$SL(2,C)$ の左手系、右手系

「ローレンツ群と $SL(2,C)$」を数学に寄せた話を見ていきます。
ここでは「リー群」と「リー群の表現」での話は説明なしで使っています。
同じローマ文字の添え字は和を取ります。

$SL(2,C)$ は行列式が 1 の 2×2 複素行列の集まりです。これのリー代数 $\mathfrak{sl}(2,C)$ は行列式が 1 を受けて、トレースが 0 の 2×2 複素行列となります。このため、自由度は元の $2\times 2\times 2=8$ (複素数だから 2 倍) から、トレース 0 のために 2 つ落ちて 6 です (対角成分の片方が $a+ib$ ならもう片方は $-a-ib$ だから)。なので、$\mathfrak{sl}(2,C)$ は 6 個の基底を持ちます。$\mathfrak{sl}(2,C)$ の行列を実数の係数で展開したときの 6 個の基底は、トレースが 0 になるように

$$S_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ S_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ S_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$K_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ K_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ K_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と選びます。1/2 はただの係数、S_i と K_i は $K_i=iS_i$ となっています。この場合も単純な行列の計算から、もしくはパウリ行列と同じ形になっていることから

$$[S_i,S_j]=\epsilon_{ijk}S_k \tag{1a}$$

$$[K_i,K_j]=-\epsilon_{ijk}S_k \tag{1b}$$

$$[S_i,K_j]=\epsilon_{ijk}K_k \tag{1c}$$

という交換関係が導けます。ϵ_{ijk} はレヴィ・チビタ記号です ($\epsilon_{123}=1$)。

$SL(2,C)$ の表現として、$(\overline{\Pi},C^2)$ を導入しておきます (C^2 は 2 次元複素ベクトル空間)。これは $SL(2,C)$ の行列 A を、2 次元複素ベクトル空間のベクトル v に対して

$$\overline{\Pi}(A)v=(A^\dagger)^{-1}v$$

と変換するようにしたものです。これのリー代数 $\mathfrak{sl}(2,C)$ での表現 π は、$\mathfrak{sl}(2,C)$ の行列を X とすれば

$$\pi(X)=\frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})\big|_{t=0}$$

から求まるので

$$\overline{\pi}(X)=\frac{d}{dt}((e^{tX})^\dagger)^{-1}\big|_{t=0}=\frac{d}{dt}e^{-tX^\dagger}\big|_{t=0}=-X^\dagger e^{-tX^\dagger}\big|_{t=0}=-X^\dagger \tag{2}$$

これが何かは $\mathfrak{sl}(2,C)$ の表現を見ることで分かります。

というわけで、$\mathfrak{sl}(2,C)$ の表現 (π,V) を考えます。S_i と K_i から

$$M_i=\frac{1}{2}(\pi(S_i)-i\pi(K_i))\ ,\ N_i=\frac{1}{2}(\pi(S_i)+i\pi(K_i)) \tag{3}$$

とします。$\pi(S_i)$ と $\pi(K_i)$ の交換関係は S_i と K_i の交換関係と同じなので

$$\begin{aligned}
[M_i,M_j]&=\frac{1}{4}[\pi(S_i)-i\pi(K_i),\pi(S_j)-i\pi(K_j)]\\
&=\frac{1}{4}[\pi(S_i),\pi(S_j)-i\pi(K_j)]+\frac{1}{4}[-i\pi(K_i),\pi(S_j)-i\pi(K_j)]\\
&=\frac{1}{4}([\pi(S_i),\pi(S_i)]-i[\pi(S_i),\pi(K_j)]-i[\pi(K_i),\pi(S_j)]-[\pi(K_i),\pi(K_j)])\\
&=\frac{1}{4}\big(\epsilon_{ijk}\pi(S_k)-i\epsilon_{ijk}\pi(K_k)-i\epsilon_{ijk}\pi(K_k)+\epsilon_{ijk}\pi(S_k)\big)\\
&=\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\big(\pi(S_k)-i\pi(K_k)\big)\\
&=\epsilon_{ijk}M_k
\end{aligned}$$

同様にしていくことで

$$[M_i,M_j]=\epsilon_{ijk}M_k\ ,\ [N_i,N_j]=\epsilon_{ijk}N_k\ \ ,\ [M_i,N_j]=0$$

このように M_i,N_i は $\mathfrak{su}(2)$ と同じ交換関係になっているのが分かります。

「リー群の表現」での $\mathfrak{su}(2)$ の表現を求めたときと同じように、上昇、下降演算子を

$$\begin{aligned}
&M_+=iM_1-M_2\ ,\ M_-=iM_1+M_2\\
&N_+=iN_1-N_2\ ,\ N_-=iN_1+N_2
\end{aligned}$$

と与えます。そうすると、「リー群の表現」での $J_3,J_\pm$ の交換関係と同じになるので (J_3 は $i\pi(S_3)$ で定義したので J_3 に対応するのは iM_3,iN_3)

$$\begin{aligned}
&[M_+,M_-]=2iM_3\ ,\ [N_+,N_-]=2iN_3\\
&[iM_3,M_+]=M_+\ ,\ [iM_3,M_-]=M_-\\
&[iN_3,N_+]=N_+\ ,\ [iM_3,N_-]=N_-
\end{aligned}$$

単に M_i,N_i の 2 つがあるだけなので、この先は $\mathfrak{su}(2)$ と同じです。

iM_3,iN_3 に対する固有ベクトル ψ は存在して (交換する 2 つの線形変換は同じ固有ベクトルを持てる)、最高ウェイトベクトルを $\psi_{0,0}$、その固有値を j_1,j_2 として

$$iM_3\psi_{0,0} = j_1\psi_{0,0} \ , \ iN_3\psi_{0,0} = j_2\psi_{0,0}$$

j_1, j_2 は整数で、最大の固有値です。$\psi_{0,0}$ は最高ウェイトベクトルなので

$$M_+\psi_{0,0} = 0 \ , \ N_+\psi_{0,0} = 0$$

これを下降演算子 M_-, N_- で 1 ずつ下げていったものを

$$\begin{aligned}
&\psi_{l_1,l_2} = (M_-)^{l_1}(N_-)^{l_2}\psi_{0,0} \\
&\psi_{l_1+1,l_2} = M_-\psi_{l_1,l_2} \\
&\psi_{l_1,l_2+1} = N_-\psi_{l_1,l_2}
\end{aligned}$$

k_1, k_2 回作用させることで固有値が 0 の 1 つ前になるなら (k_1, k_2 が固有値が 0 にならない l_1, l_2 の上限)

$$M_-\psi_{k_1,k_2} = N_-\psi_{k_1,k_2} = 0$$

ψ_{l_1,l_2} に対する iM_3, iN_3 の固有値は、M_i, N_j は交換するので

$$iM_3\psi_{l_1,l_2} = (j_1 - l_1)\psi_{l_1,l_2} \ , \ iN_3\psi_{l_1,l_2} = (j_2 - l_2)\psi_{l_1,l_2}$$

ここから先も $\mathfrak{su}(2)$ と同じにしていくことで、

$$\begin{aligned}
&M_+\psi_{l_1,l_2} = \big(2j_1l_1 - l_1(l_1 - 1)\big)\psi_{l_1-1,l_2} \\
&N_+\psi_{l_1,l_2} = \big(2j_2l_2 - l_2(l_2 - 1)\big)\psi_{l_1,l_2-1} \\
&j_1 = \frac{1}{2}k_1 \ , \ j_2 = \frac{1}{2}k_2
\end{aligned}$$

と求まります。このように $\mathfrak{sl}(2, C)$ は $\mathfrak{su}(2)$ が 2 つある形になっています。$\mathfrak{sl}(2, C)$ では固有ベクトルが $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ 個あります (固有値が 0 にならない l_1, l_2 の範囲は $0 \leq l_1 \leq 2j_1 = k_1, \ 0 \leq j_2 \leq 2j_2 = k_2$。$2j_1, 2j_2$ は整数)。なので、$\mathfrak{sl}(2, C)$ の表現のベクトル空間 $V = V_{j_1,j_2}$ の次元も $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ で、表現は j_1, j_2 で指定される $(\pi_{j_1,j_2}, V_{j_1,j_2})$ となります。これを (j_1, j_2) と書くことにします。$\mathfrak{su}(2)$ と平行の話になっていることから予想できるように、この表現は既約で、$\mathfrak{sl}(2, C)$ の全ての既約な複素表現は (j_1, j_2) と同値になります。

この表現を具体的に求めます。まずは $SL(2, C)$ の基本表現を使います。基本表現なので、$\pi(S_i) = S_i$ とします。そうすると、各行列の形からすぐに

$$M_i = S_i \ , \ N_i = 0$$

これを M_+, M_- に入れて

$$M_+ = iM_1 - M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ M_- = iM_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_+ = N_- = 0$$

2 次元複素ベクトル空間 C^2 ($SL(2,C)$ の基本表現では 2 次元複素ベクトル空間) における、$M_3 = S_3$ の固有値は固有値の式

$$\det[S_3 - \frac{\lambda}{2}I] = \frac{1}{4}(-i-\lambda)(i-\lambda) = \frac{1}{4}(1+\lambda^2) = 0$$

から、固有値 $\lambda = \pm i$ と求まります。対応する C^2 の固有ベクトルは (2 次元なので (z_1, z_2) とします)

$$(S_3 - \frac{i}{2}I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i-i & 0 \\ 0 & i-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(S_3 + \frac{i}{2}I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i+i & 0 \\ 0 & i+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

から、任意定数を a として

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$$

この固有ベクトルに M_+, M_- を作用させると

$$M_+\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ , \ M_+\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_-\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \ , \ M_-\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = 0$$

なので、$(a, 0)$ が最高ウェイトベクトルになり、それに M_- を 2 回作用させると 0 になります。よって、M_- は 1 回しか作用させられないので ($k_1 = 1$)、$j_1 = k_1/2$ から $j_1 = 1/2$ です。そして、N_i は 0 なので $j_2 = 0$ です。よって、$SL(2,C)$ の基本表現は $(1/2, 0)$ です。

今度は $(\overline{\Pi}, C^2)$ を見ます。(2) から、$\overline{\pi}$ は $\overline{\pi}(X) = -X^\dagger$ なので、S_i, K_i は

$$\overline{\pi}(S_i) = S_i \ , \ \overline{\pi}(K_i) = -iS_i$$

そうすると、M_i, N_i は

$$M_i = 0\ ,\ N_i = S_i$$

これは基本表現での場合から M_i と N_i が入れ替わっただけなので

$$M_+ = M_- = 0$$

$$N_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ N_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

固有ベクトルも M_3 から N_3 に対するものになるだけなので、固有値は j_1 でなく j_2 になります。よって、同じ話から、$(\overline{\Pi}, C^2)$ では $(0, 1/2)$ になります。

ここまでくると何が求まったのかが予想できると思います。$SL(2, C)$ の基本表現と $(\overline{\Pi}, C^2)$ のベクトル空間は 2 次元複素ベクトル空間であり、2 成分スピノールは 2 次元複素ベクトル空間の基底になれるので、変換を受けるのは 2 成分スピノールです。そして、「ローレンツ群と $SL(2, C)$」で見たように、ワイル表現での 4 成分スピノールを 2 成分ごとに分けて、上 2 成分を χ、下 2 成分を $\overline{\eta}$ とすれば、ローレンツ変換に対して

$$\chi' = s\chi\ ,\ \overline{\eta}' = (s^{-1})^\dagger \eta'$$

と変換されます。この変換は、s は 2 成分スピノールの変換なので基本表現での変換、$(s^{-1})^\dagger$ は $(\overline{\Pi}, C^2)$ での変換になっています。つまり、ワイル表現での上 2 成分である左手系が基本表現の変換を受けていることから、左手系は $(1/2, 0)$、そして下 2 成分の右手系は $(0, 1/2)$ ということになります。これが「ローレンツ群と $SL(2, C)$」での話を数学視点にしたものです。こういったことから、$(1/2, 0)$、$(0, 1/2)$ は $SL(2, C)$ の左手系、右手系のスピノール表現と呼ばれます。

よく出てくる (j_1, j_2) のテンソル積について簡単に触れておきます。細かい話は省いて規則だけを与えます。表現のテンソル積の定義は、群 G の A に対して、2 つの表現 $(\Pi_1, V_1), (\Pi_2, V_2)$ が

$$(\Pi_1 \otimes \Pi_2)(A) = \Pi_1(A) \otimes \Pi_2(A)$$

となることで、この表現をテンソル積表現と呼びます。$\Pi_1(A) \otimes \Pi_2(A)$ の表現空間は $V_1 \otimes V_2$ です。感覚的なことを言っておきます。V_1, V_2 のベクトルを v_1, v_2 とすれば、$V_1 \otimes V_2$ のベクトルは $v_1 \otimes v_2$ なので

$$(\Pi_1 \otimes \Pi_2)(A)v_1 \otimes v_2 = \Pi_1(A)v_1 \otimes \Pi_2(A)v_2 = A'_1 A'_2 v_1 \otimes v_2$$

とできるとします。$\Pi_1(A)v_1 = A'_1 v_1,\ \Pi_2(A)v_2 = A'_2 v_2$ としています (A'_1, A'_2 は固有値)。v_1, v_2 は基底でさらに展開できるので、V_1 と V_2 の基底のテンソル積にできます。よって基底の組み合わせで表現のテンソル積を指定することができます。

そうすると、$SL(2, C)$ での $(j_1, 0)$ と $(0, j_2)$ のテンソル積は、j_1, j_2 で基底を構成するための最高ウェイトベクトルが決まることから

$$(j_1, j_2) = (j_1, 0) \otimes (0, j_2)$$

厳密には等号ではないですが、等号と思って平気です。例えば、左手系と右手系のテンソル積は $(1/2, 1/2)$ になります。

さらに、テンソル積は直和に分解でき (テンソル積は既約ではないから)

$$(j_1,j_2)\otimes(k_1,k_2)=(l_1,l_2)\oplus\cdots$$
$$|j_1-k_1|\le l_1\le j_1+k_1\ ,\ |j_2-k_2|\le l_2\le j_2+k_2$$

となります。「$\cdots$」には l_1, l_2 の取れる値が入っていきます。例えば

$$(\frac{1}{2},0)\otimes(\frac{1}{2},0)=(0,0)\oplus(1,0)\qquad(0\le l_1\le 1\ ,\ l_2=0)$$
$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=(0,0)\oplus(1,0)\oplus(0,1)\oplus(1,1)\qquad(0\le l_1\le 1\ ,\ 0\le l_2\le 1)$$

このように分解されます。

今度はローレンツ群を見ていきます。ギリシャ文字の添え字は $0,1,2,3$ とします。「ローレンツ群と $SL(2,C)$」ではローレンツ群をローレンツ変換から構成しましたが、群論の視点から見直します。

ローレンツ群は記号で $O(p,q)$ と書かれます。p,q は対角行列 $(+1,+1,\cdots,-1,-1,\cdots)$ での $+1$ の数が p、-1 の数が q です。なので、ミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}=(+1,-1,-1,-1)$ では $O(1,3)$ です。また、計量の符号を逆にとった場合では $(+1,+1,+1,-1)$ として $O(3,1)$ と書かれます。$O(1,3)$ にはパリティ変換と時間反転が含まれていて、これを $SO(1,3)$ にすると、パリティ変換と時間反転は省かれます。パリティ変換と時間反転の行列式は -1 だからです。また、因果律 (時間は未来に進む) から $SO(1,3)$ の行列 $A_{\mu\nu}$ には $A_{00}>0$ という制限がかかります。この条件があることを示すために $SO(1,3)_0$ と書かれたりもしますが、ここでは $SO(1,3)$ と書いていきます。

ローレンツ群 $O(1,3)$ に含まれる $\Lambda^\mu{}_\nu$ はミンコフスキー空間での内積を

$$\eta_{\mu\nu}a^\mu b^\nu=\eta_{\mu\nu}a'^\mu b'^\nu$$

とする変換 $a'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$ によって構成されます。この $\Lambda^\mu{}_\nu$ は

$$\eta_{\mu\nu}a'^\mu b'^\nu=\eta^{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta a^\alpha b^\beta=\eta^{\mu\nu}a_\mu b_\nu$$

なので

$$\eta_{\alpha\beta}=\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta$$

という関係を持ちます。

時空の添え字ありで行うより、行列表記にした方が見やすいので、ベクトルを行列扱いして a_μ, b_ν を 4×1 行列 a,b とします。そうすると内積は

$$\eta^{\mu\nu}a_\mu b_\nu=a^T\eta b$$

と書けて (T は転置)、$\Lambda_\mu{}^\nu$ の行列を Λ とすれば

$$a'^T\eta b'=(\Lambda a)^T\eta(\Lambda b)=a^T\Lambda^T\eta\Lambda b$$

となるので

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

これが条件で、ミンコフスキー計量 η に対して $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$ とする行列 Λ がローレンツ群 $O(1,3)$ となります。

$O(1,3)$ のリー代数 $\mathfrak{o}(1,3)$ を求めます。$O(1,3)$ のリー代数 $\mathfrak{o}(1,3)$ の行列 X は $O(1,3)$ の行列 e^{tX} によって定義されているので (t は実数パラメータ)、$O(1,3)$ の条件から

$$e^{tX^T} \eta e^{tX} = \eta$$

これの t 微分をして $t=0$ とすれば

$$X^T \eta + \eta X = 0 \tag{4}$$

計量の形から -1 の部分が通常のユークリッド空間の計量部分なので、そこに対応する X の 3×3 行列部分には $O(3)$ のリー代数の行列 O を当てます。残っている成分には、実数の 1×3 行列 $\boldsymbol{v}$, 3×1 行列 $\boldsymbol{w}$ と、実数 c を当て

$$X = \begin{pmatrix} c & v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & O_{11} & O_{12} & O_{13} \\ w_2 & O_{21} & O_{22} & O_{23} \\ w_3 & O_{31} & O_{32} & O_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} & O \end{pmatrix}$$

これを (4) に入れることで

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} c & \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} & O^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{w} & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c & -\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v} & -O^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & \boldsymbol{v} \\ -\boldsymbol{w} & -O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2c & -\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} & -O^T - O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これから

$$c = 0\ ,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\ ,\ O = -O^T$$

$O = -O^T$ は $O(3)$ のリー代数は反対称行列という条件そのものです。よって $O(1,3)$ のリー代数の行列 X の形は

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} & O \end{pmatrix}$$

これは O と $\boldsymbol{v}$ の組み合わせによるので、基底による分解は

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} \\ &= a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + b_1 I_1 + b_2 I_2 + b_3 I_3 \end{aligned}$$

とできます。また、$\mathfrak{o}(1,3)$ の自由度は $O(4)$ のリー代数 $\mathfrak{o}(4)$ と同じで $4(4-1)/2=6$ なので、この基底の数で問題ないです。具体的な $SO(1,3)$ の行列として、I_i には $O(3)$ のリー代数 $\mathfrak{o}(3)$ の行列を対応させて ($(0,\mu)$ 成分と $(\mu,0)$ 成分が 0 で、残りが $\mathfrak{o}(3)$)

$$I_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\ ,\ I_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\ ,\ I_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{v}$ には $\boldsymbol{v}$ が 3 次元の実数のベクトルなので、$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ を基底にすることで

$$L_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ ,\ L_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\ ,\ L_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

これらは一般相対性理論での「キリング方程式」で求めたローレンツ変換の生成子と一致します。これから作られるローレンツ変換は回転とローレンツブーストなので、行列式が 1 の $SO(1,3)$ になります。

　これらの交換関係を求めます。I_i は $\mathfrak{o}(3)$ の交換関係をそのまま持ってくればいいので

$$[I_i,I_j]=\epsilon_{ijk}I_k$$

ローマ文字の添え字は $1,2,3$ です。L_i は例えば、L_1 と L_2 では

$$\begin{aligned}[L_1,L_2]&=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\&=-I_3\end{aligned}$$

他のも同様にしていくことで

$$[L_i.L_j]=-\epsilon_{ijk}I_k$$

I_i と L_i とでは、例えば I_1,L_2 では

$$[I_1, L_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= L_3$$

同様にして

$$[I_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

まとめると $SO(3,1)$ でのリー代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ の交換関係は

$$[I_i, I_j] = \epsilon_{ijk} I_k$$

$$[L_i . L_j] = -\epsilon_{ijk} I_k$$

$$[I_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

I_i, L_i に i を含ませて定義すれば「ローレンツ群と $SL(2,C)$」で求めた交換関係と一致します。そして、これは $\mathfrak{sl}(2,C)$ の交換関係 (1a)〜(1c) と同じ形をしています。よって $\mathfrak{so}(3,1)$ と $\mathfrak{sl}(2,C)$ は同形です。一方で、「ローレンツ群と $SL(2,C)$」で触れたように、$SL(2,C)$ は $SO(3,1)$ と 2 対 1 対応しています (準同形写像)。

ここでさらに気づくのは、$\mathfrak{so}(1,3)$ と $\mathfrak{sl}(2,C)$ が同形なので、$SO(1,3)$ の表現は (j_1, j_2) に対応させられるということです。ただし、制限がつきます。これを先に見ておきます。$\mathfrak{so}(1,3)$ の (j_1, j_2) に対応する表現を (π, V) とします。$\mathfrak{sl}(2,C)$ の記号に合わせて書けば、$\mathfrak{so}(1,3)$ でも、最高ウェイトベクトル $\psi_{0,0}$ に対して

$$(iM_3 + iN_3)\psi_{0,0} = (j_1 + j_2)\psi_{0,0}$$

交換関係が同じなので、2×2 行列と 4×4 行列の違いはあっても同じことが出来ます。$SO(1,3)$ は $\mathfrak{so}(1,3)$ の行列 X を exp にのせることで作れるので、それを $e^{\theta X}$ として、X に $iM_3 + iN_3$ を入れます。そして、$\pi(I_3)$ は (3) から M_3, N_3 によって

$$(iM_3 + iN_3) = i\pi(I_3)$$

となっていることを使います。$e^{\theta X}$ を $\theta = -2\pi$ として $\psi_{0,0}$ に作用させると

$$e^{-2\pi \cdot \pi(I_3)}\psi_{0,0} = e^{2i(iM_3 + iN_3)\pi}\psi_{0,0}$$

記号が重なってますが π は円周率で $\pi(I_3)$ は表現です。$\Pi(e^{tX}) = e^{t\pi(X)}$ と基本表現 $\pi(X) = X$ を使って

$$e^{-2\pi\cdot\pi(I_3)}\psi_{0,0}=\Pi(e^{-2\pi\cdot I_3})\psi_{0,0}$$

I_3 の (i,j) 成分は z 軸周りの回転行列、$(0,\mu),(\mu,0)$ 成分は 0 なので、I_3 の (i,j) 成分を O とすれば

$$e^{2\pi\cdot I_3}=I+\begin{pmatrix}0&0\\0&O\end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0\\0&O^2\end{pmatrix}+\cdots=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos 2\pi&-\sin 2\pi&0\\0&\sin 2\pi&\cos 2\pi&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I$$

となって、単位行列 I になるので

$$e^{2i(iM_3+iN_3)\pi}\psi_{0,0}=\Pi(I)\psi_{0,0}=\psi_{0,0}\qquad(\Pi(I)=\Pi(I)\Pi(I)\ \Rightarrow\ \Pi(I)=I)$$

これと iM_3,iN_3 の固有値 j_1,j_2 による

$$e^{2i(iM_3+iN_3)\pi}\psi_{0,0}=e^{2i(j_1+j_2)\pi}\psi_{0,0}$$

とを比較することで

$$e^{2i(j_1+j_2)\pi}=1$$

よって、j_1+j_2 は整数でなければいけないことになります。これが $SO(1,3)$ での表現 (j_1,j_2) への条件です。

制限が分かったところで (j_1,j_2) との対応を見ます。そのために $SO(1,3)$ を 4 次元複素ベクトル空間 C^4 に持っていきます ((j_1,j_2) は全ての $\mathfrak{sl}(2,C)$ の複素表現と同値だから)。$SO(1,3)$ の基本表現は 4 次元実ベクトル空間なので、これを複素化して C^4 にします。そのためには、リー代数において $\mathfrak{so}(1,3)$ と $\mathfrak{sl}(2,C)$ は同形なので、$\mathfrak{sl}(2,C)$ の (π_C,C^4) の表現を考えればいいです。これは、$SO(1,3)$ の C^4 での表現 (Π_C,C^4) から出てくるリー代数の表現が (π_C,C^4) ということです。なので、この表現は $\mathfrak{sl}(2,C)$ を 4 次元にしたものなので、(3) での S_i,K_i が $\mathfrak{o}(1,3)$ の基本表現の行列 I_i,L_i ($\mathfrak{sl}(2,C)$ と交換関係が同じ) になるとして、$M_3,N_3,M_\pm,N_\pm$ を

$$iM_3=\frac{1}{2}(iI_3+L_3)\ ,\ iN_3=\frac{1}{2}(iI_3-L_3)$$

$$M_+=iM_1-M_2=\frac{1}{2}(iI_1-I_2+L_1+iL_2)$$

$$M_-=iM_1+M_2=\frac{1}{2}(iI_1+I_2+L_1-iL_2)$$

$$N_+=iN_1-N_2=\frac{1}{2}(iI_1-I_2-L_1-iL_2)$$

$$N_-=iN_1+N_2=\frac{1}{2}(iI_1+I_2-L_1+iL_2)$$

とすればいいです。後は iM_3 と iN_3 の固有ベクトルを求めて、最高ウェイトベクトルを決めます。これらの行列は

$$iM_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\ ,\ iN_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{pmatrix} \ ,\ M_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{pmatrix} \ ,\ N_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & -1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

iM_3 の固有値の式は

$$0 = \det[iM_3 - \frac{\lambda}{2}I] = (\frac{1}{2})^4 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -i & 0 \\ 0 & i & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

余因子展開を使って行列式を計算します。最右辺での行列式部分を $|A|$ として、行列 A の余因子を $(-1)^{\mu+1+\nu+1}\Delta_{\mu\nu}$ とします ($\mu = 0, 1, 2, 3$ だから $+1$ している)。0 行目で展開することにして

$$\begin{aligned} 0 = \det[iM_3 - \frac{\lambda}{2}I] &= A_{00}(-1)^2\Delta_{00} + A_{01}(-1)^3\Delta_{01} + A_{02}(-1)^4\Delta_{02} + A_{03}(-1)^5\Delta_{03} \\ &= A_{00}(-\lambda^3 + \lambda) - A_{03}(-\lambda^2 - 1) \\ &= -\lambda(-\lambda^3 + \lambda) - (\lambda^2 - 1) \\ &= \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 \\ &= (\lambda^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

これから固有値 $\lambda = \pm 1$ となります。そうすると固有ベクトルは

$$0 = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 1 & -i & 0 \\ 0 & i & \pm 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

から

$$w_1 = \begin{pmatrix} a \\ ib \\ -b \\ a \end{pmatrix} \ ,\ w_2 = \begin{pmatrix} a \\ ib \\ b \\ -a \end{pmatrix}$$

と求まります。これらに iN_3 を作用させると

$$
iN_3 \begin{pmatrix} a \\ ib \\ -b \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ ib \\ -b \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a \\ ib \\ -b \\ -a \end{pmatrix}
$$

$$
iN_3 \begin{pmatrix} a \\ ib \\ b \\ -a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ ib \\ b \\ -a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ -ib \\ -b \\ -a \end{pmatrix}
$$

N_3 の固有ベクトルになるように a, b を選べば、iM_3, iN_3 両方の固有ベクトルになります。その中から、w_1 で $a = 0$ とした

$$
\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ ib \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}
$$

を見てみます。これに M_+, M_-, N_+, N_- を作用させると

$$
M_+\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ , \ (M_-)^2\psi = \frac{1}{4} M_- \begin{pmatrix} 2ib \\ 0 \\ 0 \\ -2ib \end{pmatrix} = 0
$$

$$
N_+\psi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ , \ (N_-)^2\psi = \frac{1}{4} N_- \begin{pmatrix} -2ib \\ 0 \\ 0 \\ -2ib \end{pmatrix} = 0
$$

つまり、ψ は最高ウェイトベクトル $\psi_{0,0}$ で、M_- か N_- を 2 回作用させると 0 になります。これから下降演算子の作用させる回数 l_1, l_2 の範囲は $0 \leq l_{1,2} \leq 1$ なので、$j_1 = j_2 = 1/2$ となります。よって、(π_C, C^4) の表現は $(1/2, 1/2)$ で $j_1 + j_2 = 1$ となり、$SO(1, 3)$ からの制限を満たしています。また、$SO(1, 3)$ なので、$(1/2, 1/2)$ は 4 元ベクトルへの変換ということが分かります。