# $SU(2)$ と表現

$SU(2)$ を使って表現の簡易的な話をします。量子力学の「角運動量演算子」の結果を使っています。
ここではリー群とリー代数の区別を特につけていません。
同じローマ文字の添え字の和を途中から省いています。

$SU(2)$ は 2 次元ベクトル空間 (2 次元複素ベクトル空間) で作用する行列式 1 の $2\times2$ ユニタリー行列の集まりとして作っています。そこに、作用する対象を 2 次元に限定しないとどうなるのかという発想を持ち込みます。つまり、ここでの話は、$N$ 次元ベクトル空間上の行列式が 1 の $N\times N$ ユニタリー行列として与えられている $SU(N)$ が、$M$ 次元ベクトル空間上ではどうなるかです。

この操作を数学的に定義します（無視してもいいです）。群の元 (element) を $g_1, g_2$ とし、それらからある $n$ 次元ベクトル空間 $V$ の線形演算子（行列）への変換を $R$ とします (線形演算子を $V$ から $W$ への線形写像の意味で使っているが、$V$ から $W$ への線形写像は線形変換と言うことが多い)。そのベクトル空間 $V$ での線形演算子 $R(g_1), R(g_2), R(g_1g_2)$ が、その線形演算子の積の規則において

$$R(g_1)R(g_2) = R(g_1g_2)$$

という関係を満たすとします（区別してないが、$g$ での積と $R(g)$ での積が同じ必要はない)。$g_1, g_2$ をそれぞれ変換したものの積は $g_1g_2$ を変換したものと等しいということです。このようにすれば元々持っていた積の性質を変換後も持つことになり、群となります ($R(g_1), R(g_2), R(g_1g_2)$ は同じ群)。このように、ある群 $G$ が変換 $R$ によってベクトル空間 $V$ の線形演算子の群となるとき、$R$ をベクトル空間 $V$ での表現 (representation) と呼びます。表現は変換後のベクトル空間と合わせて定義されるものです。表現は $R$ を指しますが、変換したベクトル空間での線形演算子 $R(g)$ を表現と呼ぶと便利なので区別せずに使っていることもあり、ここでもそうします。

簡単に言えば、ある群がベクトル空間上の線形演算子としてはどうなるかを見るのが表現です。そして、線形演算子は行列にできるので抽象的な群より扱いやすくなります（群の元を、ある群を作る行列にしたのが表現)。

このように表現を定義しましたが、ここではこの定義は特に気する必要がないです。というのも、すでに $SU(2)$ での表現を 1 つ知っていて、「$U(N)$ と $SU(N)$」で求めたパウリ行列による $SU(2)$ の行列は 2 次元ベクトル空間での表現です。なので、これを利用して他の表現を求めます。

また、$SU(N)$ で表現が分かりづらいのはこのせいです。$SU(N)$ の話は「$U(N)$ と $SU(N)$」でもそうしたように、最初に $N$ 次元ベクトル空間上の群として $SU(N)$ を与えますが、それはそのまま表現です（細かく言えば、$SU(N)$ の行列を $A$ とすれば表現 $R$ は $R(A) = A$)。このように、$SU(N)$ のような線形リー群の話では最初に表現 (具体的な生成子の行列) を求め、その表現での説明をします。しかし、ある表現 (ベクトル空間上の行列) を使って群をまず定義するので、何をもって表現としているのかが曖昧になりやすいです。さらに、一般的な群論の話では抽象的な群の定義から表現へ進むので、先に表現を使っている $SU(N)$ の話との対応がしづらくなっています。

ここでは、「$U(N)$ と $SU(N)$」での結果を使って $SU(2)$ での 1 次元、2 次元、3 次元表現を求めます。$SU(2)$ の生成子はパウリ行列で与えられたので、それを一般化します。つまり、生成子を 3 個用意し、それらを $J_1, J_2, J_3$ とし、カシミール演算子は $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ と与えます。生成子はパウリ行列と同じ交換関係

$$[J_a, J_b] = i\sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}J_c$$

を満たすとします。ここで分かるように、量子力学の「角運動量演算子」と同じ話になります。というわけで、$J^2$ と $J_3$ の同時固有ベクトルを $|j;m\rangle$ として

$$J^2|j;m\rangle = j(j+1)|j;m\rangle$$

$$J_3|j;m\rangle = m|j;m\rangle$$

カシミール演算子の固有値 $j(j+1)$ でなく、$j$ で状態の区別を表記しています。$j$ は $j=0,1/2,1,3/2,\dots$ の値を取り、$m$ は $-j\le m\le j$ の範囲の値を持ちます。$J_3$ は対角行列を選ぶことにします (生成子が非対角行列として求められていても、相似変換でどれか 1 つは対角化できる)。

上昇、下降演算子 $J_\pm$ は

$$J_\pm = J_1 + iJ_2$$

で作れて、$J_3$ とは

$$J_3J_\pm|j;m\rangle = (m\pm1)J_\pm|j;m\rangle$$

$J_3$ は

$$J_3|j:m\pm1\rangle = (m\pm1)|j:m\pm1\rangle$$

なので、$J_\pm$ は $m$ を $\pm1$ 動かし、クレブシュ・ゴルダン係数

$$C^\pm_{j,m} = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}$$

によって

$$J_+|j,m\rangle = C^+_{j,m}|j,m+1\rangle \ ,\ J_-|j,m\rangle = C^-_{j,m}|j,m-1\rangle$$

となります。

$J_3$ はエルミート行列なので、その固有ベクトルは直交基底になります。このため、$j$ で指定されたベクトル空間において $m$ で区別された $2j+1$ 個のベクトルは基底になります。つまり、対角化されている生成子の固有ベクトルによって $SU(2)$ が作用する $2j+1$ 次元ベクトル空間の基底を与えます。

これで $SU(2)$ が作用するベクトル空間が用意できたので、この $2j+1$ 次元ベクトル空間の表現を求めます。それらは $2j+1$ 次元表現と呼ばれ、$SU(N)$ の $N$ 次元表現を基本表現 (fundamental representation) と言います。

このように、$SU(N)$ の $N$ は基本表現のベクトル空間の次元を表すもので、全ての表現で $SU(N)$ の行列が $N\times N$ とは言ってません。なので、表現の話では $N$ は生成子の数 $N^2-1$ を表していると思ったほうがいいです ($SU(N)$ の定義は基本表現を指している)。これも群論の話を紛らわしくしていて、例えば $SU(2)$ は $2\times2$ 行列と定義しているのに、$3\times3$ 行列になっても $SU(2)$ と呼び、$SU(2)$ の 2 次元表現、3 次元表現として区別しています。

ここでは $j=0,1/2,1$ での生成子を求めます。$j=0$ では 1 次元です。そして、生成子 $J_1,J_2,J_3$ は 0 なので $SU(2)$ の行列は $e^0=1$ となり、変換としては意味を持たないです。

$j=1/2$ では 2 次元で、$SU(2)$ の 2 次元表現は基本表現です。作用する対象がスピノールなので、スピノール表現と言うこともあります。このときは、すでに生成子がパウリ行列なのが分かっています。パウリ行列の対角行列 $\sigma_3$ は固有値 $\pm1$ の固有ベクトルとして

$$|\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ |\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を持つので

$$J_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$$

残りの生成子もパウリ行列によって

$$J_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 \ , \ J_2 = \frac{1}{2}\sigma_2$$

生成子を exp に乗せることで、$SU(2)$ の基本表現での行列は

$$U = \exp[\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\sigma_k]$$

となり、「$U(N)$ と $SU(N)$」での話と同じになります。

　ここから同じローマ文字の添え字での和は省きます。$U$ は 2 次元複素ベクトル空間のノルムを変えないので、回転行列と言えます。このため、この形より $J_2, J_3$ の方向に対応するオイラー角 $\theta, \phi, \varphi$ を使って、オイラー角による 3 次元回転に対応させて

$$U = \exp[i\phi J_3]\exp[i\theta J_2]\exp[i\varphi J_3]$$

と書き換えていることが多いです。これが $SU(2)$ の $2\times 2$ 行列になっていることを確かめます。

　今は $J_3$ の固有値、固有ベクトルに作用させるので $J_3$ は $m$ になり、残っている $J_2$ 部分を計算すれば回転行列が求まります。なので、$\sigma_2$ 部分を求めます。展開すると

$$\begin{aligned}
\exp[\frac{i}{2}\alpha_2\sigma_2] &= 1 + i\frac{\alpha_2}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}(\frac{\alpha_2}{2}\sigma_2)^2 - \frac{i}{6}(\frac{\alpha_2}{2}\sigma_2)^3 + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\frac{\alpha_2}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2!}(\frac{\alpha_2}{2})^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{3!}(\frac{\alpha_2}{2})^3\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

行列の各成分 $(i, j)$ は

$$\begin{aligned}
&(1,1):\ 1 - \frac{1}{2}(\frac{\alpha_2}{2})^2 + \cdots = \cos\frac{\alpha_2}{2} \\
&(1,2):\ \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{6}(\frac{\alpha_2}{2})^3 + \cdots = \sin\frac{\alpha_2}{2} \\
&(2,1):\ -\frac{\alpha_2}{2} + \frac{1}{6}(\frac{\alpha_2}{2})^3 + \cdots = -\sin\frac{\alpha_2}{2} \\
&(2,2):\ 1 - \frac{1}{2}(\frac{\alpha_2}{2})^2 + \cdots = \cos\frac{\alpha_2}{2}
\end{aligned}$$

なので

$$\exp[\frac{i}{2}\alpha_2\sigma_2]=\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha_2}{2} & \sin\frac{\alpha_2}{2} \\ -\sin\frac{\alpha_2}{2} & \cos\frac{\alpha_2}{2} \end{pmatrix}$$

となり、通常の 2 次元回転行列と同じになります。これと、$\sigma_3$ では

$$\exp[\frac{i}{2}\alpha_3\sigma_3]=\ 1+\frac{i}{2}\alpha_3\sigma_3-\frac{1}{2!}\frac{1}{4}\alpha_3^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{8}\alpha_3^3+\cdots=\begin{pmatrix} e^{i\alpha_3/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_3/2} \end{pmatrix}$$

となることから

$$\begin{aligned}
\exp[i\frac{\phi}{2}\sigma_3]\exp[i\frac{\theta}{2}\sigma_2]\exp[i\frac{\varphi}{2}\sigma_3]&=\begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} & e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} e^{i(\phi+\varphi)/2}\cos\frac{\theta}{2} & e^{i(\phi-\varphi)/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{-i(\phi-\varphi)/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i(\phi+\varphi)/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\qquad (|a|^2+|b^2|=\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}=1)
\end{aligned}$$

これは基本表現での $SU(2)$ の行列の形です。

　また、まとめて展開した場合は、パウリ行列の関係 $\alpha_j\sigma_j\alpha_k\sigma_k=\alpha_k\alpha_k=|\alpha|^2$ ($|\alpha|=\sqrt{\alpha_k\alpha_k}$) と

$$\alpha_k\sigma_k=|\alpha|\frac{\alpha_k\sigma_k}{|\alpha|}$$

を使うことで

$$\begin{aligned}
\exp[\frac{i}{2}\alpha_k\sigma_k]=&\ \exp[i\frac{|\alpha|}{2}\frac{\alpha_k\sigma_k}{|\alpha|}] \\
&=1+i\frac{|\alpha|}{2}\frac{\alpha_k\sigma_k}{|\alpha|}-\frac{1}{2}(\frac{|\alpha|}{2})^2(\frac{\alpha_k\sigma_k}{|\alpha|})^2-i\frac{1}{3!}(\frac{|\alpha|}{2})^3(\frac{\alpha_j\sigma_j}{|\alpha|})^2\frac{\alpha_k\sigma_k}{|\alpha|}+\cdots \\
&=1-\frac{1}{2}(\frac{|\alpha|}{2})^2+\cdots+i\frac{\alpha_k\sigma_k}{|\alpha|}(\frac{|\alpha|}{2}-\frac{1}{3!}(\frac{|\alpha|}{2})^2+\cdots) \\
&=\ \cos\frac{|\alpha|}{2}+i\frac{\alpha_k\sigma_k}{|\alpha|}\sin\frac{|\alpha|}{2} \\
&=\frac{1}{|\alpha|}\begin{pmatrix} |\alpha|\cos\frac{|\alpha|}{2}+i\alpha_3\sin\frac{|\alpha|}{2} & (\alpha_2+i\alpha_1)\sin\frac{|\alpha|}{2} \\ -(\alpha_2-i\alpha_1)\sin\frac{|\alpha|}{2} & |\alpha|\cos\frac{|\alpha|}{2}-i\alpha_3\sin\frac{|\alpha|}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

と求まります。

$j=1$ では 3 次元になります。このときの $J_3$ の固有値は $-1,0,+1$ なので、固有ベクトルを

$$|1;+1\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\ ,\ |1;0\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ |1;-1\rangle=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とすれば、対角行列として

$$J_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$J_1,J_2$ は $J_\pm$ を利用して求められます。クレブシュ・ゴルダン係数は $j=1$ では

$$C^{\pm}_{1,m}=\sqrt{2-m(m\pm1)}$$

なので

$$\begin{aligned}
J_1|1,+1\rangle&=\frac{1}{2}(J_++J_-)|1,+1\rangle=\frac{1}{2}J_-|1,+1\rangle=\frac{1}{2}C^-_{1,1}|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle\\
J_1|1,-1\rangle&=\frac{1}{2}J_+|1,-1\rangle=\frac{1}{2}C^+_{1,-1}|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle\\
J_1|1,0\rangle&=\frac{1}{2}(J_+|1,0\rangle+J_-|1,0\rangle)=\frac{1}{2}C^+_{1,0}|1,1\rangle+\frac{1}{2}C^-_{1,0}|1,-1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle+|1,-1\rangle)
\end{aligned}$$

となり

$$J_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\ ,\ J_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\ ,\ J_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$J_1$ を

$$J_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$$

とすれば

$$a_1=0\ ,\ b_1=1\ ,\ c_1=0\ ,\ a_2=1\ ,\ b_2=0\ ,\ c_2=1\ ,\ a_3=0\ ,\ b_3=1\ ,\ c_3=0$$

と分かるので

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$J_2$ では

$$\begin{aligned}
J_2|1,+1\rangle &= \frac{1}{2i}(J_+ - J_-)|1,+1\rangle = \frac{-1}{2i}J_-|1,+1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \\
J_1|1,-1\rangle &= \frac{1}{2i}J_+|1,-1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \\
J_1|1,0\rangle &= \frac{1}{2i}(J_+|1,0\rangle - J_-|1,0\rangle) = \frac{1}{2i}C^+_{1,0}|1,1\rangle - \frac{1}{2i}C^-_{1,0}|1,-1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|1,1\rangle - |1,-1\rangle)
\end{aligned}$$

なので

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

よって、$SU(2)$ の 3 次元表現の生成子は

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \ , \ J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

これらはエルミート行列なので、exp に乗せれば $SU(2)$ の $3 \times 3$ 行列になります。また、交換関係も

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c$$

となっています。手間は増えますが、同様の手順によってより高い次元での表現も求められます。

$SU(2)$ の 3 次元表現は随伴表現 (adjoint representation) と呼ばれる表現に対応します。随伴表現は、リー代数の交換関係

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

での構造定数 $f_{abc}$ から

$$(L_k)_{ab} = -if_{abk}$$

としたものです。$a, b$ は $L_k$ の行列成分です。$a, b$ は行列成分なので、$SU(2)$ では $f_{abc}$ をレヴィ・チビタ記号 $\epsilon_{abc}$ として

$$(L_1)_{ab} = -i\epsilon_{ab1} \ \Rightarrow \ L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$(L_2)_{ab} = -i\epsilon_{ab2} \ \Rightarrow \ L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(L_3)_{ab} = -i\epsilon_{ab3} \ \Rightarrow \ L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これらは $i$ を外せばはっきりするように、通常の 3 次元回転行列の生成子に対応します。通常の 3 次元ベクトルの回転の形なので、$SU(2)$ の随伴表現はベクトル表現とも呼ばれます。また、$I$ を $3\times 3$ 単位行列として

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = 2I$$

となっているので、カシミール演算子の固有値は

$$\boldsymbol{L}^2 = j(j+1) = 2$$

このため、3 次元回転を受けるベクトル場のスピンは $j=1$ となります。

$L_k$ は先に求めた $J_k$ と異なっていますが、ユニタリー行列

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \ , \ T^{-1} = T^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$$

によるユニタリー変換 $L_k = TJ_kT^{-1}$ で繋がっています。これは基底の選び方の違いでしかないので、3 次元表現と随伴表現は同じ表現 (同じベクトル空間の変換行列) です。$SU(2)$ では全ての表現が (正確には有限次元の既約表現)、この意味で $2j+1$ 次元ベクトル空間の表現と同じになることが示されます。

ユニタリー変換で $\exp[i\alpha_2 J_2]$ を 3 次元回転行列の形にできることは簡単に分かります。$\exp[i\alpha_2 J_2]$ を 2 次元表現のときと同じように展開して

$$\exp[i\alpha_2 J_2] = 1 + i\alpha_2 J_2 - \frac{1}{2!}(\alpha_2 J_2)^2 - \frac{i}{3!}(\alpha_2 J_2)^3 + \frac{1}{4!}(\alpha_2 J_2)^4 + \cdots$$

これの変換は

$$TJ_2J_2\cdots J_2T^{-1} = TJ_2T^{-1}TJ_2T^{-1}T\cdots TJ_2T^{-1} = L_2L_2\cdots L_2$$

から

$$T\exp[i\alpha_2 J_2]T^{-1}=\exp[i\alpha_2 L_2]$$

$L_2$ は 3 次元回転行列を作るので、$T$ によるユニタリー変換で 3 次元回転行列になります。ついでなので、実際にそうなることを具体的に確かめておきます。

$J_2$ は

$$J_2^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\ J_2^3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ J_2^4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=J_2^2$$

なので

$$\begin{aligned}
\exp[i\alpha_2 J_2]&=1+i\alpha_2 J_2-\frac{1}{2!}(\alpha_2 J_2)^2-\frac{i}{3!}(\alpha_2 J_2)^3+\frac{1}{4!}(\alpha_2 J_2)^4+\cdots \\
&=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+i\alpha_2\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad -\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\alpha_2^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\frac{i}{3!}\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2^3\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{4!}\frac{1}{2}\alpha_2^4\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\cdots
\end{aligned}$$

これらの成分は

$$\begin{aligned}
&(1,1):\ 1-\frac{1}{4}\alpha_2^2+\frac{1}{4!}\frac{1}{2}\alpha_2^4+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}\alpha_2^2+\frac{1}{4!}\alpha_2^4-\cdots)=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha_2) \\
&(1,2):\ \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2-\frac{i}{6}\frac{-i2}{2\sqrt{2}}\alpha_2^3+\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_2-\frac{1}{3!}\alpha_2^3+\cdots)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha_2 \\
&(1,3):\ \frac{1}{4}\alpha_2^2-\frac{1}{4!}\frac{1}{2}\alpha_2^4+\cdots=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2!}\alpha_2^2+\frac{1}{4!}\alpha_2^4+\cdots)=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha_2) \\
&(2,2):\ 1-\frac{1}{2}\alpha_2^2+\frac{1}{4!}\alpha_2^4+\cdots=\cos\alpha_2
\end{aligned}$$

残りは同じか符号が変わるだけなので

$$\exp[i\alpha_2 J_2]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\alpha_2 & \sqrt{2}\sin\alpha_2 & 1-\cos\alpha_2 \\ -\sqrt{2}\sin\alpha_2 & 2\cos\alpha_2 & \sqrt{2}\sin\alpha_2 \\ 1-\cos\alpha_2 & -\sqrt{2}\sin\alpha_2 & 1+\cos\alpha_2 \end{pmatrix}$$

となります。$\exp[i\alpha_2 J_2]$ に $T,T^{-1}$ を作用させます。$T$ を左からかけて

$$
T\exp[i\alpha_2 J_2] = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\cos\alpha_2 & \sqrt{2}\sin\alpha_2 & 1-\cos\alpha_2 \\ -\sqrt{2}\sin\alpha_2 & 2\cos\alpha_2 & \sqrt{2}\sin\alpha_2 \\ 1-\cos\alpha_2 & -\sqrt{2}\sin\alpha_2 & 1+\cos\alpha_2 \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2\cos\alpha_2 & -2\sqrt{2}\sin\alpha_2 & 2\cos\alpha_2 \\ -2i & 0 & -2i \\ -2\sin\alpha_2 & 2\sqrt{2}\cos\alpha_2 & 2\sin\alpha_2 \end{pmatrix}
$$

これに $T^{-1}$ を右からかけて

$$
T\exp[i\alpha_2 J_2]T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2\cos\alpha_2 & -2\sqrt{2}\sin\alpha_2 & 2\cos\alpha_2 \\ -2i & 0 & -2i \\ -2\sin\alpha_2 & 2\sqrt{2}\cos\alpha_2 & 2\sin\alpha_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & 0 & -\sin\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_2 & 0 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}
$$

というわけで、$x_1, x_2, x_3$ 軸とすれば $x_2$ 軸周りの 3 次元回転行列です。

**・補足**

少し数学よりの話として、群と表現の簡単な例を示します。群の定義は数学の「群論」を見てください。元を $e, a$ とする集合があり、その演算規則「$\circ$」を

$$
e\circ e = e \ , \ e\circ a = a \ , \ a\circ e = a \ , \ a\circ a = e
$$

と与えます。「$\circ$」に対して $e, a$ だけで構成されているのでこれは群ですが (他の群の定義も満たしている)、この群はリー群ではないです。この段階では $e, a$ が具体的に何なのかはどうでもよく、演算規則が与えられているだけです。これを具体的な $2\times 2$ 行列で表します。

この群からあるベクトル空間の線形演算子への写像を $D$ とし、その線形演算子 $D(e), D(a)$ の演算規則「$\star$」で

$$
D(e)\star D(e) = D(e) \ , \ D(e)\star D(a) = D(a) \ , \ D(a)\star D(e) = D(a) \ , \ D(a)\star D(a) = D(e)
$$

となっていれば、$D(e), D(a)$ は $e, a$ と同じ構造を持ち、表現の定義を

$$
D(e)\star D(e) = D(e\circ e) = D(e)
$$

$$
D(e)\star D(a) = D(e\circ a) = D(a)
$$

$$
D(a)\star D(e) = D(a\circ e) = D(a)
$$

$$
D(a)\star D(a) = D(a\circ a) = D(e)
$$

として満たします。

線形演算子は基底を選べば行列にできるので、2 次元として正規直交基底を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ とします。今の群は、$e$ との積 (「$\circ$」のこと) は $e, a$ をそのままにし、$a$ との積は $e, a$ を $a, e$ にするので、これらを基底ベクトルの変換に当てはめて

$$D(e)\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1 \ , \ D(e)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2$$

$$D(a)\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \ , \ D(a)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1$$

と作用すると考えます ($\boldsymbol{u}_1$ が $e$、$\boldsymbol{u}_2$ が $a$ に対応)。線形演算子に対応する行列 $E, A$ は基底の内積から

$$E_{11} = \boldsymbol{u}_1 \cdot D(e)\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 1$$

$$E_{22} = \boldsymbol{u}_2 \cdot D(e)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 1$$

$$E_{12} = \boldsymbol{u}_1 \cdot D(e)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$$

$$E_{21} = \boldsymbol{u}_2 \cdot D(e)\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$$

$$A_{11} = \boldsymbol{u}_1 \cdot D(a)\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 0$$

$$A_{22} = \boldsymbol{u}_2 \cdot D(a)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$$

$$A_{12} = \boldsymbol{u}_1 \cdot D(a)\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_1 = 1$$

$$A_{21} = \boldsymbol{u}_2 \cdot D(a)\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{u}_2 = 1$$

$E$ は $2 \times 2$ 単位行列なので、それぞれの行列の積は

$$EE = E \ , \ EA = AE = A \ , \ AA = E$$

となり、今の群の演算規則と同じ構造になっています。というわけで、$E, A$ が $e, a$ の表現としての $2 \times 2$ 行列です。