

$U(N)$ と $SU(N)$

ゲージ場で出てくる $U(N)$ と $SU(N)$ を見ていきます。

ここでの添え字は行列を区別するものが多く、行列の成分を表しているものはほぼないです。

最初に、雑にリー群 (Lie group) に触れておきます (より細かいことは「リー群」参照)。何かの性質 (演算規則) を持った集まりを扱う数学を群論 (group theory) と言います。その中で、連続的な値を持つパラメータによって表される群 (連続変数による関数の集まり) を連続群 (continuous group) と言い、大雑把には微分可能な連続群がリー群です。

分かりやすいので回転変換を先に見ておきます。回転変換のパラメータは角度で、連続的です。なので、回転変換 R の集まりはリー群です。回転変換は回転させてない状況から連続的に必要な角度まで動かす変換なので、回転させない $R(0) = 1$ に微小な回転変換部分を足す形で書けます。つまり、 t を微小として

$$R(t) = 1 + tX$$

とします。 X は回転変換を作る部分で、生成子 (generator) と呼ばれます。生成子の数は群の次元と定義されます。

これを何度も作用させることで有限の角度 θ の回転になります。 N 回繰り返すと θ になるとすれば

$$R(\theta) = (1 + tX)^N = \left(1 + \frac{\theta}{N}X\right)^N$$

N を無限大の極限に持っていくと

$$R(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\theta}{N}X\right)^N = e^{\theta X} \quad (1)$$

そして、生成子 X は

$$\left. \frac{dR}{d\theta} \right|_{\theta=0} = X e^{\theta X} \Big|_{\theta=0} = X$$

として取り出せます。物理では $\exp$ に虚数を含めて定義すると便利なので

$$R(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{\theta}{N}X\right)^N = e^{-i\theta X}$$

このように定義されます。

ちなみに、リー群の話での生成子と一般的な群の話での生成子では少し意味が異なります。リー群では今のようにリー群の元 (element) を微分して出てくるものですが、一般的な群では元そのものです (数学の「群論」参照)。

1 個の角度 θ としましたが、一般的には x_1, x_2, x_3 軸周りの回転を行います。 x_i 軸周りの回転の角度 θ_i ($i = 1, 2, 3$) として、3 次元回転の 3×3 行列を $R(\theta)$ ($\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$) とします。このとき、 θ に対応して、生成子は 3 個出てきます。角度が微小として

$$R(\theta) = 1 + \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial R}{\partial \theta_i} \right|_{\theta=0} \theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left. \frac{\partial^2 R}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right|_{\theta=0} \theta_i \theta_j + \cdots = 1 + \sum_{i=1}^3 X_i \theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 K_{ij} \theta_i \theta_j + \cdots$$

X_i が生成子です。 $R(0) = 1$ は 3×3 単位行列です。

生成子は交換関係を持つので、それを求めます。 $R(\theta)$ の逆行列は、2 次までで

$$R^{-1}(\theta) = 1 - X_i \theta_i + X_i X_j \theta_i \theta_j - \frac{1}{2} K_{ij} \theta_i \theta_j + \dots$$

煩わしいので、同じローマ文字の添え字は和を取るとします。これらによって、 $R(\alpha)R(\beta)R^{-1}(\alpha)R^{-1}(\beta)$ を計算します。2 次までで

$$R(\alpha)R(\beta) = 1 + X_i \alpha_i + X_i \beta_i + X_i X_j \alpha_i \beta_j + \frac{1}{2} K_{ij} \alpha_i \alpha_j + \frac{1}{2} K_{ij} \beta_i \beta_j$$

$$R^{-1}(\alpha)R^{-1}(\beta) = 1 - X_i \alpha_i - X_i \beta_i + X_i X_j \alpha_i \beta_j + X_i X_j \alpha_i \alpha_j + X_i X_j \beta_i \beta_j - \frac{1}{2} K_{ij} \alpha_i \alpha_j - \frac{1}{2} K_{ij} \beta_i \beta_j$$

なので

$$\begin{aligned} & R(\alpha)R(\beta)R^{-1}(\alpha)R^{-1}(\beta) \\ &= (1 + X_i \alpha_i + X_i \beta_i + X_i X_j \alpha_i \beta_j + \frac{1}{2} K_{ij} \alpha_i \alpha_j + \frac{1}{2} K_{ij} \beta_i \beta_j) \\ &\quad \times (1 - X_a \alpha_a - X_a \beta_a + X_a X_b \alpha_a \beta_b + X_a X_b \alpha_a \alpha_b + X_a X_b \beta_a \beta_b - \frac{1}{2} K_{ab} \alpha_a \alpha_b - \frac{1}{2} K_{ab} \beta_a \beta_b) \\ &= 1 - X_a \alpha_a - X_a \beta_a + X_a X_b \alpha_a \beta_b + X_a X_b \alpha_a \alpha_b + X_a X_b \beta_a \beta_b - \frac{1}{2} K_{ab} \alpha_a \alpha_b - \frac{1}{2} K_{ab} \beta_a \beta_b \\ &\quad + X_i \alpha_i - X_i X_a \alpha_i \alpha_a - X_i X_a \alpha_i \beta_a + X_i \beta_i - X_i X_a \beta_i \alpha_a - X_i X_a \beta_i \beta_a \\ &\quad + X_i X_j \alpha_i \beta_j + \frac{1}{2} K_{ij} \alpha_i \alpha_j + \frac{1}{2} K_{ij} \beta_i \beta_j \\ &= 1 + X_i X_j \alpha_i \beta_j - X_i X_j \alpha_j \beta_i \\ &= 1 + X_i X_j \alpha_i \beta_j - X_j X_i \alpha_i \beta_j \\ &= 1 + [X_i, X_j] \alpha_i \beta_j \end{aligned}$$

一方で、回転変換を 4 回行う $R(\alpha)R(\beta)R^{-1}(\alpha)R^{-1}(\beta)$ は、対応する微小な角度 ϕ で回転させるのと同じなので

$$R(\alpha)R(\beta)R^{-1}(\alpha)R^{-1}(\beta) = R(\phi)$$

そして、 ϕ は α, β の関数なので、 ϕ の 1 次までで対応するとして

$$1 + [X_i, X_j] \alpha_i \beta_j = 1 + X_k \phi_k$$

これから

$$[X_i, X_j] \alpha_i \beta_j = X_k \phi_k$$

$\phi_k = c_{ijk} \alpha_i \beta_j$ とすれば

$$[X_i, X_j] = c_{ijk} X_k$$

となり、生成子が従う交換関係が求まります。この形の交換関係はリー代数 (Lie algebra) と呼ばれます。また、(1) から同様に求められます。

$U(N)$ の話に移ります。ここから同じローマ文字の添え字でも Σ を書いていきます。 $N \times N$ ユニタリー行列の集まりを $U(N)$ と表記し、 N 次元のユニタリー群と呼ばれます。 $U(N)$ の行列は

$$U = e^{iH}, \quad U^\dagger U = 1$$

と書けて、 H はエルミート行列です。行列による指数関数はテーラー展開から

$$e^X = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

と定義されています。1 は単位行列です。 H はエルミートなので

$$H_{ii} = H_{ii}^*, \quad H_{ij} = H_{ji}^* \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

このため、 H は N^2 個の独立な実数を持ちます。対角成分は $H_{ii} = H_{ii}^*$ のために N 個の独立な実数を持ち、対角成分以外では $2(N^2 - N)$ 個の実数がありますが (複素数 $a + ib$ には 2 つの実数 a, b があるので 2 倍)、 $H_{ij} = H_{ji}^*$ のために半分に減るので $N^2 - N$ 個の独立な実数を持ちます。よって、合わせれば N^2 個です。

$U(N)$ の行列を

$$U = e^{iH}$$

と書けることを示します。まず、 $N \times N$ ユニタリー行列 U を $N \times N$ ユニタリー行列 V によって

$$U' = VUV^\dagger \tag{2}$$

と変換して、対角化された $N \times N$ ユニタリー行列 U' を作ります。この U' がどうなっているのか見ていきます。ユニタリー行列では、 $U'U'^\dagger = 1$ なので

$$U' = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & & \\ & e^{i\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\alpha_N} \end{pmatrix}$$

という行列であればいいです。 α_i は実数、何も書いていない行列成分は 0 です。これは、 α_i を対角成分として持つ行列 H' を使えば

$$U' = e^{iH'}$$

と書けます (展開すれば一致する)。これを使えば (2) は

$$U = V^\dagger U' V = V^\dagger e^{iH'} V = e^{iH} \quad (H = V^\dagger H' V)$$

ここでの H' は実数の対角行列なので

$$H^\dagger = (V^\dagger H' V)^\dagger = V^\dagger H'^\dagger V = V^\dagger H' V$$

よって

$$H^\dagger = H$$

となり、 H はエルミート行列になります。というわけで、 $N \times N$ ユニタリー行列は、エルミート行列 H を使って

$$U = e^{iH}$$

と書けます。

見てきた $U(N)$ に対して行列式が 1 という条件を加えたのが $SU(N)$ と呼ばれる群です。 $SU(N)$ は N 次元の特殊ユニタリー群 (special unitary group in N dimensions) と呼ばれ、 S は行列式が 1 を指します。 $SU(N)$ でも行列は

$$U = e^{iH}, \quad U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1$$

と書けますが、行列式が 1 であるために H の独立な成分は $N^2 - 1$ 個に変わります。この -1 がどこから出てきたのを見るために、 U の行列式を調べます。 U の行列式は対角化された U' と

$$\det U' = \det(VUV^\dagger) = \det U$$

$$(\det(ABA^{-1}) = \det A \det B \det A^{-1} = \det B)$$

このように行列式は同じなので、対角化されている H' によって

$$\begin{aligned}
\det U = \det U' &= \det e^{iH'} = \det \exp \begin{pmatrix} iH'_{11} & & & \\ & iH'_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & iH'_{NN} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 + iH'_{11} & & & \\ & 1 + iH'_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + iH'_{NN} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & & \\ & e^{i\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\alpha_N} \end{pmatrix} \\
&= e^{i\alpha_1} e^{i\alpha_2} \dots e^{i\alpha_N} \\
&= e^{i(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)} \\
&= \exp[i\text{tr}H'] \\
&= \exp[i\text{tr}(VHV^\dagger)] \\
&= \exp[i\text{tr}H] \quad (\text{tr}AB = \text{tr}BA)
\end{aligned}$$

これは行列式の性質

$$\exp[\text{tr}A] = \det e^A$$

を表わしています。今の場合

$$\det U = \exp[i\text{tr}H]$$

なので、 $\det U = 1$ となるには

$$\text{tr}H = 0$$

でなければいけません。つまり、 $SU(N)$ では H のトレースは 0 です。このため、対角成分の独立な実数の数は 1 つ減ります。

まとめると、 $SU(N)$ の行列は

$$U = e^{iH}, \quad U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1, \quad \text{tr}H = 0$$

と与えられ、 $U(N)$ の部分群 (subgroup) となっています。部分群は、ある群の一部ということです (今の場合は $U(N)$ の集まりの中の行列式が 1 になる集まり)。

$U(N)$ は電磁場での $U(1)$ が主に使われ、 $U(1)$ はスカラーなので特に複雑なことは起きません。なので、ここからは $SU(N)$ を扱います。具体的に $SU(2)$ と $SU(3)$ を見ていきます。

$SU(2)$ では独立なパラメータは $2^2 - 1 = 3$ 個です。 $SU(2)$ の条件からその行列 U は、 a, b を複素数として

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \det U = |a|^2 + |b|^2 = 1$$

と書けます。 $U^\dagger U$ は

$$U^\dagger U = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & 0 \\ 0 & |a|^2 + |b|^2 \end{pmatrix} = 1$$

となっています。これだと 4 個の実数を含みますが、 $a = x_1 + ix_2$, $b = y_1 + iy_2$ は、行列式から

$$x_1 = \sqrt{1 - x_2^2 - y_1^2 - y_2^2}$$

なので

$$a = \sqrt{1 - x_2^2 - y_1^2 - y_2^2} + ix_2$$

となり、 U は 3 個の実数で書けます。

x_1, x_2, y_1, y_2 を微小として 1 次までを残すと、 $a \simeq 1 + ix_2$ となり

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} 1 + ix_2 & y_1 + iy_2 \\ -y_1 + iy_2 & 1 - ix_2 \end{pmatrix} = 1 + ix_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + iy_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + iy_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 1 + ix_2 \sigma_1 + iy_1 \sigma_2 + iy_2 \sigma_3 \\ &= 1 + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \alpha_k \sigma_k \end{aligned} \tag{3}$$

このように、 U にパウリ行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

が現れます。最後に x_2, y_1, y_2 を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ と書き直し、 $1/2$ は後の定義のためにつけています。これは U の 1 次までの展開

$$U = \exp\left[\frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \alpha_k \sigma_k\right] \simeq 1 + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \alpha_k \sigma_k \tag{4}$$

と同じです。というわけで、 $SU(2)$ の行列はパウリ行列によって (3) と書けて、パウリ行列が $SU(2)$ の生成子です。生成子が 3 個なので $SU(2)$ の群の次元は 3 で、生成子は

$$\left. \frac{dU}{d\alpha_j} \right|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_j}{2} e^{i\alpha_k \sigma_k / 2} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\sigma_j}{2}$$

として取り出せます。 α_k が実数なのは、パウリ行列はエルミート行列なので

$$U^\dagger = \exp\left[-\frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \alpha_k^* \sigma_k\right], \quad U^{-1} = \exp\left[-\frac{i}{2} \sum_{k=1}^3 \alpha_k \sigma_k\right]$$

となることから確認できます。

また、トレースが 0 の 2×2 エルミート行列 H で $SU(2)$ の行列は e^{iH} と書けるので

$$U = e^{iH} \simeq 1 + iH = 1 + i \sum_{k=1}^3 \alpha_k \sigma_k$$

から、トレースが 0 の 2×2 エルミート行列はパウリ行列の線形結合で書けるのがわかります (パウリ行列が基底になる)。

$SU(N)$ でも構造は同じで、 $SU(N)$ の行列 U を

$$U = e^{iH(\alpha_k)} \simeq 1 + iH(\alpha_k) = 1 + i \sum_{k=1}^{N^2-1} \alpha_k \lambda_k$$

このように展開したときに現われる $N \times N$ 行列 λ_k が生成子です ($U(N)$ でも同様)。 H はエルミート行列なので λ_i もエルミート行列です。このとき、生成子 λ_i は交換関係として

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i \sum_{k=1}^{N^2-1} c_{ijk} \lambda_k \quad (5)$$

というのをもちます。 c_{ijk} は構造定数 (structure constant) と呼ばれ、一般的に

$$c_{ijk} = -c_{jik}, \quad \sum_{n=1}^{N^2-1} (c_{jkn} c_{nli} + c_{kln} c_{nji} + c_{ljn} c_{nki}) = 0$$

という関係を満たします。この交換関係をリー代数 (Lie algebra) と呼びます。もしくは、 λ_i をリー代数と呼びます。

パウリ行列は、3 つの線形独立なエルミート行列でトレースが 0 なので、 $SU(2)$ のリー代数になります。実際に、パウリ行列の交換関係は

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

ϵ_{ijk} はレヴィ・チビタ記号です。右辺は $k \neq i, j$ でないといけないので、和を省いても同じです。というわけで、 $SU(2)$ での行列は、 ϵ_{ijk} を c_{ijk} に対応させれば

$$U = \exp[i \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\sigma_j}{2}] \quad (6)$$

1/2 は交換関係の右辺の 2 を消すためです。この 2 が煩わしいのでよく

$$S_j = \frac{\sigma_j}{2}$$

として

$$[S_i, S_j] = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} S_k, \quad U = \exp[i \sum_{j=1}^3 \alpha_j S_j]$$

とすることも多いです。

素粒子で重要な $SU(2)$ の性質を出しておきます。 $SU(2)$ の行列 U による変換を、 ϕ を 2×1 行列として

$$\phi \Rightarrow \phi' = U\phi$$

この複素共役を取ると

$$\phi'^* = U^* \phi^*$$

この U の複素共役を

$$U^* = A^{-1} U A$$

という変換で書けるとします。これは $U = e^{iH}$ から

$$U^* = A^{-1} U A = A^{-1} e^{iH} A = e^{-iH^*}$$

なので

$$A^{-1} H A = -H^* \quad (7)$$

$SU(2)$ での U は (6) なので

$$H = \frac{1}{2}(\alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3)$$

$$H^* = \frac{1}{2}(\alpha_1 \sigma_1 - \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3)$$

これを (7) に入れば

$$A^{-1}\sigma_1 A = \sigma_1, \quad A^{-1}\sigma_2 A = -\sigma_2, \quad A^{-1}\sigma_3 A = \sigma_3$$

つまり σ_i と A の交換関係が

$$\sigma_1 A = A \sigma_1, \quad \sigma_2 A = -A \sigma_2, \quad \sigma_3 A = A \sigma_3$$

ここでパウリ行列の関係

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

を考えると、 $A = a\sigma_2$ とできるのが分かります (a は定数)。 a が実数なら A は σ_2 そのものなので $A^\dagger = A^{-1} = A$ というエルミートでユニタリーな行列になります。 a が虚数 i なら A は実数行列 $i\sigma_2$ になります。

$SU(2)$ 変換の複素共役に戻って変形すると

$$\begin{aligned} \phi^* &\Rightarrow \phi'^* = U^* \phi^* \\ &= (A^{-1} U A) \phi^* \\ A \phi'^* &= U A \phi^* = U (A \phi^*) \end{aligned}$$

そして、 $A \phi^*$ が ϕ の $SU(2)$ と同じ変換を受けているとするなら

$$A \phi^* \Rightarrow (A \phi^*)' = U (A \phi^*)$$

と変換されるので

$$A \phi'^* = (A \phi^*)'$$

よって、 $A \phi^*$ は ϕ の $SU(2)$ と同じ変換を受けているのが分かります。 A として $i\sigma_2$ を選べば

$$A \phi^* = i\sigma_2 \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^* \\ -\phi_1^* \end{pmatrix}$$

これは反粒子を扱うときに出てきます。なぜなら、ここでは示しませんが $A \phi^*$ は反粒子の 2 重項の形になっているからです。このため反粒子の 2 重項は粒子の 2 重項と同じ $SU(2)$ 変換を受けます。注意ですが、これは $SU(2)$ の性質であって一般的な $SU(N)$ で成立していません。

今度は $SU(3)$ を見ます。 $SU(3)$ ではパラメータが $3^2 - 1 = 8$ 個必要なので、8 個の 3×3 行列の生成子が出てきます (群の次元は 8)。8 個のうち 3 個は自動的に決められます。 $SU(2)$ は $SU(3)$ より 1 つ行列の次元が下がっているものなので、 $SU(3)$ の部分群になっています。なので、 $SU(3)$ にはパウリ行列が含まれているはずで、 $U(N)$, $SU(N)$ 両方の性質ですが、 $N \times N$ 行列 U_N は $M \leq N$ での $M \times M$ 行列 U_M を使って

$$U_N = \begin{pmatrix} U_M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書けます。ここでの 1 は $(N - M) \times (N - M)$ の単位行列です。このとき

$$U_N = e^{iH_N} = 1 + iH_N$$

なので、 H_N は

$$H_N = \begin{pmatrix} H_M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

つまり、生成子の行列の数を増やすには 0 をくっつければ良いことから、 $SU(3)$ の生成子としてパウリ行列を使えば

$$t_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

残りの 5 個もパウリの行列の拡張で作れます。 σ_1 から

$$t_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

t_4 は σ_1 の配置の真ん中に 0 を置くようにし、 t_6 は右下に σ_1 を置いています。同様に σ_2 からは

$$t_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

残っている t_8 は σ_3 と同じように対角成分だけを持つように作り

$$t_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

これなら t_8 もトレースが 0 になります。係数 $1/\sqrt{3}$ は

$$\text{tr}[t_i t_j] = 2\delta_{ij} \quad (\text{tr}[t_8 t_8] = \frac{1}{3}(1 + 1 + 4) = 2)$$

と規格化するために入れています。このようにして作られた生成子 t_i も交換関係は

$$[t_i, t_j] = 2i \sum_{k=1}^8 f_{ijk} t_k$$

f_{ijk} は添え字の入れ替えで反対称で、地道に計算すれば求まるように、

$$f_{123} = 1, f_{147} = \frac{1}{2}, f_{156} = -\frac{1}{2}, f_{246} = \frac{1}{2}, f_{257} = \frac{1}{2}$$

$$f_{345} = \frac{1}{2}, f_{367} = -\frac{1}{2}, f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

残りは 0 です。また、 $T_i = t_i/2$ とすれば

$$\text{tr}[T_i T_j] = \frac{1}{2} \delta_{ij}, [T_i, T_j] = i \sum_{k=1}^8 f_{ijk} T_k$$

となります。

$t_1, \dots, t_8$ の行列はトレースが 0 なのはすぐに分かりますが、線形独立になっているのかは、線形結合

$$\sum_{i=1}^8 a_i t_i = S$$

を計算して (a_i は行列ではないです)、トレースが 0 のエルミート行列

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & -s_{11} - s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12}^* & s_{22} & s_{23} \\ s_{13}^* & s_{23}^* & -s_{11} - s_{22} \end{pmatrix}$$

の各成分に対応する式を書いて調べれば分かります。これによって、8 個の方程式が出来上がり、8 個の係数 a_i を一意に決められるために、線形独立です。成分に対応する式を書き出して、行列式を計算するだけなので、省略します ($-(s_{11} + s_{22})$ に対する式は s_{11} と s_{22} の式によって決まるので、 $-(s_{11} + s_{22})$ に対する式がなくなって 8 個の式になる)。よって、 $SU(3)$ では

$$U = \exp\left[i \sum_{k=1}^8 \alpha_k \frac{t_k}{2}\right] = \exp\left[i \sum_{k=1}^8 \alpha_k T_k\right]$$

と書けます。

ついでに、カシミール演算子 (Casimir operator) に簡単に触れておきます。カシミール演算子は量子力学の角運動量を扱う時にも出てきているもので、角運動量演算子を J_i としたときに、

$$J^2 = \sum_{i=1}^3 J_i^2$$

と作られていたものに対応します。 J^2 の性質は他の J_i と交換するというものです。このことを今使っている $SU(2)$ の表記に対応させれば

$$S^2 = \left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{2}\right)^2$$

というものが作れます。このとき

$$[S^2, \frac{\sigma_i}{2}] = 0$$

となっています。実際に $(\sigma_i/2 = S_i, [S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k)$

$$\begin{aligned} [S^2, S_i] &= [S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, S_i] \\ &= [S_1^2, S_i] + [S_2^2, S_i] + [S_3^2, S_i] \\ &= S_1[S_1, S_i] + [S_1, S_i]S_1 + S_2[S_2, S_i] + [S_2, S_i]S_2 + S_3[S_3, S_i] + [S_3, S_i]S_3 \\ &= i\epsilon_{1ik}S_1S_k + i\epsilon_{1ik}S_kS_1 + i\epsilon_{2ik}S_2S_k + i\epsilon_{2ik}S_kS_2 + i\epsilon_{3ik}S_3S_k + i\epsilon_{3ik}S_kS_3 \\ &= i \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{jik}(S_jS_k + S_kS_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

最後へは ϵ_{jik} は j, k の交換によって符号が反転することによります。つまり、 S^2 はその群での行列 U 全てと交換するという性質を持ち、そのような演算子をカシミール演算子と呼びます。で、 S^2 が $SU(2)$ でのカシミール演算子です。 $SU(3)$ の場合は2つあって

$$C_1 = \sum_{i=1}^8 (\frac{t_i}{2})^2 = \sum_{i=1}^8 T_i^2, \quad C_2 = \sum_{i,j,k=1}^8 d_{ijk}T_iT_jT_k$$

となっています。 d_{ijk} は対称な係数です ($d_{ijk} = d_{jik} = d_{ikj} = \dots$)。

カシミール演算子と角運動量演算子の話を対応させます。より細かい話は「 $SU(2)$ の表現」でしています。 S^2 は

$$S^2 = (\frac{\sigma_1}{2})^2 + (\frac{\sigma_2}{2})^2 + (\frac{\sigma_3}{2})^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

となり、 S_3 は角運動量 $1/2$ を固有状態に持ちます。そして、 S^2 と S_3 は同時固有状態を持ち、それをスピン $1/2$ の状態 $|1/2; \pm 1/2\rangle$ として

$$\begin{aligned} S^2|1/2; \pm 1/2\rangle &= \frac{3}{4}|1/2; \pm 1/2\rangle \\ S_3|1/2; \pm 1/2\rangle &= \pm \frac{1}{2}|1/2; \pm 1/2\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

このように、 $SU(2)$ は角運動量 $1/2$ の状態に対応します。そうすると、角運動量 1 の状態は $-1, 0, +1$ の状態を持つので、 $SU(3)$ なのかと思えますが、角運動量 1 も $SU(2)$ です。

角運動量 1 は3個の状態があるので 3×3 行列が必要になりますが、今見てきた $SU(2)$ は 2×2 行列です。この 2×2 行列を 3×3 行列に変更したものが角運動量 1 の状態に対応します。これが群論で重要になる部分であり、ここでのように $SU(N)$ を $N \times N$ 行列として与えた話だけをすると混乱を起こす部分です。

$SU(2)$ が作用する対象が何かによって行列は変わり、それを表現 (representation) と言います。今の場合で言えば、角運動量 $1/2$ では 2 次元の対象に作用するので $SU(2)$ の 2 次元表現、角運動量 1 では 3 次元の対象に作用するので 3 次元表現となります (2×2 行列の話だったのに 3 次元になるために混乱しやすい)。このとき、表現を区別するのがカシミール演算子です。角運動量 $1/2$ では $S^2 = 3/4$ 、角運動量 1 では $S^2 = 2$ として、カシミール演算子の値で表現は区別されます。ただし、大抵は (8) のように角運動量の値を表記して区別しています。

ここで見てきた $SU(2)$ は 2 次元表現で、2 次元複素ベクトル空間のベクトルの回転を与えます。細かいことは無視して単純に見ておきます。複素数による 2 個の成分を持つ $z = (z_1, z_2)$ は 4 個の実数パラメータを持つので

$$z_1 = \sqrt{r} e^{i\delta} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad z_2 = \sqrt{r} e^{i\delta} e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2}$$

と書いたとき

$$z^\dagger z = |z_1|^2 + |z_2|^2 = r$$

z にユニタリー行列 U を作用させると

$$(Uz)^\dagger Uz = z^\dagger U^\dagger U z = z^\dagger z = r$$

となり、 r は不変です。よって、長さ r のベクトルの回転変換と言えます。 $SU(2)$ の変換を受ける 2 成分複素ベクトルがスピノールと定義されています。

最後に、 $SU(N)$ の関係を導出なしで載せておきます。同じローマ文字の添え字の和は取るとします。生成子を λ_i とし、 $i = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ です。交換関係は

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i c_{ijk} \lambda_k$$

この時の規格化は

$$\text{tr}[\lambda_i \lambda_j] = \frac{1}{2} \delta_{ij}$$

他にも反交換関係として

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{1}{N} \delta_{ij} + d_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}$$

d_{ijk} は対称な係数です ($d_{ijk} = d_{jik} = d_{ikj} = \dots$)。

完全性は

$$(\lambda_i)_{ab} (\lambda_i)_{cd} = \frac{1}{2} \delta_{ad} \delta_{bc} - \frac{1}{2N} \delta_{ab} \delta_{cd}$$

a, b, c, d は行列成分です。完全性から

$$\begin{aligned}
(\lambda_i)_{ab}(\lambda_i)_{bc} &= \frac{1}{2}\delta_{ac}\delta_{bb} - \frac{1}{2N}\delta_{ab}\delta_{bc} \\
&= \frac{N}{2}\delta_{ac} - \frac{1}{2N}\delta_{ac} \\
&= \frac{N^2 - 1}{2N}\delta_{ac} \\
\text{tr}[\lambda_i\lambda_i] &= \frac{N^2 - 1}{2N}N = \frac{N^2 - 1}{2}
\end{aligned}$$

となっており、非可換ゲージ場ではこのような形をした計算が出てきます。