

Gell-Mann-Low の定理

相互作用があるときとないときの真空の対応を考えます。それを使って、相互作用があるときの n 点相関関数と相互作用描像との関係を求めます。

n 点相関関数は真空中でハイゼンベルグ描像での n 個の場の演算子を挟んだものです (2 個なら伝播関数)。このとき問題になるのが、相互作用があるときの n 点相関関数をどうやって求めるかです。

まず、真空の定義を与えます。相互作用なしの真空 (基底状態、最低エネルギー状態) は今まで通り $|0\rangle$ とし、相互作用があるときの真空は $|\Omega\rangle$ とします。相互作用なしの真空への自由 (相互作用のない) ハミルトニアン H_0 の作用を $H_0|0\rangle = 0$ とします。これはハミルトニアン演算子がエネルギー固有値なので、真空のエネルギーは 0 であることを言っています。一方で、真空 $|\Omega\rangle$ は相互作用ありのハミルトニアン H の基底状態なので、 H_0 を作用させても最低エネルギーの固有値を出しません (また、 $H|\Omega\rangle = 0$ である必要性はない)。このように相互作用ありでの系の真空 $|\Omega\rangle$ と相互作用なしでの系の真空 $|0\rangle$ を定義します。

今必要なのは相互作用ありの真空中でハイゼンベルグ描像の場の演算子を挟んだものです。つまり、相互作用ありの真空と相互作用なしの真空との間の関係が分かればよく、さらに自由ハミルトニアンを使っている形で求められればいいです。

$|0\rangle$ に対して相互作用ハミルトニアン H_{int} も含まれている全ハミルトニアン演算子 H を使って

$$e^{-iHT}|0\rangle$$

というのを考えます。これに、 H の固有状態 $|n\rangle$ による完全性を挟んで

$$e^{-iHT}|0\rangle = \sum_n e^{-iE_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle$$

E_n は H の固有値です。 H_0 の基底状態 $|0\rangle$ の固有値は 0 ですが、 H の基底状態 $|\Omega\rangle$ の固有値は E_0 として、その項だけを分離して ($|n=0\rangle = |\Omega\rangle$)

$$e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{m \neq 0} e^{-iE_m T} |m\rangle \langle m|0\rangle$$

この時間無限大の極限 $T \rightarrow \infty$ を考えます。しかし、このままだと収束しません。というわけで、微小な虚数部分を加えて、減衰するようにします。なので、取る極限は $T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$ となります。これは複素平面で $\text{Re}T$ 軸を ϵ 回転させるような動きをします (この手の回転は他にも出てきます)。そして、この式の第一項と第二項を見てみると、減衰は E_0 と E_m に依存しているのがわかります。つまり、 E_m を含む第二項部分の方が基底のエネルギーを含む第一項に比べて大きな値を持っているために、早く減衰しきると考えられます。このことから、この極限で効いてくるのは第一項部分だけとみなせて

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iHT}|0\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle$$

になります (ϵ は計算の最後に 0 にする)。これを变形して

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 T} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iHT}|0\rangle$$

これに適当な時間 t_0 ($t_0 = 0$ でも問題ない) を加えて

$$\begin{aligned}
|\Omega\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH(T+t_0)} |0\rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{-iH(T+t_0)} e^{iH_0(T+t_0)} |0\rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} e^{iH_0(t_0-t_0)} e^{iH(-t_0-T)} e^{-iH_0(-T-t_0)} |0\rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} U^\dagger(-T, t_0) |0\rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1} U(t_0, -T) |0\rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} U(t_0, -T) |0\rangle (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega|0\rangle)^{-1}
\end{aligned} \tag{1}$$

二行目に行くときには $H_0|0\rangle = 0$ を使っています。 U は相互作用描像での時間発展演算子で

$$U(t_2, t_1) = e^{iH_0(t_2-t_0)} e^{-iH(t_2-t_1)} e^{-iH_0(t_1-t_0)}, \quad U(t_2, t_1) = U^\dagger(t_1, t_2)$$

同様にして $\langle \Omega|$ を求めると

$$\langle \Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0|U(T, t_0) (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|\Omega\rangle)^{-1} \tag{2}$$

となります。

相互作用描像での時間発展演算子 U は状態に対して

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I$$

と作用します。添え字 I は相互作用描像を表します。そして、真空 $|0\rangle$ はシュレーディンガー方程式

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} |0\rangle &= H_0 |0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

から時間独立です。なので、ハイゼンベルグ描像、シュレーディンガー描像で等しく ($|0\rangle = |0\rangle_H = |0\rangle_S$)、相互作用のないハミルトニアン H_0 の基底状態 $H_0|0\rangle = 0$ から、 $|0\rangle = |0\rangle_I$ ($H_0|0\rangle_I = 0$) となっています。

(1) での $U(t_0, -T)|0\rangle$ は、 U は時間発展演算子なので、 $-T$ での真空から t_0 の状態へ行くことを表します ($(\)^{-1}$ 部分は位相因子と思えばいいです)。なので、 $T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$ の極限を取ることで、時間 $-\infty$ での相互作用なしの真空から、 t_0 で違う状態に行くと言えます。違う状態というのは当然左辺の $|\Omega\rangle$ なので、相互作用が存在している状態です ($|0\rangle$ は相互作用のない真空)。そして、 t_0 は相互作用が出てくる時間を指定しています。同様に (2) では時間 $+\infty$ で真空になることを表しています。

(1) と (2) を使うことで $|\Omega\rangle$ の内積は (真空の定義から $\langle \Omega|\Omega\rangle = 1$)

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \Omega \rangle &= 1 = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 2T} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2)^{-1} \langle 0 | U(T, t_0) U(t_0, -T) | 0 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 2T} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2)^{-1} \langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

となります。

相互作用ありの真空 $|\Omega\rangle$ で 2 個の場の演算子 (ハイゼンベルグ描像) を挟んで、相互作用ありでの 2 点相関関数を作ります。ハイゼンベルグ描像と相互作用描像での関係は

$$\phi(x) = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(x) U(t, t_0)$$

なので、二点相関関数は $x^0 > y^0$ として

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | U(T, t_0) (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle)^{-1} \\
&\quad \times \phi(x) \phi(y) (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} U(t_0, -T) | 0 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle)^{-1} (e^{-iE_0(T+t_0)} \langle \Omega | 0 \rangle)^{-1} \\
&\quad \times \langle 0 | U(T, t_0) U^\dagger(x^0, t_0) \phi_I(x) U(x^0, t_0) U^\dagger(y^0, t_0) \phi_I(y) U(y^0, t_0) U(t_0, -T) | 0 \rangle \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} (e^{-iE_0 2T} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2)^{-1} \langle 0 | U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) | 0 \rangle
\end{aligned}$$

そして、 $\langle \Omega | \Omega \rangle$ で割ることで

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | U(T, x^0) \phi_I(x) U(x^0, y^0) \phi_I(y) U(y^0, -T) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(T, -T) | 0 \rangle}$$

時間の並びを $x^0 > y^0$ にしましたが、 $y^0 > x^0$ としても形自体は同じになるので、これは時間順序積 T を使って U をひとまとめにすることで

$$\langle \Omega | T(\phi(x) \phi(y)) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left(\phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right) | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left(\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right) | 0 \rangle}$$

この関係のことを Gell-Mann-Low の定理 (もしくは公式) といいます。ちなみに Gell-Mann(ゲルマン) で 1 人の名前です。右辺の H_{int} は「相互作用描像と時間発展演算子」で見たように相互作用描像 ϕ_I によるもので書けます。これは簡単に n 点にできて

$$\langle \Omega | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \left(\phi_I(x_1) \cdots \phi_I(x_n) \exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right) | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left(\exp \left[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right) | 0 \rangle}$$

となります。この式は相互作用ありでの n 点相関関数を相互作用なしの真空によって計算できることを示しています。この関係のおかげで相互作用ありでの n 点相関関数を摂動論によって計算できます。