

$SU(3)$ とハドロン

ハドロンの分類と $SU(3)$ の関係を簡単に見ます。クォークモデルの前までの話です。

話が複雑にならないように数学部分を雑に扱っているので注意してください。特に、ルートの説明では複素化の話を無視しています。

添え字の範囲がごちゃごちゃしていますが、同じ添え字では和を取ります。

単語の準備をします。 N 個の生成子を持つリー群があるとします。 N 個の生成子の中で線形独立でお互いに交換する生成子をカルタン生成子 (Cartan generator) と呼び、カルタン生成子の数 $M < N$ 個はリー代数のランク (rank, 階数) と呼ばれます。つまり、生成子の中で

$$[H_i, H_j] = 0$$

となるのがカルタン生成子 H_i ($i = 1, 2, \dots, M$) です。言い換えれば、同時に対角化できる行列です。このようにカルタン生成子だけで交換関係が閉じていて、もとの全ての生成子によるリー代数の一部ということで、この交換関係はカルタン部分代数 (Cartan subalgebra) と呼ばれます。

カルタン生成子の固有値をウェイト (weight) と言います。より細かく言えば、ある表現 R による n 次元ベクトル空間のカルタン生成子 H' (お互いに交換する $n \times n$ 行列) がベクトル $v \neq 0$ に対して

$$H'v = mv$$

となっているとき、 m をウェイトと呼びます。

ここでは $SU(3)$ の随伴表現でのウェイトが必要ですが、ついでの話としてルートから見ていきます。カルタン生成子 H_i と生成子 E が

$$[H_i, E] = \lambda(H_i)E \quad (1)$$

となるとき、右辺のスカラー $\lambda(H_i)$ をルート (root) と呼びます (括弧の H_i は各 H_i での区別のため)。後で分かりますが、ルートは随伴表現でのウェイトと一致します。なので、 $SU(3)$ のルートを求めます。

まず、 $SU(2)$ から見ていきます。 $SU(2)$ でのリー代数はパウリ行列 σ_i ($i = 1, 2, 3$) によって

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k \quad (S_i = \frac{\sigma_i}{2})$$

ϵ_{ijk} ($\epsilon_{123} = +1$) はレヴィ・チビタ記号です。この交換関係から分かるように、交換関係が 0 になるのは S_i 同士的时候了。なので、カルタン生成子は 3 個の中から 1 個だけ選ぶことになります。これはすでに対角行列になっている S_3 を選びます ($SU(2)$ では、3 個の生成子を同時に相似変換したとき 1 個だけを対角行列にできる)。

カルタン生成子を $H = S_3$ 、他の生成子を S_α ($\alpha = 1, 2$) とします。交換関係は

$$\begin{aligned} [H, S_\alpha] &= i\epsilon_{3\alpha\beta}S_\beta & ([H, S_1] &= iS_2, [H, S_2] = -iS_1) \\ [S_1, S_2] &= iH \end{aligned}$$

これらにはルートがないので、 S_1, S_2 の代わりを線形結合から作ります。 $SU(2)$ での (1) の E は、角運動量演算子を知っていればすぐにわかるように (虚数があるために複素ベクトル空間になるので、数学を気にする人は通常の $SU(2)$ のリー代数でなくなることが気になるかもしれませんが、無視します。「リー群の表現」参照)

$$E_1 = E_+ = S_1 + iS_2, \quad E_2 = E_- = S_1 - iS_2$$

とすればいいです (エルミート行列でなくていいが、トレースは 0 の必要がある)。実際に

$$[H, S_1] = iS_2, \quad [H, iS_2] = S_1$$

から

$$\begin{aligned} [H, S_1] \pm [H, iS_2] &= (HS_1 - S_1H) \pm i(HS_2 - S_2H) \\ &= H(S_1 \pm iS_2) - (S_1 \pm iS_2)H \\ &= [H, S_1 \pm iS_2] \end{aligned}$$

となり

$$[H, E_{\pm}] = \pm E_{\pm}$$

なので、 $SU(2)$ のルートは $\lambda = \pm 1$ です。

また、交換関係のエルミート共役を取ると

$$(HE - EH)^{\dagger} = E^{\dagger}H - HE^{\dagger} = -[H, E^{\dagger}]$$

なので

$$[H, E^{\dagger}] = -\lambda E^{\dagger}$$

これは $-\lambda$ がルートになることを示しています。

ルートを明記すると便利なので

$$[H, E_{(\lambda)}] = \lambda E_{(\lambda)}$$

と表記することが多いです。今の場合では $E_{(1)} = E_1$, $E_{(-1)} = E_2$ で、

$$[H, E_{(\lambda)}] = \lambda E_{(\lambda)}, \quad [H, E_{(-\lambda)}] = -\lambda E_{(-\lambda)}$$

と書けます。

(1) での λ を構造定数と見れば、 H, E_{α} によるリー代数です。このため、ヤコビの恒等式

$$[E_\alpha, [E_\beta, H]] + [E_\beta, [H, E_\alpha]] + [H, [E_\alpha, E_\beta]] = 0$$

を満たします (リー代数はヤコビの恒等式を満たすと定義される)。例えば、 $\alpha = 1, \beta = 2$ とすれば、第一項は

$$\begin{aligned} [E_1, [E_2, H]] &= [E_1, [S_1 - iS_2, H]] \\ &= [E_1, [S_1, H] + [-iS_2, H]] \\ &= [E_1, [S_1, H]] + [E_1, [-iS_2, H]] \\ &= [S_1 + iS_2, [S_1, H]] + [S_1 + iS_2, [-iS_2, H]] \\ &= [S_1, [S_1, H]] + [iS_2, [S_1, H]] + [S_1, [-iS_2, H]] + [iS_2, [-iS_2, H]] \\ &= [S_1, [S_1, H]] + [iS_2, -iS_2] + [S_1, S_1] + [iS_2, [-iS_2, H]] \\ &= [S_1, [S_1, H]] - [iS_2, [iS_2, H]] \end{aligned}$$

第二項は

$$\begin{aligned} [E_2, [H, E_1]] &= [E_2, [H, S_1 + iS_2]] \\ &= [E_2, [H, S_1] + [H, iS_2]] \\ &= [E_2, [H, S_1]] + [E_2, [H, iS_2]] \\ &= [S_1 - iS_2, [H, S_1]] + [S_1 - iS_2, [H, iS_2]] \\ &= [S_1, [H, S_1]] + [-iS_2, [H, S_1]] + [S_1, [H, iS_2]] + [-iS_2, [H, iS_2]] \\ &= [S_1, [H, S_1]] - [iS_2, [H, iS_2]] \end{aligned}$$

第三項は

$$\begin{aligned} [H, [E_1, E_2]] &= [H, [E_1, S_1 - iS_2]] = [H, [E_1, S_1] + [E_1, -iS_2]] \\ &= [H, [E_1, S_1]] + [H, [E_1, -iS_2]] \\ &= [H, [S_1 + iS_2, S_1]] + [H, [S_1 + iS_2, -iS_2]] \\ &= [H, [S_1, S_1]] + [H, [iS_2, S_1]] + [H, [S_1, -iS_2]] + [H, [iS_2, -iS_2]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

となっているので、左辺は 0 です。ヤコビの恒等式を変形すると

$$\begin{aligned}
[E_\alpha, [E_\beta, H]] + [E_\beta, [H, E_\alpha]] + [H, [E_\alpha, E_\beta]] &= 0 \\
[H, [E_\alpha, E_\beta]] &= [E_\alpha, \lambda(\beta)E_\beta] - [E_\beta, \lambda(\alpha)E_\alpha] \\
&= \lambda(\beta)[E_\alpha, E_\beta] - \lambda(\alpha)[E_\beta, E_\alpha] \\
&= (\lambda(\alpha) + \lambda(\beta))[E_\alpha, E_\beta]
\end{aligned} \tag{2}$$

$\lambda(1) = +1, \lambda(2) = -1$ としています。これから分かる性質として

- $\lambda(\alpha) + \lambda(\beta) \neq 0$ がルートでない場合
ルートの定義から右辺は 0 なので、 $[E_\alpha, E_\beta] = 0$ 。
- $\lambda(\alpha) + \lambda(\beta) = 0$ の場合
 H と $[E_\alpha, E_\beta]$ は交換し、 H と交換するのは H なので、 $[E_\alpha, E_\beta]$ は H に比例。
- $\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$ が 0 でないルートの場合
 $[E_\alpha, E_\beta]$ は $[H, E'] = (\lambda(\alpha) + \lambda(\beta))E'$ となる E' に比例。

また、ルートによる区別の表記を使うと

$$[H, E_{(\lambda+\rho)}] = (\lambda + \rho)E_{(\lambda+\rho)}$$

と書けて、 $[E_{(\lambda)}, E_{(\rho)}]$ は $E_{(\lambda+\rho)}$ に比例すると言えます。

例えば、 $\lambda(\alpha) + \lambda(\beta) = 0$ となる $\alpha = 1, \beta = 2$ では

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2] &= [S_1 + iS_2, S_1 - iS_2] = [S_1, S_1 - iS_2] + [iS_2, S_1 - iS_2] \\
&= [S_1, S_1] + [S_1, -iS_2] + [iS_2, S_1] + [iS_2, -iS_2] \\
&= -[S_1, iS_2] - [S_1, iS_2] \\
&= -2[S_1, iS_2] \\
&= 2H
\end{aligned}$$

となり、実際に H に比例します。

ルートが随伴表現の固有値になっていることを示します。 E_α を $E_\alpha = U_{\alpha\beta}S_\beta$ とします。 H の交換関係は

$$[H, E_\alpha] = [H, U_{\alpha\beta}S_\beta] = U_{\alpha\beta}[H, S_\beta] = iU_{\alpha\beta}\epsilon_{3\beta\mu}S_\mu \quad (H = S_3)$$

$U_{\alpha\beta}$ は

$$U = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

随伴表現での生成子 $S_i^{(ad)}$ は定義から

$$(S_i^{(ad)})_{ab} = -i\epsilon_{iab} \quad (a, b = 1, 2, 3)$$

なので、 H の随伴表現 $H^{(ad)}$ の成分は $i\epsilon_{3\beta\mu} = -(H^{(ad)})_{\beta\mu}$ です ($(S_i)_{ab}$ は S_i の (a, b) 成分)。そうすると

$$\begin{aligned} [H, E_\alpha] &= \lambda(\alpha) E_\alpha \\ -U_{\alpha\beta}(H^{(ad)})_{\beta\mu} S_\mu &= \lambda(\alpha) U_{\alpha\beta} S_\beta \end{aligned}$$

これから

$$-U_{\alpha\beta}(H^{(ad)})_{\beta\mu} = \lambda(\alpha) U_{\alpha\mu}$$

$(H^{(ad)})_{\beta\mu}$ は反対称なので、転置「 T 」を取れば

$$(H^{(ad)})_{\mu\beta} U_{\beta\alpha}^T = \lambda(\alpha) U_{\mu\alpha}^T$$

$\alpha = 1, 2$ で分けて書くと

$$\begin{aligned} (H^{(ad)})_{\mu\beta} U_{\beta 1}^T S_1 &= \lambda(1) U_{\mu 1}^T S_1 \\ (H^{(ad)})_{\mu\beta} U_{\beta 2}^T S_2 &= \lambda(2) U_{\mu 2}^T S_2 \end{aligned}$$

これらから、

$$U_{\beta 1}^T S_1 = v_\beta(1), \quad U_{\beta 2}^T S_2 = v_\beta(2)$$

v_3 は 0 にすることで 3×3 行列の積として

$$\begin{aligned} H^{(ad)} \mathbf{v}(1) &= \lambda(1) \mathbf{v}(1) \quad (\mathbf{v}(1) = (A_1, iA_1, 0)) \\ H^{(ad)} \mathbf{v}(2) &= \lambda(2) \mathbf{v}(2) \quad (\mathbf{v}(2) = (A_2, -iA_2, 0)) \end{aligned} \tag{3}$$

となるので、 $\lambda(1), \lambda(2)$ は $H^{(ad)}$ の固有値です。また、今の $H^{(ad)}$ を対角化すると (「 $SU(2)$ と表現」参照)

$$H_{\text{diag}}^{(ad)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

なので、 $v(1) = (1, 0, 0)$, $v(2) = (0, 0, 1)$ となります。このように、ルートは随伴表現でのウェイトと一致します。
 というわけで、 $SU(3)$ のルートを求めます。 $SU(3)$ でのリー代数はゲルマン行列 t_a ($a = 1, 2, \dots, 8$) で与えられ

$$[t_a, t_b] = 2if_{abc}t_c$$

ゲルマン行列は

$$\begin{aligned} t_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ t_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ t_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f_{abc} は添え字の入れ替えで反対称で ($f_{abc} = -f_{bac} = -f_{acb} = \dots$)

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \quad f_{147} = \frac{1}{2}, \quad f_{156} = -\frac{1}{2}, \quad f_{246} = \frac{1}{2}, \quad f_{257} = \frac{1}{2} \\ f_{345} &= \frac{1}{2}, \quad f_{367} = -\frac{1}{2}, \quad f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

他は 0 です。交換関係の右辺の 2 を消すために

$$T_a = \frac{1}{2}t_a$$

として

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

$SU(3)$ では対角行列は 2 個あり

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

なので、カルタン生成子は $H_1 = T_3$, $H_2 = T_8$ で、 $[H_1, H_2] = 0$ です。

$SU(3)$ でも $SU(2)$ と同じように H_1, H_2 以外を

$$E_1 = T_1 + iT_2, \quad E_2 = T_6 + iT_7, \quad E_3 = T_4 + iT_5$$

$$E_4 = T_1 - iT_2, \quad E_5 = T_6 - iT_7, \quad E_6 = T_4 - iT_5$$

と作ります。 H_i と E_α の交換関係は

$$\begin{aligned} [H_1, E_1] &= [H_1, T_1] + i[H_1, T_2] \\ &= if_{31a}T_a - f_{32a}T_a \\ &= if_{312}T_2 + if_{314}T_4 + if_{315}T_5 + if_{316}T_6 + if_{317}T_7 + if_{318}T_8 \\ &\quad - f_{321}T_1 - f_{324}T_4 - f_{325}T_5 - f_{326}T_6 - f_{327}T_7 - f_{328}T_8 \\ &= iT_2 + T_1 \\ &= E_1 \end{aligned}$$

E_2 では

$$\begin{aligned} [H_1, E_2] &= [H_1, T_6] + i[H_1, T_7] \\ &= if_{36a}T_a - f_{37a}T_a \\ &= if_{361}T_1 + if_{362}T_2 + if_{364}T_4 + if_{365}T_5 + if_{367}T_7 + if_{368}T_8 \\ &\quad - f_{371}T_1 - f_{372}T_2 - f_{374}T_4 - f_{375}T_5 - f_{376}T_6 - f_{378}T_8 \\ &= -\frac{1}{2}iT_7 - \frac{1}{2}T_6 \\ &= -\frac{1}{2}E_2 \end{aligned}$$

他も同様に求めると

$$\begin{aligned} [H_1, E_1] &= E_1, \quad [H_2, E_1] = 0 \\ [H_1, E_2] &= -\frac{1}{2}E_2, \quad [H_2, E_2] = \frac{\sqrt{3}}{2}E_2 \\ [H_1, E_3] &= \frac{1}{2}E_3, \quad [H_2, E_3] = \frac{\sqrt{3}}{2}E_3 \\ [H_1, E_4] &= -E_4, \quad [H_2, E_4] = 0 \\ [H_1, E_5] &= \frac{1}{2}E_5, \quad [H_2, E_5] = -\frac{\sqrt{3}}{2}E_5 \\ [H_1, E_6] &= -\frac{1}{2}E_6, \quad [H_2, E_6] = -\frac{\sqrt{3}}{2}E_6 \end{aligned}$$

というわけで、 H_1, H_2 それぞれで

$$\begin{aligned}\lambda(H_1; E_1) &= 1, \quad \lambda(H_1; E_2) = -\frac{1}{2}, \quad \lambda(H_1; E_3) = \frac{1}{2} \\ \lambda(H_2; E_1) &= 0, \quad \lambda(H_2; E_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda(H_2; E_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$\lambda(H_i; E_4), \lambda(H_i; E_5), \lambda(H_i; E_6)$ は E_1, E_2, E_3 での符号を反転させたものです。

今のようにカルタン生成子が 2 個あるときでは

$$[H_1, E] = \lambda_1 E, \quad [H_2, E] = \lambda_2 E$$

となる λ_1 と λ_2 の組がルートと定義され、ルートは $(\lambda(H_1; E_\alpha), \lambda(H_2, E_\alpha))$ となります。ウェイトでも同様です。ただし、 $(0, 0)$ はルートとして定義されません。 $SU(3)$ では 6 個のルートがあり、それらを E_α と対応させて

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (\lambda(H_1; E_1), \lambda(H_2, E_1)) = (1, 0) \\ \lambda_2 &= (\lambda(H_1; E_2), \lambda(H_2, E_2)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \lambda_3 &= (\lambda(H_1; E_3), \lambda(H_2, E_3)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \lambda_4 &= (\lambda(H_1; E_4), \lambda(H_2, E_4)) = -\lambda_1 \\ \lambda_5 &= (\lambda(H_1; E_5), \lambda(H_2, E_5)) = -\lambda_2 \\ \lambda_6 &= (\lambda(H_1; E_6), \lambda(H_2, E_6)) = -\lambda_3\end{aligned}$$

とします。

数が増えただけで $SU(2)$ と構造は同じなので (2),(3) は $SU(3)$ でも出てきます。カルタン生成子が 2 個、 E_α が 6 個になっただけなので、ヤコビの恒等式を満たし

$$[E_\alpha, [E_\beta, H_i]] + [E_\beta, [H_i, E_\alpha]] + [H_i, [E_\alpha, E_\beta]] = 0$$

i は 1, 2、 α, β は 1 から 6 です。変形すれば

$$\begin{aligned}[H_i, [E_\alpha, E_\beta]] &= [E_\alpha, \lambda(i; \beta)E_\beta] - [E_\beta, \lambda(i; \alpha)E_\alpha] \\ &= \lambda(i; \beta)[E_\alpha, E_\beta] - \lambda(i; \alpha)[E_\beta, E_\alpha] \\ &= (\lambda(i; \alpha) + \lambda(i; \beta))[E_\alpha, E_\beta]\end{aligned}$$

となり、(2) と同じになります。 $\lambda(H_i; \alpha)$ を $\lambda(i; \alpha)$ としています。ルートは

$$(\lambda(1; \alpha) + \lambda(1; \beta), \lambda(2; \alpha) + \lambda(2; \beta)) = (\lambda(1; \alpha), \lambda(2; \alpha)) + (\lambda(1; \beta), \lambda(2; \beta)) = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$$

となります。例えば、 E_1 と E_4 では

$$\begin{aligned}
[T_1 + iT_2, T_1 - iT_2] &= [T_1, T_1] + [T_1, -iT_2] + [iT_2, T_1] + [iT_2, -iT_2] \\
&= -2i[T_1, T_2] \\
&= 2f_{12a}T_a \\
&= 2f_{123}T_3 \\
&= 2H_1
\end{aligned}$$

となり、 H_1 に比例します。これは E_1, E_4 のルート λ_1, λ_4 の和が

$$\lambda_1 + \lambda_4 = (1, 0) + (-1, 0) = (0, 0)$$

となるからです。 E_3, E_5 では

$$\begin{aligned}
[E_3, E_5] &= [T_4 + iT_5, T_6 - iT_7] \\
&= [T_4, T_6 - iT_7] + [iT_5, T_6 - iT_7] \\
&= [T_4, T_6] + [T_4, -iT_7] + [iT_5, T_6] + [iT_5, -iT_7] \\
&= [T_4, T_6] - i[T_4, T_7] + i[T_5, T_6] + [T_5, T_7] \\
&= if_{46a}T_a + f_{47a}T_a - f_{56a}T_a + if_{57a}T_a \\
&= if_{462}T_2 + f_{471}T_1 - f_{561}T_1 + if_{572}T_2 \\
&= i\frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_1 + i\frac{1}{2}T_2 \\
&= T_1 + iT_2 \\
&= E_1
\end{aligned}$$

となり、 E_1 になります。これは E_3, E_5 でのルートから

$$\lambda_3 + \lambda_5 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (1, 0) = \lambda_1$$

となり、ルートになるためです。ルートの値を書いた表記を使えば

$$[E_3, E_5] = [E_{(1/2, \sqrt{3}/2)}, E_{(1/2, -\sqrt{3}/2)}] \propto E_{(1, 0)} = E_1$$

となります。

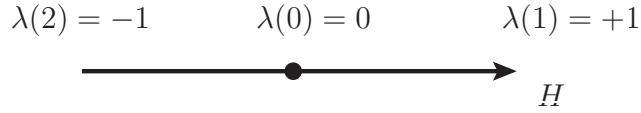


図 1: $SU(2)$ のウェイト図

(3) も数が増えるだけで同じように求められるので (H を H_i にして E_α の添え字の範囲を 1 から 6 にすればいい)、 $SU(3)$ でもルートは随伴表現のウェイトです。というわけで、随伴表現のウェイトが求まりました。今はだいぶ雑にルートを扱いましたが、リー代数の数学をまともにやるならルートは重要です。

準備が終わったのでウェイトとハドロンを対応させる話に移ります。 $SU(2)$ のルートは ± 1 ですが、随伴表現での固有値としては 0 もいるので、随伴表現のウェイトは $\pm 1, 0$ です。実際に、随伴表現 (4) での固有値、固有ベクトルは、 $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ によって

$$H_{\text{diag}}^{(ad)} v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

$$H_{\text{diag}}^{(ad)} v_2 = 0$$

$$H_{\text{diag}}^{(ad)} v_3 = -v_3$$

となります。これらは図 1 のように書かれ、ウェイト図と呼ばれます。

$SU(3)$ でも同様に図にします。 $SU(3)$ での随伴表現のウェイトは

$$\lambda_1 = (1, 0), \lambda_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \lambda_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \lambda_4 = -\lambda_1, \lambda_5 = -\lambda_2, \lambda_6 = -\lambda_3$$

座標上の点を λ_α で与えることで、図 2 になります。今は固有値として求めていないのではっきりしないですが、 $(0, 0)$ となる固有値が 2 個あるので、原点は 2 重に丸を書いています ($(0, 0)$ はルートとして定義されない)。

ここで素粒子の話を持ち込みます。そのために、ハドロン (hadron) の歴史に触れつつ単語を説明していきます。

まず、1918 年に陽子 (proton)、1932 年に中性子 (neutron) が発見されます。陽子と中性子をまとめて核子 (nucleon) と呼び、核子間で働く引力を核力 (Nuclear force) と呼びます。核力は、陽子は正の電荷を持つために陽子間ではクーロン力によって反発してしまい原子核を構成できないので、それに対抗する引力の存在が必要になるために導入されました。

1935 年に湯川秀樹は、核力はスピン 0 の粒子の交換で生じるとし、そのスピン 0 の粒子 (ボソン) をメソン (meson, 中間子) と呼びました。実験では 1947 年に宇宙線から観測され、 $140[\text{MeV}]$ の質量を持ち、メソンでなくパイオン (pion, パイ中間子) と名付けられました。パイオンは核子間を媒介するので電荷の保存から、陽子から中性子なら負、中性子から陽子なら正の電荷を運び、陽子間や中性子間なら電荷の変化はないです。なので、メソンは電荷が $0, \pm 1$ の 3 種類がいて、 π^+, π^-, π^0 と表記されます。ついでに、陽子は p 、中性子は n と表記します。

陽子、中性子、パイオンに働く相互作用は、電磁相互作用を基準にすれば、 10^2 程度強いです。この領域の強さの相互作用は強い相互作用 (strong interaction) と名付けられ、この強い相互作用に関わる粒子をハドロンと呼びます。ハドロンの分類として、フェルミオンならバリオン (baryon)、ボソンならメソン (meson) として分けられました。陽子と中性子はバリオン、パイオンはメソンです。

ハドロンの性質を説明するための量子数として、電荷 Q 、アイソスピン I 、バリオン数 B が与えられました。アイソスピン I は、陽子と中性子は質量がほぼ等しく、原子核内での力の作用にも違いがないために、陽子と中性子を区別する量として導入されました。アイソスピンの第三成分を I_3 として、陽子は $I_3 = +1/2$ 、中性子は

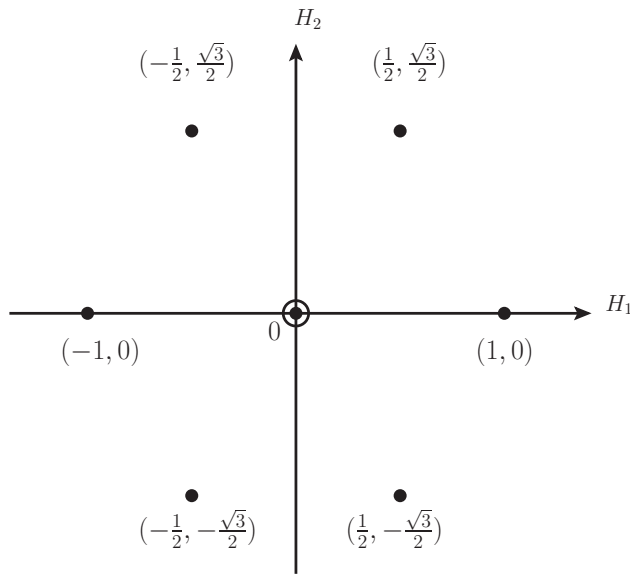


図 2: $SU(3)$ のウェイト図

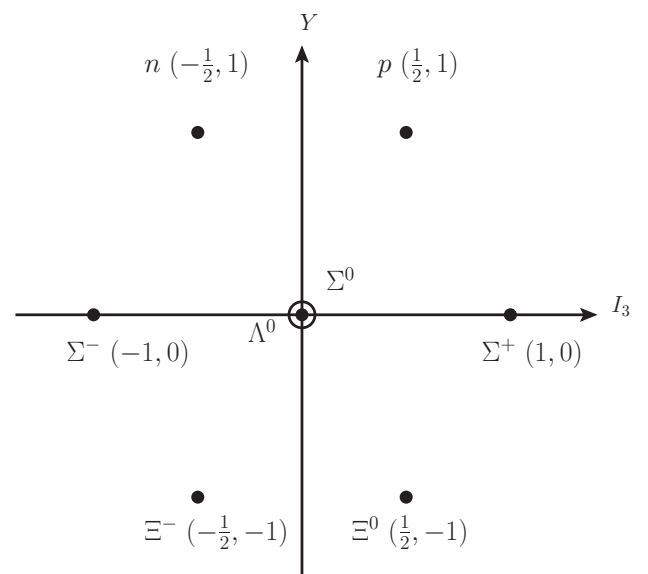


図 3: バリオンによる図

$I_3 = -1/2$ です ($I = 1/2$)。パイオンにはアイソスピン $I = 1$ が与えられ、 $\pi^\pm$ では $I_3 = \pm 1$ 、 π^0 では $I_3 = 0$ です。陽子と中性子のアイソスピンは $SU(2)$ の基本表現 (2 次元表現)、パイオンは随伴表現 (3 次元表現) に対応します (スピン $1/2$ 、スピン 1 と同じ構造)。

また、陽子と中性子の電荷の違いが核力の性質と関係ないことを荷電独立性と言います。

バリオン数 B はハドロンの崩壊現象において陽子の数は変化しないことから導入された量で、陽子と中性子では $B = +1$ 、パイオンでは $B = -1$ と与えます。

これらによって、各ハドロンの電荷 Q とは

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B$$

という関係を持ちます。具体的な値は下の表を見てください。

ちなみに、ハドロンはクォークが導入されるまで素粒子と考えられていました。そして、現在ではクォーク間の相互作用も強い相互作用と呼ばれ、ハドロン間の強い相互作用はその 2 次的に生じる力と考えられていますが、はっきりとはわかっていません。

1940 年代後半から 1950 年代にかけて状況が変わっていきます。新しいハドロンとしてハイペロン (hyperon) と呼ばれる、核子より重いバリオンが発見されます。それぞれ、ラムダ粒子、シグマ粒子、グザイ粒子と名付けられました。さらに、メソンのケイオン (Kaon) も見つかります。これらは記号で Λ, Σ, Ξ, K と表記され、パイオンと同じように電荷に対応して $\pm, 0$ を付けて表記されます。シグマ粒子は $\Sigma^\pm, \Sigma^0$ 、ラムダ粒子は中性で Λ^0 、グザイ粒子は $\Xi^\pm, \Xi^0$ 、ケイオンは $K^\pm, K^0$ に加えて $\bar{K}^0$ がいます。ケイオンは、中性の K^0 の反粒子が別の粒子 $\bar{K}^0$ になっています。

そして、問題も起こりました。パイオン π^- と陽子 p の散乱は Λ^0 と K^0 を作り、これは強い相互作用の計算と合います。そして、 Λ^0 は π^- と p に崩壊し、 K^0 は π^+ と π^- に崩壊し、これは弱い相互作用の計算と合います。このように、弱い相互作用にも関わるハドロンが現れました。

このため、強い相互作用と弱い相互作用の区別のための量子数が 1953 年にゲルマンと西島によって新しく導入され、ストレンジネス (strangeness) と呼ばれます。ストレンジネス S は強い相互作用では保存し、弱い相互作用では保存しないように割り当てられます。今の Λ^0 と K^0 の反応で言えば、それぞれのストレンジネスを

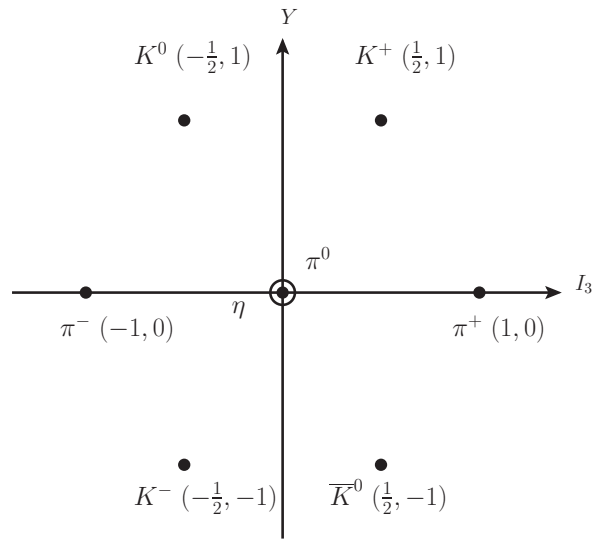


図 4: メソンによる図

$$\pi : S = 0$$

$$p : S = 0$$

$$\Lambda^0 : S = -1$$

$$K^0 : S = +1$$

とすることで

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 \Leftrightarrow S = 0 \rightarrow S = 0$$

$$\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p \Leftrightarrow S = -1 \rightarrow S = 0$$

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \Leftrightarrow S = +1 \rightarrow S = 0$$

となり、弱い相互作用の崩壊では S は保存せず、強い相互作用の散乱では S は保存します。
ストレンジネスの導入によって、電荷に対して

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2}$$

という関係が成立することになり、中野・西島・ゲルマンの関係と呼ばれます。 $Y = B + S$ をハイパー荷 (hypercharge) と呼びます。

このようにハドロンの数が増えたことで、それらの分類方法が作りだされます。1961 年に、見つかっている 8 個のバリオンの I_3 と Y を $SU(3)$ の随伴表現のウェイトに当てはめ、7 個のメソンはウェイトの 1 部分に当てはめるといことが、ゲルマンとネーマン (Ne'man) によって行われました。これを八道説 (eightfold way) と言います。ウェイトとの対応は、

$$H_1 = T_3 = I_3, \quad H_2 = T_8 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y$$

で与えられ、図 3,4 になります (原点に 2 個の粒子がいるのは、固有値が 2 個いるため)。8 個目のメソンである η メソン (イータ中間子) は 1961 年に発見されています。バリオンとメソンの Q, I_3, S, Y をまとめると

・バリオン ($B = +1$)

	Q	I_3	S	Y	質量 (MeV)
p	+1	+1/2	0	+1	938
n	0	-1/2	0	+1	939
Σ^-	-1	-1	-1	0	1197
Σ^0	0	0	-1	0	1193
Σ^+	+1	+1	-1	0	1189
Ξ^-	-1	-1/2	-2	-1	1321
Ξ^0	0	+1/2	-2	-1	1315
Λ^0	0	0	-1	0	1115

・メソン ($B = 0$)

	Q	I_3	S	Y	質量 (MeV)
π^-	-1	-1	0	0	140
π^0	0	0	0	0	135
π^+	+1	+1	0	0	140
K^-	-1	-1/2	-1	-1	494
$\bar{K}^0$	0	+1/2	-1	-1	498
K^0	0	-1/2	+1	+1	498
K^+	+1	+1/2	+1	+1	494
η	0	0	0	0	549

1961 年頃にはハドロンは他にいくつも見つっていますが、それらの多くは非常に寿命が短いために (10^{-23} 秒程度)、resonances と呼ばれていました。ゲルマンとネーマンは resonances を $SU(3)$ の 10 次元表現でのウェイトに当てはめることで未発見であったオメガ粒子 Ω^- (バリオン) を予想し、1964 年に実験で確認されました (Ω^- の寿命は長く、 10^{-11} 秒程度)。

しかし、なぜハドロンがこのように群論で分類されるのかまでは分からなく、それは後のクォークモデルによって説明されました。

$SU(3)$ の基本表現とクォークにも簡単に触れておきます。クォークがどう導入されたかは「クォークモデル」を見てください。基本表現はゲルマン行列で、それらはエルミート行列なので対角成分がそのまま固有値になります。一応求めておくと、 λ を固有値、 I を単位行列として

$$\det[H_i - \lambda I] = 0$$

から、 H_i の固有値 λ は

$$H_1 : (1 - 2\lambda)(1 + 2\lambda)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}, 0$$

$$H_2 : (1 - 2\sqrt{3}\lambda)^2(-2 - 2\sqrt{3}\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

固有ベクトルは $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$ で与えられ

$$\begin{aligned}
H_1 v_1 &= \frac{1}{2} v_1, \quad H_2 v_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} v_1 \\
H_1 v_2 &= -\frac{1}{2} v_2, \quad H_2 v_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} v_2 \\
H_1 v_3 &= 0, \quad H_2 v_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}} v_3
\end{aligned}$$

これらによって $SU(3)$ の基本表現のウェイト図が書けますが、ハドロンとは対応しません。しかし、現在ではクォークを当てはめて、 v_1 のウェイトは u 、 v_2 では d 、 v_3 では s を対応させます。 u はアップクォーク、 d はダウンクォーク、 s はストレンジクォークです。それが図 5 です。クォークの Q, I_3, S, B は

	Q	I_3	S	B	Y
u	$+2/3$	$+1/2$	0	$1/3$	$1/3$
d	$-1/3$	$-1/2$	0	$1/3$	$1/3$
s	$-1/3$	0	-1	$1/3$	$-2/3$

反クォークは反粒子なので、クォークでの Q, I_3, S, B が反転します。これらは、基本表現でのカルタン生成子を $H'_i = -H_i^*$ とした表現で与えられます。これは $SU(3)$ の複素共役です。 $SU(3)$ は A をエルミート行列として e^{iA} なので、その複素共役は $(e^{iA})^* = e^{-iA^*}$ となり、生成子は $A' = -A^*$ となるからです。今の H_i は符号が反転するだけで

$$\begin{aligned}
H'_1 v_1 &= -\frac{1}{2} v_1, \quad H'_2 v_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} v_1 \\
H'_1 v_2 &= \frac{1}{2} v_2, \quad H'_2 v_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} v_2 \\
H'_1 v_3 &= 0, \quad H'_2 v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_3
\end{aligned}$$

これらから図 6 になります。反クォークは $\bar{u}$ のように表記しています。このようにクォークと反クォークを設定することで、クォークモデルは作られます。

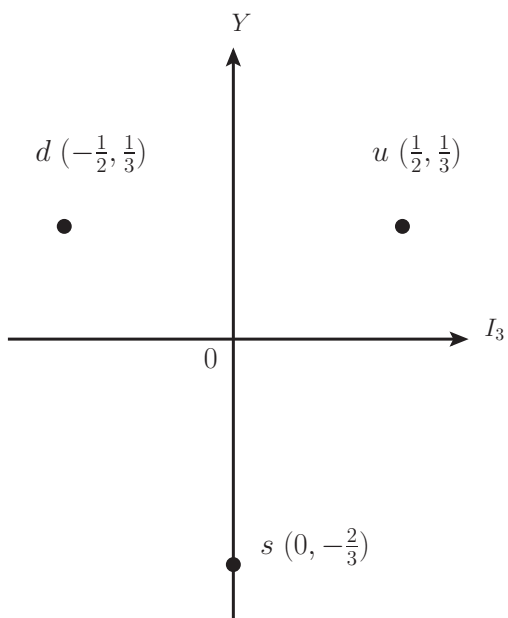


図 5: クォークによる図

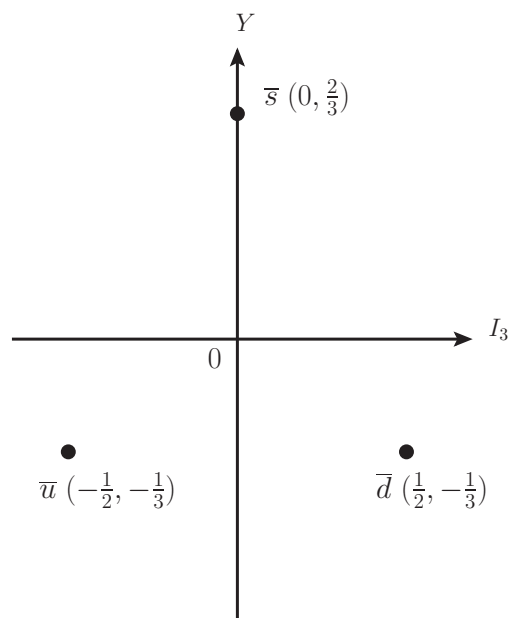


図 6: 反クォークによる図