(p)$ を $G(w = x - y)$ に変換している)。

今は伝播関数で見ましたが、 n 点相関関数でも同じで、 n 点のフーリエ変換は

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_n e^{i(p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)} G(x_1, \cdots, x_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) G(p_1, \cdots, p_n)$$

と定義されます。この形でフーリエ変換を定義するのには理由があって、2 点である伝播関数ではそのまま $x - y$ となりますが、 n 点では運動量保存があっても一般的には $G(x - y - z - \cdots)$ のようにはなっていないからです。

$G(x, y)$ のフーリエ変換を

$$D^{(1)}(x, y) = -i\lambda \int d^4z D(x - z) D(y - z) D(z - z)$$

を使って具体的に見ます。デルタ関数を手で加えると言いましたが、右辺が並進不変になっているので、自然とデルタ関数が出てきます。フーリエ変換すると

$$\begin{aligned} \int d^4x d^4y D^{(1)}(x, y) e^{iq_1x + iq_2y} &= -i\lambda \int d^4x d^4y d^4z D(x - z) D(y - z) D(z - z) e^{iq_1x + iq_2y} \\ &= -i\lambda \int d^4x d^4y d^4z \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{(2\pi)^{12}} D(p_1) D(p_2) D(p_3) e^{-ip_1(x-z)} e^{-ip_2(y-z)} e^{iq_1x + iq_2y} \\ &= -i\lambda \int d^4x d^4y d^4z \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{(2\pi)^{12}} D(p_1) D(p_2) D(p_3) e^{-i(p_1 - q_1)x} e^{-i(p_2 - q_2)y} e^{-i(p_1 + p_2)z} \\ &= -i\lambda \int d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 D(p_1) D(p_2) D(p_3) \delta^4(p_1 - q_1) \delta^4(p_2 - q_2) \delta^4(p_1 + p_2) \\ &= -i\lambda \int d^4p_1 d^4p_3 D(p_1) D(q_2) D(p_3) \delta^4(p_1 - q_1) \delta^4(p_1 + q_2) \\ &= -i\lambda \int d^4p_3 D(q_1) D(q_2) D(p_3) \delta^4(q_1 + q_2) \\ &= -i\lambda (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2) \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} D(q_1) D(q_2) D(p_3) \end{aligned}$$

となって、運動量保存のデルタ関数が出てきます。(5) でのデルタ関数が $\delta(0)$ と出てきたのは、最初から $q_1 = -q_2$ としていたからです。

また、 $D^{(1)}(x, y)$ では並進不変と分かっているの、最初から

$$\int d^4x d^4y D^{(1)}(x, y) e^{iq_1x} e^{iq_2y} \Rightarrow \int d^4w D^{(1)}(w = x - y) e^{iqw}$$

とできます。実際に

$$\begin{aligned}
\int d^4w D^{(1)}(w) e^{iqw} &= -i\lambda \int d^4w d^4z D(x-z) D(y-z) D(z-z) e^{iqw} \\
&= -i\lambda \int d^4w d^4z \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{(2\pi)^{12}} D(p_1) D(p_2) D(p_3) e^{-ip_1(x-z)} e^{-ip_2(y-z)} e^{iqw} \\
&= -i\lambda \int d^4w d^4z \int \frac{d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3}{(2\pi)^{12}} D(p_1) D(p_2) D(p_3) e^{-ip_1x} e^{-ip_2y} e^{i(p_1+p_2)z} e^{iqw} \\
&= -i\lambda \int d^4w \int \frac{d^4p_1 d^4p_3}{(2\pi)^8} D(p_1) D(-p_1) D(p_3) e^{-ip_1x} e^{ip_1y} e^{iqw} \\
&= -i\lambda \int d^4w \int \frac{d^4p_1 d^4p_3}{(2\pi)^8} D(p_1) D(-p_1) D(p_3) e^{-ip_1(x-y)} e^{iqw} \\
&= -i\lambda \int d^4w \int \frac{d^4p_1 d^4p_3}{(2\pi)^8} D(p_1) D(-p_1) D(p_3) e^{-i(p_1-q)w} \\
&= -i\lambda \int \frac{d^4p_3}{(2\pi)^4} D(q) D(-q) D(p_3)
\end{aligned} \tag{6}$$

となって、運動量保存を表すデルタ関数部分を抜いたものと一致します。この方法では $x - y = w$ と置き替わり、フーリエ変換での積分 $d^4x d^4y$ が d^4w のみになるために左辺の次元が変わるので、右辺でのデルタ関数がない次元と一致します (運動量でのデルタ関数の次元は質量次元で -4 なので、 $d^4x d^4y$ が d^4w となることで次元が一致する)。というわけで、(2) の第 2 項を運動量表示にすると (6) になります。