

ポアンカレ変換と生成子

「ネーターの定理」でみたように、連続的な対称性が存在するときは保存量が存在します。これは、生成子と呼ばれるものにも対応するので、ポアンカレ変換を使ってそれを見ていきます。
群論での生成子の話も少ししています。より細かい群論の話は「リー群」でしています。

相対論的な場の量子論で要求されるのは、ポアンカレ (Poincaré) 変換のもとで理論が不変であることです (言い換えればラグランジアン密度がポアンカレ変換のもとで不変)。「ネーターの定理」での、4次元時空の平行移動とローレンツ変換を合わせたものがポアンカレ変換です。ポアンカレ変換は、ローレンツ変換を $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ 、4次元時空の平行移動を $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ とすれば

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \epsilon^\mu$$

で与えられます (一般相対性理論の「キリング方程式」も参照)。この変換で不変であれば、特殊相対性理論の要求を満たし、ネーターの定理からエネルギー、運動量、角運動量の保存が出てきます。ただし、improper なローレンツ変換である時間反転と空間反転は破られているものもあるので、proper なローレンツ変換に対して不変であればいいとも言えます。

ここでは、ポアンカレ変換の生成子 (generator) を求めます。最初に、古典場に対するネーターの定理から求め、次に場の演算子の場合を求め、最後に群論での生成子を求めます。

「ネーターの定理」での記号をそのまま使います。ネーターカレント f_μ の 0 成分の三次元積分によって保存量が出てくるので、それを G として

$$\begin{aligned} G &= \int_V d^3x f_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \phi_r)} (\delta \phi_r(x) - \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} \delta x^\nu) + g_{0\nu} \mathcal{L} \delta x^\nu \\ &= \pi_r \delta \phi_r - (\pi_r \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - g_{0\nu} \mathcal{L}) \delta x^\nu \end{aligned}$$

ϕ_r の添え字 r は適当な自由度です。この添え字も同じものは和を取るようになりますが ($r = 1, 2, \dots, N$)、面倒なら無視していいです。保存量 G がラグランジアン密度を不変にする変換の生成子と呼ばれるものになります。 G と ϕ_r のポアソン括弧を計算してみると

$$\begin{aligned} \{\phi_r(x), G\}_P &= \int d^3x' \left(\frac{\delta \phi_r(x)}{\delta \phi_s(x')} \frac{\delta G}{\delta \pi_s(x')} - \frac{\delta \phi_r(x)}{\delta \pi_s(x')} \frac{\delta G}{\delta \phi_s(x')} \right) \quad (x = (\mathbf{x}, t), x' = (\mathbf{x}', t)) \\ &= \int d^3x' \left(\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{rs} \frac{\delta G}{\delta \pi_s(x')} \right) \\ &= \frac{\delta G}{\delta \pi_r(x)} \end{aligned}$$

$\nu = 0$ の場合は

$$\begin{aligned} \frac{\delta G}{\delta \pi_r(x)} &= \frac{\delta}{\delta \pi_r(x)} \int d^3x' (\pi_t(x') \delta \phi_t(x') - (\pi_t(x') \dot{\phi}_t(x') - g_{00} \mathcal{L}) \delta x^0) \quad (\dot{\phi}_t = \frac{\partial \phi_t}{\partial x^0}) \\ &= \delta \phi_r(x) - \frac{\delta}{\delta \pi_r(x)} \int d^3x' (\pi_t(x') \dot{\phi}_t(x') - \mathcal{L}) \delta x^0 \end{aligned}$$

このとき、 $\dot{\phi}_r$ は正準関係を考えると共役量 π に依存しているはずなので、 π 微分がかかることになって

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\pi_r(x)} \int d^3x' (\pi_t(x') \dot{\phi}_t(x') - \mathcal{L}) \delta x^0 &= \left(\dot{\phi}_r(x) + \int d^3x' \left(\pi_t(x') \frac{\delta \dot{\phi}_t(x')}{\delta\pi_r(x)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\pi_r(x)} \right) \right) \delta x^0 \\
&= \left(\dot{\phi}_r(x) + \int d^3y \int d^3x' \left(\pi_t(x') \frac{\delta \dot{\phi}_s(y)}{\delta\pi_r(x)} \frac{\delta \dot{\phi}_t(x')}{\delta \dot{\phi}_s(y)} - \frac{\delta \dot{\phi}_s(y)}{\delta\pi_r(x)} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}_s(y)} \right) \right) \delta x^0 \\
&= \left(\dot{\phi}_r(x) + \int d^3y \int d^3x' \frac{\delta \dot{\phi}_s(y)}{\delta\pi_r(x)} (\pi_s(x') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}_s(y)}) \right) \delta x^0 \\
&= \left(\dot{\phi}_r(x) + \int d^3y \int d^3x' \frac{\delta \dot{\phi}(y)}{\delta\pi_r(x)} (\pi_s(x') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{y}) - \pi_s(x') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{y})) \right) \delta x^0 \\
&= \dot{\phi}_r(x) \delta x^0
\end{aligned}$$

よって、 $\nu = 0$ では

$$\frac{\delta G}{\delta\pi_r(x)} = \delta\phi_r(x) - \dot{\phi}_r(x) \delta x^0$$

$\nu \neq 0$ の場合は

$$\begin{aligned}
\frac{\delta G}{\delta\pi_r(x)} &= \frac{\delta}{\delta\pi_r(x)} \int d^3x' (\pi_s(x') \delta\phi_s(x') - \pi_s(x') \frac{\partial \phi_s(x')}{\partial x^i} \delta x^i) \quad (i = 1 \sim 3) \\
&= \delta\phi_r(x) - \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x^i} \delta x^i
\end{aligned}$$

となります。これは、同じ地点での場の変化による変分 $\bar{\delta}\phi_r$ と $\delta\phi_r$ との関係

$$\bar{\delta}\phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x) \simeq \delta\phi_r(x) - \frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x^\mu} \delta x_\mu \quad (1)$$

から

$$\frac{\delta G}{\delta\pi_r(x)} = \bar{\delta}\phi_r(x)$$

つまり、ポアソン括弧は

$$\{\phi_r(x), G\}_{PB} = \bar{\delta}\phi_r(x) \quad (2)$$

となり、場の変分を与えます。このように、 G はポアソン括弧によって場の変化分を作り出すので生成子と呼ばれます。また、何かの対称性があったとき、それに対応して G が現れるので、その対称性による群 (group) の生成子と呼びます。ここではポアンカレ変換による群なので、ポアンカレ群と呼ばれます。群の生成子については後で簡単に触れます。

4次元時空の平行移動での生成子を求めます。ポアソン括弧で書けたからといって、その式から生成子は求まらないので、最初の定義の式

$$G = \int_V d^3x f_0 = \pi \delta \phi - (\pi \partial_\nu \phi - g_{0\nu} \mathcal{L}) \delta x^\nu$$

に戻ります。平行移動の変換を ϵ^μ を定数として $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ とします。そうすると、 $\delta \phi = 0$ なので

$$G = -(\pi \partial_\mu \phi - g_{0\mu} \mathcal{L}) \epsilon^\mu = -\theta_{0\mu} \epsilon^\mu = -P_\mu \epsilon^\mu \quad (3)$$

$\theta_{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量テンソル、 P_μ は4元運動量です。これが平行移動に対する生成子になります。この P_μ をポアソン括弧に入れてみれば

$$\begin{aligned} \{\phi(x), P_\mu\}_{PB} &= \int d^3x' \left(\frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi(\mathbf{x}', t)} \frac{\delta P_\mu}{\delta \pi(\mathbf{x}', t)} - \frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi(\mathbf{x}', t)} \frac{\delta P_\mu}{\delta \phi(\mathbf{x}', t)} \right) \\ &= \int d^3x' \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t) \quad (P_\mu = \pi \partial_\mu \phi - g_{0\mu} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)) \\ &= \partial_\mu \phi(x) \end{aligned}$$

となるので

$$\{\phi(x), G\}_{PB} = -\epsilon_\mu \partial^\mu \phi(x)$$

これは (1) での

$$\bar{\delta} \phi(x) = -\epsilon_\mu \partial^\mu \phi(x)$$

と一致しています。

今度はローレンツ変換の生成子を求めます。ローレンツ変換は

$$x'^\mu = x^\mu + \delta w^{\mu\nu} x_\nu, \quad \phi'(x') = \phi(x) + \delta \phi(x) = \phi(x) + \frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \phi(x)$$

$\delta w_{\mu\nu}$, $I^{\mu\nu}$ は反対称テンソルです。「ネーターの定理」での結果からすぐに (記号は「ネーターの定理」と同じもの)

$$G = \frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

ポアソン括弧は

$$\{\phi(x), G\}_{PB} = \int d^3x' \left(\frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi(\mathbf{x}', t)} \frac{\delta G}{\delta \pi(\mathbf{x}', t)} - \frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi(\mathbf{x}', t)} \frac{\delta G}{\delta \phi(\mathbf{x}', t)} \right)$$

G の汎関数微分は、 $\delta \phi = \phi'(x') - \phi(x)$ から

$$\begin{aligned}
\frac{\delta G}{\delta \pi(\mathbf{x}', t)} &= \frac{\delta}{\delta \pi(\mathbf{x}', t)} (\pi \delta \phi - (\pi \partial_\nu \phi - g_{0\nu} \mathcal{L}) \delta x^\nu) \\
&= \frac{\delta}{\delta \pi(\mathbf{x}', t)} \left(\pi \left(\frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \phi \right) - (\pi \partial_\nu \phi - g_{0\nu} \mathcal{L}) \delta w^{\nu\mu} x_\mu \right)
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
\{\phi(x), G\}_{PB} &= \frac{1}{2} I^{\mu\nu} \phi \delta w_{\mu\nu} - x_\mu \partial_\nu \phi \delta w^{\nu\mu} \\
&= \frac{1}{2} (I^{\mu\nu} \phi \delta w_{\mu\nu} - x_\mu \partial_\nu \phi \delta w^{\nu\mu} - x_\mu \partial_\nu \phi \delta w^{\nu\mu}) \\
&= \frac{1}{2} (I^{\mu\nu} \phi - x^\nu \partial^\mu \phi + x_\mu \partial_\nu \phi) \delta w_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$M_{\mu\nu}$ を使えば

$$\{\phi(x), M_{\mu\nu}\}_{PB} = I^{\mu\nu} \phi + x_\mu \partial_\nu \phi - x^\nu \partial^\mu \phi$$

となります。

ポアンカレ群における生成子は平行移動とローレンツ変換のものを足せばいいので

$$G = -\epsilon_\mu P^\mu + \frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$$

となります。

4 元運動量を P_μ と書いているので、量子力学のように、ポアソン括弧の交換関係化と運動量の演算子化で場の演算子の平行移動を書けることが予想できます。実際にそうになっていることを見ます。

先に平行移動の演算子を定義してしまいます。量子力学で出てくるように、平行移動の演算子は

$$U = \exp[i\hat{P} \cdot \epsilon]$$

で与えられます ($\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu$)。これで実際に平行移動が起こせていることをポアソン括弧を交換関係に置きなおしたものを使って示します。

平行移動に対するポアソン括弧は

$$\{\phi(x), P_\mu\}_{PB} = \partial_\mu \phi(x)$$

しかし、この定義だと、 $\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu$ にできないので (下の (8) も見てください)

$$-i\{\phi(x), P_\mu\}_{PB} = \partial_\mu \phi(x)$$

とします。これを演算子化することで、交換関係として

$$-i[\hat{\phi}(x), \hat{P}_\mu] = \partial_\mu \hat{\phi}(x) \quad (4)$$

というのが出てきます。この交換関係が、生成子 $\hat{P}_\mu$ が場の演算子の変化を起こしていることを表します。なので、 $\hat{P}_\mu$ は演算子形式での生成子と言えます。

この交換関係を使うことで演算子化した場 $\hat{\phi}(x)$ の平行移動が

$$U\hat{\phi}(x)U^\dagger = \exp[i\hat{P} \cdot \epsilon]\hat{\phi}(x)\exp[-i\hat{P} \cdot \epsilon] \quad (5)$$

で与えられるのが分かります。ハウスドルフの公式を使って展開して、交換関係を使うと

$$\begin{aligned} U\hat{\phi}(x)U^\dagger &= \hat{\phi}(x) + [i\hat{P} \cdot \epsilon, \hat{\phi}(x)] + \frac{1}{2}[i\hat{P} \cdot \epsilon, [i\hat{P} \cdot \epsilon, \hat{\phi}(x)]] + \cdots \\ &= \hat{\phi}(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \hat{\phi}(x) + \frac{1}{2}[i\hat{P} \cdot \epsilon, \epsilon^\mu \partial_\mu \hat{\phi}(x)] + \cdots \\ &= \hat{\phi}(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \hat{\phi}(x) + \frac{1}{2}\epsilon^\mu \epsilon^\nu \partial_\mu [i\hat{P}_\nu, \hat{\phi}(x)] + \cdots \\ &= \hat{\phi}(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \hat{\phi}(x) + \frac{1}{2}\epsilon^\mu \epsilon^\nu \partial_\mu \partial_\nu \hat{\phi}(x) + \cdots \\ &= \hat{\phi}(x + \epsilon) \end{aligned} \quad (6)$$

となって、場の演算子の平行移動になっていることが確かめられ、古典場から量子場への単純な置き換えが成立しているのが分かります。

ここで重要なのは (4) と (5) です。(6) と (4) を見ると、 ϵ の 1 次では

$$\begin{aligned} \hat{\phi}'(x) &= \exp[i\hat{P} \cdot \epsilon]\hat{\phi}(x)\exp[-i\hat{P} \cdot \epsilon] = \hat{\phi}(x) + i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu \hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(x) + \delta\hat{\phi} \\ -i\epsilon^\mu [\hat{\phi}(x), \hat{P}_\mu] &= i\epsilon^\mu \hat{P}_\mu \hat{\phi}(x) = \epsilon^\mu \partial_\mu \hat{\phi}(x) = \delta\hat{\phi} \end{aligned}$$

となっています。古典的な場合と同じように、生成子との交換関係によって変換による変化分が実際に出てきます。そして、場の演算子の変換に生成子が入ってきます。交換関係によって変化分が出てくるのは一般的な性質で、ある変換に対応する生成子 G (ネーターカレントの 0 成分の 3 次元積分) と場の演算子 (正準共役な場も) による任意の演算子 $\hat{A}$ との交換関係は

$$[\hat{A}, \epsilon G] = i\delta\hat{A}$$

という関係を持ちます。生成子 G の符号の定義によっては右辺にマイナスが付く場合もあります。

$\hat{P}_\mu$ が平行移動の演算子であることから重要な関係が出せるので、それもついで見えておきます。「ディラック方程式」で示しているものを使います。ディラック方程式でのカレント J_μ の連続の方程式は (定数はどうでもいいので省きます)

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi)$$

J^μ を演算子とすれば、 $\hat{P}_\mu$ との交換関係は

$$[\hat{P}_\mu, \hat{J}^\mu] = -i\partial_\mu \hat{J}^\mu$$

これを運動量 p_μ, k_μ を持つ $\hat{P}_\mu$ の固有状態 $|A\rangle, |B\rangle$ で挟むと

$$\begin{aligned} -i\langle B|\partial_\mu \hat{J}^\mu|A\rangle &= \langle B|[\hat{P}_\mu, \hat{J}^\mu]|A\rangle = \langle B|(\hat{P}_\mu \hat{J}^\mu - \hat{J}^\mu \hat{P}_\mu)|A\rangle \\ &= \langle B|(k_\mu \hat{J}^\mu - \hat{J}^\mu p_\mu)|A\rangle \\ &= (k_\mu - p_\mu)\langle B|\hat{J}^\mu|A\rangle \end{aligned}$$

このとき、演算子としてもカレントの保存が満たされているなら左辺は0なので

$$q_\mu \langle B|\hat{J}^\mu|A\rangle = 0 \quad (q_\mu = k_\mu - p_\mu)$$

となります。これはワード・高橋恒等式と呼ばれます (より一般的な形は「ワード・高橋恒等式」参照)。

このようにネーターカレントからの保存量に関する生成子として、ポアソン括弧に従う生成子と演算子による交換関係に従う生成子を求められますが、違った手続きによる (群論での) 生成子もあるので、そっちの求め方も見ておきます。群論による話が入ってくるために、話が若干錯綜してしまうので、混乱しそうな人は飛ばしてください。違いは保存量を絡めずに変換性を見ている点です。

座標変換とそれによる場の変換を

$$x'^\mu = x^\mu + \alpha A^\mu(x), \quad \phi'(x') = \phi(x) + \alpha B(\phi, x)$$

と書くことにします (ϕ は古典場)。 $A^\mu(x)$ と $B(\phi, x)$ は何かしらの座標変換による部分で、 $\alpha A^\mu(x)$ と $\alpha B(\phi, x)$ は微小量 α の1次でこのような形になっているという意味です。例えば、平行移動だと $\alpha A^\mu(x) = \epsilon^\mu$ となります。

$\phi(x')$ を展開すると

$$\phi(x') = \phi(x) + \alpha A^\mu(x) \partial_\mu \phi(x)$$

α の1次までしか見ないことにすれば、第二項を $\alpha A^\mu(x) \partial_\mu \phi(x')$ とみなせるので

$$\phi(x') = \phi(x) + \alpha A^\mu(x) \partial_\mu \phi(x')$$

これを場の変換にいれれば

$$\phi'(x') = \phi(x') - \alpha A^\mu(x) \partial_\mu \phi(x') + \alpha B(\phi, x')$$

$$\phi'(x') - \phi(x') = -\alpha A^\mu(x) \partial_\mu \phi(x') + \alpha B(\phi, x')$$

$\alpha A^\mu(x)$ は α の1次までなら $A^\mu(x')$ とみなせます。そうすると、場の変化の変分 $\bar{\delta}\phi(x')$ が

$$\bar{\delta}\phi(x') = -\alpha A^\mu(x')\partial_\mu\phi(x') + \alpha B(\phi, x') \quad (7)$$

と与えられます。この式は (1) と同じです。なぜなら、ここでの $\alpha A^\mu(x)$ は δx^μ 、 $\alpha B(\phi, x')$ は $\delta\phi_r(x)$ と同じだからです。ここで、生成子 G を

$$\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = G\phi(x)$$

このように場の変分を作るように定義します。この定義によって生成子は

$$G\phi(x) = -\alpha A^\mu(x)\partial_\mu\phi(x) + \alpha B(\phi, x)$$

と与えられます。

4次元の平行移動 $x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ を適用させてみます。スカラーに対する平行移動として

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

そうすると、 $\alpha A^\mu(x, \alpha) = \epsilon^\mu, B = 0$ となるので

$$G\phi(x) = -\epsilon^\mu\partial_\mu\phi(x)$$

$$G = -\epsilon^\mu\partial_\mu$$

この G は、(3) での P_μ を演算子化 $\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu$ したものに对应しています。直接対応させたいなら

$$\bar{\delta}\phi(x) = -i\epsilon^\mu G_\mu\phi(x) \quad (8)$$

とすることで

$$G_\mu = -i\partial_\mu \quad (9)$$

このように直接対応し、これが4次元の平行移動に対する群論での生成子です。

ある変換による関係性を見ていくのが群論で、そこで出てくる生成子が今与えたものです。平行移動では生成子の形は場の演算子に対するものと同じですが、こっちでは古典的な場に対してしか見ていません。結局言いたいことは、物理の観点からの保存量に対応する生成子と、群論(数学)の観点からの生成子是对应しているということです。

状況をもっと分かりやすくするために場の平行移動の変換側からも見ておきます。場 $\phi(x)$ の平行移動は

$$\phi(x') = \phi(x + \epsilon)$$

なので、 $\phi(x)$ を x' に平行移動させるのは

$$\phi(x') = \phi(x) + \epsilon^\mu \partial_\mu \phi = (1 + \epsilon^\mu \partial_\mu) \phi(x) \quad (10)$$

と与えられます。つまり、場の平行移動を起こす変換は $1 + \epsilon^\mu \partial_\mu$ で与えられ (exp で書くなら $\exp[\epsilon^\mu \partial_\mu]$)、その変化分は $\epsilon^\mu \partial_\mu$ が $\phi(x)$ に作用することで出てきています。そして、その変化分を作る作用が ∂_μ なので、平行移動を起こす部分として生成子が出てきます (符号の違いは定義で違ってくるだけなので気にしないでもいいです)。上で話で生成子の定義を同じ座標での場の変化分である $\bar{\delta}\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x)$ を作るようにしていたので、違うものを求めているように見えますが、平行移動では同じものです。なぜなら、

$$\phi'(x') - \phi(x) = 0$$

であるために、 ϵ^μ の 1 次までで

$$\phi'(x') - \phi(x') = \phi'(x') - \phi(x) - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x')$$

と書けるので

$$\bar{\delta}\phi = \phi'(x) - \phi(x) = -\epsilon^\mu \partial_\mu \phi(x)$$

となるからです。

ローレンツ変換の生成子も出しておきます。ローレンツ変換は

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = x^\mu + \delta w^\mu_\nu x^\nu$$

なので

$$\begin{aligned} \alpha A^\mu &= \delta w^\mu_\nu x^\nu = g^{\mu\alpha} \delta w_{\alpha\nu} x^\nu \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu\alpha} \delta w_{\alpha\nu} x^\nu + g^{\mu\alpha} \delta w_{\alpha\nu} x^\nu) \\ &= \frac{1}{2} (g^{\mu\alpha} \delta w_{\alpha\nu} x^\nu - g^{\mu\alpha} \delta w_{\nu\alpha} x^\nu) \\ &= \frac{1}{2} \delta w_{\alpha\nu} (g^{\mu\alpha} x^\nu - g^{\mu\nu} x^\alpha) \end{aligned}$$

場の変換は

$$\phi'(x') = \phi(x) + \frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \phi(x)$$

なので

$$\alpha B = \frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \phi(x)$$

よって、生成子 $G^{\rho\lambda}$ は (8) の定義では ($-i\delta w_{\rho\lambda} G^{\rho\lambda} = G$ とすれば、ネーターカレントからとまる形に対応)

$$-i\delta w_{\rho\lambda} G^{\rho\lambda} = \frac{1}{2} \delta w_{\alpha\nu} (x^\nu \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\nu) \phi(x) - \frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \phi(x)$$

$\delta w_{\mu\nu}, I^{\mu\nu}$ が反対称テンソルなので、左辺での生成子にも $1/2$ をくっつけるように定義して

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2} \delta w_{\rho\lambda} L^{\rho\lambda} \phi(x) &= -\frac{1}{2} \delta w_{\alpha\nu} (g^{\mu\alpha} x^\nu - g^{\mu\nu} x^\alpha) \partial_\mu \phi(x) + \alpha B(\phi, x, \alpha) \\ \frac{i}{2} \delta w_{\rho\lambda} L^{\rho\lambda} \phi(x) &= \frac{1}{2} \delta w_{\alpha\nu} (x^\nu \partial^\alpha - x^\alpha \partial^\nu) \phi(x) - \frac{1}{2} \delta w_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \phi(x) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} iL^{\mu\nu} &= (x^\nu \partial^\mu - x^\mu \partial^\nu) - I^{\mu\nu} \\ L^{\mu\nu} &= i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + iI^{\mu\nu} \end{aligned}$$

となります。ちなみに $iM^{\mu\nu} = L^{\mu\nu}$ です。

ポアンカレ群での生成子と言ったときには

- 平行移動

$$G_\mu = -i\partial_\mu$$

- ローレンツ変換

$$L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) + iI^{\mu\nu}$$

大抵はこれらを指します。