

ϕ^4 理論とイジングモデル

格子を使ったモデルを場の理論へと変更する例として、イジングモデルを近似を使って変形していくと ϕ^4 理論が出てくることを示します。これは statistical field theory と呼ばれる分野で出てきます。

ひたすら変形しているだけなので興味のない人は飛ばして良いです。

和の記号は書くようにしていますが、たまに文字が同じ添え字の場合は和の記号を省いています。省いている場合は 1 から N の和です。

ボルツマン定数 k_B は 1、温度を T 、 β は $\beta = 1/T$ とします。

D 次元ユークリッド空間において N 個の格子点を間隔 a で並べ (1 次元なら列、2 次元なら正方形、3 次元なら立方体)、そこにスピンを配置したときのイジングモデルのハミルトニアンは (統計力学の「イジングモデル」参照)

$$H = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^N \sigma_i$$

σ_i は i 番目の格子点上のスピンで ± 1 、 h は外部磁場です。 (i,j) は隣り合っている格子点の和を取ることを意味しています。しかし、まずは第一項を隣り合っている格子点とせずに

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i$$

とします。 J_{ij} は $N \times N$ 対称行列 ($J_{ij} = J_{ji}$) で $i = j$ では 0 とします (同じ格子点での $\sigma_i \sigma_i$ の項はない)。 J_{ij} を対称行列としているように、 $\sigma_i \sigma_j$ と $\sigma_j \sigma_i$ は同じとして $1/2$ で割っています。 h_i は $h_i = h$ ($i = 1, \dots, N$) です。

これによる分配関数は

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp\left[\frac{\beta}{2} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i \sigma_j + \beta h \sum_{i=1}^N \sigma_i\right] = \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right]$$

$\boldsymbol{\sigma}$ は $1 \times N$ 行列、添え字の T は転置を表します。 σ_1 から σ_N の和は $\{\sigma_i\}$ としてまとめ、 $\mathbf{J}, \mathbf{h}$ に $\beta = 1/T$ (T は温度) を含ませることにします。

分配関数を経路積分の形にします。そのために、多変数のガウス積分

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_N \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}\right] &= \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \cdots dx_N \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{b}\right] &= \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \mathbf{A}}} \exp\left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}\right] \end{aligned}$$

を使います。 $\mathbf{x}$ は $N \times 1$ 行列、 $\mathbf{A}$ は $N \times N$ 対称行列、 $\mathbf{b}$ は $N \times 1$ 行列です。そうすると

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{1}{2} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}\right] &= \sqrt{\det \mathbf{A}} \int \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}} \cdots \frac{dx_N}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{b}\right] \\ &= \frac{\int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{b}\right]}{\int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}\right]} \quad \left(\int \mathcal{D}x = \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi}}\right) \end{aligned}$$

経路積分と同じ $\mathcal{D}x$ で書いていますが N を無限大の極限にしていまません。これをイジングモデルに合わせることで、分配関数は

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{\{\sigma_i\}} \exp[-\beta H] \\
&= \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right] \\
&= \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}\right] \exp[\mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}] \\
&= \frac{\int \mathcal{D}x \sum_{\{\sigma_i\}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\sigma}\right] \exp[\mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}]}{\int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{J}}} \int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right] \sum_{\{\sigma_i\}} \exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma}] \quad (\det \mathbf{M} = \frac{1}{\det[\mathbf{M}^{-1}]}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{J}}} \int \mathcal{D}x \exp[-S]
\end{aligned}$$

として、経路積分の形になります。また、 $\exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma}]$ の部分は (統計力学の「イジングモデル」参照)

$$\begin{aligned}
\sum_{\{\sigma_i\}} \exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma}] &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \exp\left[\sum_{i=1}^N (h + x_i) \sigma_i\right] \\
&= \prod_{i=1}^N (2 \cosh(h + x_i)) \\
&= \exp\left[\sum_{i=1}^N \log[2 \cosh(h + x_i)]\right]
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right] \sum_{\{\sigma_i\}} \exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma}] \\
&= \int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^N \log[2 \cosh(h + x_i)]\right] \\
&= \int \mathcal{D}x \exp[-S]
\end{aligned} \tag{1}$$

と出来ます。

導入された x_i に意味を与えます。経路積分と同じように

$$Z(y) = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{J}}} \int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right] \sum_{\{\sigma_i\}} \exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}^T \mathbf{y}] \tag{2}$$

のように新しく y を導入します。 x 積分を実行すると $Z(y)$ は

$$\begin{aligned}
& \sum_{\{\sigma\}} \int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right] \exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}^T \mathbf{y}] \\
&= \sum_{\{\sigma\}} \exp[\mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}] \int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right] \exp[\mathbf{x}^T (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{y})] \\
&= \sum_{\{\sigma\}} \exp[\mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}] \sqrt{\det \mathbf{J}} \exp\left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{y}^T) \mathbf{J} (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{y})\right] \\
&= \sum_{\{\sigma\}} \sqrt{\det \mathbf{J}} \exp\left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{y}^T) \mathbf{J} (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{y}) + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right]
\end{aligned}$$

から

$$Z(\mathbf{y}) = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left[\frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{y}^T) \mathbf{J} (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{y}) + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right] \quad (3)$$

となります。

(2) を y_i で微分して、 $\mathbf{y} = 0$ にすると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z(\mathbf{y})}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}=0} &= \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{J}}} \frac{\partial}{\partial y_i} \int \mathcal{D}x \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right] \sum_{\{\sigma_i\}} \exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}^T \mathbf{y}] \Big|_{\mathbf{y}=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{J}}} \int \mathcal{D}x \ x_i \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right] \sum_{\{\sigma_i\}} \exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma}] \Big|_{\mathbf{y}=0} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{J}}} \int \mathcal{D}x \ x_i \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x}\right] \sum_{\{\sigma_i\}} \exp[(\mathbf{h}^T + \mathbf{x}^T) \boldsymbol{\sigma}] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{J}}} \int \mathcal{D}x \ x_i \exp[-S]
\end{aligned}$$

として、元の Z に x_i が含まれた積分として出てきます。これを $Z = Z(\mathbf{y} = 0)$ で割れば

$$\frac{1}{Z} \frac{\partial Z(\mathbf{y})}{\partial y_i} \Big|_{\mathbf{y}=0} = \frac{\int \mathcal{D}x \ x_i \exp[-S]}{\int \mathcal{D}x \ \exp[-S]}$$

となり、経路積分での x_i の期待値 $\bar{x}_i$ を与える形と同じになります。

これに対して、(3) を y_i で微分してみると (同じ添え字での和の記号を省いています)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=0} &= \sum_{\{\sigma\}} \frac{\partial}{\partial y_i} \exp\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{y}^T)\mathbf{J}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{y}) + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right] \Big|_{y=0} \\
&= \sum_{\{\sigma\}} \frac{\partial}{\partial y_i} \exp\left[\frac{1}{2}(\sigma_j + y_j)J_{jk}(\sigma_k + y_k) + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right] \Big|_{y=0} \\
&= \sum_{\{\sigma\}} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{2}(J_{ij}\sigma_j + \sigma_j J_{ji}) \exp\left[\frac{1}{2}(\sigma_j + y_j)J_{jk}(\sigma_k + y_k) + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right] \Big|_{y=0} \\
&= \sum_{\{\sigma\}} \frac{1}{2}(J_{ij}\sigma_j + \sigma_j J_{ji}) \exp\left[\frac{1}{2}(\sigma_j + y_j)J_{jk}(\sigma_k + y_k) + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right] \Big|_{y=0} \\
&= \sum_{\{\sigma\}} (\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma})_i \exp\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{h}^T \boldsymbol{\sigma}\right] \quad (J_{ij} = J_{ji}) \\
&= \sum_{\{\sigma\}} (\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma})_i \exp[-\beta H] \\
\frac{1}{Z} \frac{\partial Z(y)}{\partial y_i} \Big|_{y=0} &= \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} (\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma})_i \exp[-\beta H]
\end{aligned}$$

なので、これは統計力学での期待値 $\langle (\mathbf{J}\boldsymbol{\sigma})_i \rangle$ です。

どちらも同じ計算をしているので

$$\bar{x} = \langle \mathbf{J}\boldsymbol{\sigma} \rangle$$

となります。スピンの $\langle \sigma_i \rangle$ は磁化 m と定義され、 $\mathbf{J}$ は期待値の計算とは無関係なので

$$\begin{aligned}
\bar{x}_i &= \sum_{j=1}^N \langle J_{ij}\sigma_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^N J_{ij} \langle \sigma_j \rangle \\
\sum_{i=1}^N J_{ki}^{-1} \bar{x}_i &= \sum_{i,j=1}^N J_{ki}^{-1} J_{ij} \langle \sigma_j \rangle \\
\sum_{j=1}^N J_{ij}^{-1} \bar{x}_j &= \langle \sigma_i \rangle \\
\bar{\phi}_i &= m \quad (\phi_i = \sum_{j=1}^N J_{ij}^{-1} x_j)
\end{aligned}$$

として、 $\bar{x}_i$ から磁化に対応する ϕ_i を導入できます。 ϕ_i の添え字の i は格子点を指定するものなので ϕ_i は変数として格子点の位置を持っています。

(1) を ϕ_i に書き換えて

$$Z = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp[-S[\phi]]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[-\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{J}\boldsymbol{\phi}]} = \sqrt{\det \mathbf{J}} \int \mathcal{D}\phi \exp[-S[\phi]] \quad (\boldsymbol{\phi} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{x}, \quad d\phi_i = J_{ij}^{-1} dx_j)$$

$\sqrt{\det \mathbf{J}}$ は定数で、行列式の関係

$$\det \mathbf{J} = \exp[\text{tr} \log \mathbf{J}]$$

から、 $\exp[-S]$ の定数部分に入れることが出来ます。なので、 $\sqrt{\det \mathbf{J}}$ は無視します。 $S[\phi]$ は

$$S[x] = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \log[2 \cosh(h + x_i)] \Rightarrow S[\phi] = \frac{1}{2} \phi^T \mathbf{J} \phi - \sum_{i=1}^N \log[2 \cosh(h + J_{ij} \phi_j)]$$

β を $\mathbf{J}, h$ から分離させて書けば

$$S[\phi] = \frac{\beta}{2} \phi_i J_{ij} \phi_j - \sum_{i=1}^N \log[2 \cosh(\beta h + \beta J_{ij} \phi_j)] \quad (4)$$

同じ文字の添え字では和を 1 から N で取ります。今の分配関数は離散的なスピン σ_i の和でなく、連続的な ϕ_i の積分になっています。この Z から ϕ_i の期待値 $\bar{\phi}_i$ を求めれば、それは磁化 m そのものとなります。しかし、対数や $\cosh$ があるために、この形は非常に厄介です。なので、近似によって簡単な形します。

厄介な対数部分を $\cosh$ の中身が小さいとして展開します。対数と $\cosh$ の展開の形から

$$\log[2 \cosh \theta] = \log 2 + \log[1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots] = \log 2 + \frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{12} + \dots$$

なので

$$\begin{aligned} S[\phi] &\simeq \frac{\beta}{2} \phi_i J_{ij} \phi_j - \sum_{i=1}^N (\log 2 + \frac{\beta^2}{2} (h + J_{ij} \phi_j)^2 - \frac{\beta^4}{12} (h + J_{ij} \phi_j)^4) \\ &= -N \log 2 + \frac{\beta}{2} \phi_i J_{ij} \phi_j - \frac{\beta^2}{2} \sum_{i=1}^N (h + J_{ij} \phi_j)^2 + \frac{\beta^4}{12} \sum_{i=1}^N (h + J_{ij} \phi_j)^4 \end{aligned} \quad (5)$$

とします。

次に ϕ_i をフーリエ展開します。ここで、周期的境界条件を加えることにします。格子の間隔は a 、 D 次元の各軸方向の長さは L とし、体積は $V = L^D = a^D N$ とします。周期的境界条件なので、各方向に L 進んだら元に戻るとします。 ϕ_i のフーリエ展開は

$$\phi_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_i} \phi(\mathbf{k}_n)$$

添え字の i は格子点を指定するものなので、 $\mathbf{r}_i$ は i 番目の格子点の位置です。 $\mathbf{k}_n$ は D 次元波数ベクトルとします (プランク定数を含めて、次元を合わせれば運動量)。 $\sqrt{N}$ は規格化のためです。また、格子点の 1 から N の和との区別にもなるので、フーリエ展開での n の和の範囲は省いて書くことにします。

1 次元のときでは周期的境界条件 $r_i = r_i + L$ から、 k_n は

$$k_n = \frac{2\pi n}{L} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

そうすると、クロネッカーデルタによって

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\mathbf{k}_n \mathbf{r}_i} e^{-i\mathbf{k}_{n'} \mathbf{r}_i} = \delta_{nn'}$$

となります (力学の「連成振動」の補足参照)。なので、 $\sqrt{N}$ で規格化しています。大雑把に言えば、 $n = n'$ のとき N 個の 1 の和になるので N で割れば 1 になるからです。そして、 $\mathbf{k}_n$ にはブリュアン領域を $0 \leq n < N$ と選ぶことで

$$0 \leq k_n < \frac{2\pi}{L} N$$

$$0 \leq k_n < \frac{2\pi}{a}$$

という制限があります。

D 次元では、同じ状況が D 個出てくるだけなので、 D 次元での各軸の方向の格子点の数を N_d ($d = 1, 2, \dots, D$) として、全ての和を取れば

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_i} e^{-i\mathbf{k}_{n'} \cdot \mathbf{r}_i} = \delta_{nn'} \quad (N = N_1 N_2 \cdots N_d)$$

となります。

J_{ij} は $J(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ のことなので、実質的に 1 変数です。しかし、 $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ の 2 個あることから規格化は $1/N$ にし

$$J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{N} \sum_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} J(\mathbf{k}_n)$$

また、 J_{ij} は対称 $J_{ij} = J_{ji}$ で、実数としているので

$$J(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = \frac{1}{N} \sum_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)} J(\mathbf{k}_n) = \frac{1}{N} \sum_n e^{-i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} J(\mathbf{k}_n) = J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$J^*(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \frac{1}{N} \sum_n e^{-i\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} J(\mathbf{k}_n) = J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

となることから、 $J(\mathbf{k}_{-n}) = J(\mathbf{k}_n)$ ($\mathbf{k}_{-n} = -\mathbf{k}_n$) となります。

フーリエ展開によって (5) の第二項は

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \phi_i J_{ij} \phi_j &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{l,m,n} J(\mathbf{k}_l) e^{i\mathbf{k}_l \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}_i} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_j} \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \sum_{l,m,n} J(\mathbf{k}_l) e^{i(\mathbf{k}_m + \mathbf{k}_l) \cdot \mathbf{r}_i} e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_l) \cdot \mathbf{r}_j} \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{l,m} J(\mathbf{k}_l) e^{i(\mathbf{k}_m + \mathbf{k}_l) \cdot \mathbf{r}_i} \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_l) \\ &= \sum_l J(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_{-l}) \phi(\mathbf{k}_l) \end{aligned}$$

(5) の第三項からは $J_{ij}\phi_j$ が出てきて

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^N J_{ij}\phi_j &= \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{i,j=1}^N \sum_{m,n} e^{i\mathbf{k}_m \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} J(\mathbf{k}_m) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_j} \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{i,j=1}^N \sum_{m,n} e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}_i} e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_m) \cdot \mathbf{r}_j} J(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{i=1}^N \sum_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \sqrt{N} J(0) \phi(0) \quad (J(0) = J(\mathbf{k}_0), \phi(0) = \phi(\mathbf{k}_0))
\end{aligned}$$

第三項からは $J_{ij}\phi_j$ の2乗も出てくるので

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N J_{ij}\phi_j \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j,k=1}^N J_{ij}\phi_j J_{ik}\phi_k \right) \\
&= \frac{1}{N^3} \sum_{i,j,k=1}^N \sum_{l,l',m,n} J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_{l'}) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) e^{i\mathbf{k}_l \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)} e^{i\mathbf{k}_{l'} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)} e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}_j} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_k} \\
&= \frac{1}{N^3} \sum_{i,j,k=1}^N \sum_{l,l',m,n} J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_{l'}) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) e^{i(\mathbf{k}_l + \mathbf{k}_{l'}) \cdot \mathbf{r}_i} e^{i(\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_l) \cdot \mathbf{r}_j} e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{l'}) \cdot \mathbf{r}_k} \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \sum_{l,m,n} J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) e^{i(\mathbf{k}_l + \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}_i} e^{i(\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_l) \cdot \mathbf{r}_j} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{m,n} J(\mathbf{k}_m) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) e^{i(\mathbf{k}_m + \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}_i} \\
&= \sum_n J(\mathbf{k}_{-n}) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_{-n}) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \sum_n J(\mathbf{k}_n) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_{-n}) \phi(\mathbf{k}_n)
\end{aligned}$$

(5) の第四項では3乗と4乗が出てきますが、後で3乗の項は無視するので4乗の項だけを展開して

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N J_{ij} \phi_j \right)^4 &= \sum_{i=1}^N \sum_{a,b,c,d=1}^N J_{ia} \phi_a J_{ib} \phi_b J_{ic} \phi_c J_{id} \phi_d \\
&= \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{i=1}^N \sum_{a,b,c,d=1}^N J_{ia} \phi_a J_{ib} \phi_b J_{ic} \phi_c \sum_{m,n} e^{i\mathbf{k}_m \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_d)} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_d} J(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{i=1}^N \sum_{a,b,c,d=1}^N J_{ia} \phi_a J_{ib} \phi_b J_{ic} \phi_c \sum_{m,n} e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}_i} e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_m) \cdot \mathbf{r}_d} J(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{i=1}^N \sum_{a,b,c=1}^N J_{ia} \phi_a J_{ib} \phi_b J_{ic} \phi_c \sum_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{a,b=1}^N J_{ia} \phi_a J_{ib} \phi_b \sum_m e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_m) \sum_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_s e^{i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_s) \phi(\mathbf{k}_s) \sum_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_l) \\
&\quad \times \sum_m e^{i\mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_m) \sum_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{s,l,m,n} e^{i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{r}_i} J(\mathbf{k}_s) J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_m) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_s) \phi(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{s,l,m,n} \delta_{s+l+m+n} J(\mathbf{k}_s) J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_m) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_s) \phi(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n)
\end{aligned}$$

クロネッカーデルタは $s + l + m + n = 0$ のとき 1 の意味で書いています。

これらの結果を (5) に入れます。今は (4) での $\cosh$ の中身が微小だとしているので、 h^2 以上と $h\phi_i^3$ の項を無視することにして

$$\begin{aligned}
S[\phi] &\simeq -N \log 2 + \frac{\beta}{2} \sum_n J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_{-n}) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&\quad - \beta^2 h \sqrt{N} J(0) \phi(0) - \frac{\beta^2}{2} \sum_n J(\mathbf{k}_n) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_{-n}) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&\quad + \frac{\beta^4}{12N} \sum_{s,l,m,n} \delta_{s+l+m+n} J(\mathbf{k}_s) J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_m) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_s) \phi(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&= -N \log 2 - \beta^2 h \sqrt{N} J(0) \phi(0) + \frac{\beta}{2} \sum_n J(\mathbf{k}_n) (1 - \beta J(\mathbf{k}_n)) \phi(\mathbf{k}_{-n}) \phi(\mathbf{k}_n) \\
&\quad + \frac{\beta^4}{12N} \sum_{s,l,m,n} \delta_{s+l+m+n} J(\mathbf{k}_s) J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_m) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_s) \phi(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n)
\end{aligned}$$

ここからさらに変形していきます。

イジングモデルでの隣り合った格子点同士しか相互作用していないという状況を与えます。 $J(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ の逆展開を、隣り合った格子点の間隔 a_i のみで 0 にならないとして

$$J(\mathbf{k}_n) = \sum_{i=1}^{2D} e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{a}_i} J(\mathbf{a}_i) \quad (6)$$

とし、 $J(\mathbf{a}_i)$ は定数 $J > 0$ とします。 D 次元で隣り合っている格子点の数は $2D$ 個です。そして、 $J(\mathbf{k}_n)$ は $|\mathbf{k}_n|$ が小さいとして

$$\beta J(\mathbf{k}_n)(1 - \beta J(\mathbf{k}_n)) \simeq \lambda_2 a^2 + \lambda a^2 |\mathbf{k}_n|^2$$

という形で書けるとします (a は格子点の間隔)。 λ, λ_2 は J と T を含んでいます。実際に、 $|\mathbf{k}_n|$ が小さいときこの形で書けることは後で示します。また、 $|\mathbf{k}_n|$ は波数なので、これは波長が長いという近似をしたことになります。これを入れて

$$\begin{aligned} S[\phi] = & -N \log 2 - \beta^2 h \sqrt{N} J(0) \phi(0) + \frac{\beta}{2} \sum_n (\lambda_2 a^2 + \lambda |\mathbf{k}_n|^2 a^2) \phi(\mathbf{k}_{-n}) \phi(\mathbf{k}_n) \\ & + \frac{\beta^4}{12N} \sum_{s,l,m,n} \delta_{s+l+m+n} J(\mathbf{k}_s) J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_m) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_s) \phi(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \end{aligned} \quad (7)$$

次に $V = Na^D$ の無限大の極限を取り、 $\mathbf{k}_n$ を連続的にします。これはフーリエ変換への変更なので

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{L} \sum_n f(k_n) = \int \frac{dk}{2\pi} f(k)$$

として、積分にします。 D 次元でも同様に、

$$\frac{1}{(2\pi)^D} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^D}{V} \sum_n f(k_n) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f(\mathbf{k})$$

$\mathbf{k}_n$ に対するクロネッカーデルタとデルタ関数は 1 次元では

$$\delta_{nm} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{i(k_n - k_m)x}, \quad \delta(p - q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(p-q)x}$$

となっているので、 L が無限大で $L\delta_{nm}$ は $2\pi\delta(p - q)$ に置き換わります。 D 次元では

$$V\delta_{nm} \Rightarrow (2\pi)^D \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

となります。

これらを使って変形させますが、 $\mathbf{k}_n$ にはブリュアン領域での上限があるので、 $|\mathbf{k}| < 2\pi/a$ に制限されています。さらに、 $\mathbf{k}_n$ は小さいという近似を使っているので $|\mathbf{k}| \ll 1/a$ になっています。なので、デルタ関数はこの場合でも使えたと仮定します。

(7) の第三項は

$$\frac{\beta}{2} \frac{Va^2}{(2\pi)^D} \frac{(2\pi)^D}{V} \sum_n (\lambda_2 + \lambda \mathbf{k}_n^2) \phi(\mathbf{k}_{-n}) \phi(\mathbf{k}_n)$$

$\phi(\mathbf{k}_n)$ を

$$\varphi(\mathbf{k}_n) = a\sqrt{V}\phi(\mathbf{k}_n)$$

と規格化すれば

$$\frac{\beta}{2} \frac{1}{(2\pi)^D} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^D}{V} \sum_n (\lambda_2 + \lambda \mathbf{k}_n^2) \varphi(-\mathbf{k}_n) \varphi(\mathbf{k}_n) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (\lambda_2 + \lambda \mathbf{k}^2) \varphi(-\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k})$$

(7) の第四項は、 $J(\mathbf{k}_i)$ はすでに $|\mathbf{k}_i|$ が小さいとして近似が行われているので定数 $J(\mathbf{k}_i = 0) = J(0)$ と近似してしまい

$$\begin{aligned} & \frac{\beta^4}{12N} \sum_{s,l,m,n} \delta_{s+l+m+n} J(\mathbf{k}_s) J(\mathbf{k}_l) J(\mathbf{k}_m) J(\mathbf{k}_n) \phi(\mathbf{k}_s) \phi(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\ & \simeq \frac{\beta^4 J^4(0)}{12N} \frac{V}{(2\pi)^D} \frac{(2\pi)^D}{V} \sum_{s,l,m,n} \delta_{s+l+m+n} \phi(\mathbf{k}_s) \phi(\mathbf{k}_l) \phi(\mathbf{k}_m) \phi(\mathbf{k}_n) \\ & = \frac{\beta^4 J^4(0)}{12V a^{-D}} \frac{1}{a^4 (2\pi)^D} \frac{(2\pi)^D}{V^2} \sum_{s,l,m,n} \delta_{s+l+m+n} \varphi(\mathbf{k}_s) \varphi(\mathbf{k}_l) \varphi(\mathbf{k}_m) \varphi(\mathbf{k}_n) \\ & = \frac{\beta^4 J^4(0)}{12a^{-D}} \frac{1}{a^4 (2\pi)^{4D}} \frac{(2\pi)^{4D}}{V^4} \sum_{s,l,m,n} V \delta_{s+l+m+n} \varphi(\mathbf{k}_s) \varphi(\mathbf{k}_l) \varphi(\mathbf{k}_m) \varphi(\mathbf{k}_n) \\ & \Rightarrow \frac{\beta^4 J^4(0)}{12} \frac{(2\pi)^D}{a^{4-D}} \int \frac{d^D k_1 \cdots d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \varphi(\mathbf{k}_1) \varphi(\mathbf{k}_2) \varphi(\mathbf{k}_3) \varphi(\mathbf{k}_4) \\ & = \frac{\lambda_4}{4!} \int \frac{d^D k_1 \cdots d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} (2\pi)^D \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \varphi(\mathbf{k}_1) \varphi(\mathbf{k}_2) \varphi(\mathbf{k}_3) \varphi(\mathbf{k}_4) \end{aligned}$$

最後の $\mathbf{k}_i$ の i は $\mathbf{k}$ の区別の添え字としていて、離散的な $\mathbf{k}_n$ の n とは違った意味で使っています。 λ_4 は

$$\lambda_4 = \frac{2\beta^4 J^4(0)}{a^{4-D}}$$

としています。

(7) の第二項は

$$\begin{aligned} \beta^2 h \sqrt{N} J(0) \phi(0) &= \beta^2 h J(0) \sqrt{N} \frac{1}{a\sqrt{V}} \varphi(0) \\ &= \beta^2 h J(0) \sqrt{N} \frac{1}{a\sqrt{N} a^{D/2}} \varphi(0) \\ &= \beta^2 h J(0) \frac{1}{a^{1+D/2}} \varphi(0) \\ &= \lambda_0 \varphi(0) \end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned}
S(\varphi) = & -N \log 2 - \lambda_0 \varphi(0) \\
& + \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (\lambda_2 + \lambda \mathbf{k}^2) \varphi(-\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k}) \\
& + \frac{\lambda_4}{4!} \int \frac{d^D k_1 \cdots d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} (2\pi)^D \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \varphi(\mathbf{k}_1) \varphi(\mathbf{k}_2) \varphi(\mathbf{k}_3) \varphi(\mathbf{k}_4)
\end{aligned}$$

となります。すでに触れたように k 積分には上限 $|\mathbf{k}| < \Lambda \ll 1/a$ があります。第三項と第四項は ϕ^4 理論の運動量表示の形になっています。

連続的な位置 $\mathbf{r}$ にするとよりはっきりします。 $\mathbf{r}$ を連続として、フーリエ変換は

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \phi(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad \phi(\mathbf{k}) = \int d^D r \phi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

フーリエ変換が可能とするために、 $\varphi(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ の無限大で急速に 0 に近づくとして変形していきます。

第三項は

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int d^D r d^D r' \varphi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \\
& = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int d^D r d^D r' e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}') \\
& = \int d^D r d^D r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}') \\
& = \int d^D r \varphi^2(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

k^2 がある項は

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int d^D r d^D r' \mathbf{k}^2 \varphi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \\
& = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int d^D r d^D r' \varphi(\mathbf{r}) \nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot \varphi(\mathbf{r}') \nabla' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \\
& = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int d^D r \varphi(\mathbf{r}) \nabla e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \cdot \int d^D r' \varphi(\mathbf{r}') \nabla' e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \\
& = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int d^D r (\nabla(\varphi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) - e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \nabla \varphi(\mathbf{r})) \cdot \int d^D r' (\nabla'(\varphi(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}) - e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \nabla' \varphi(\mathbf{r}')) \\
& = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int d^D r d^D r' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \nabla \varphi(\mathbf{r}) \nabla' \varphi(\mathbf{r}') \\
& = \int d^D r (\nabla \varphi(\mathbf{r}))^2
\end{aligned}$$

第四項では

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k_1 \cdots d^D k_4}{(2\pi)^{4D}} (2\pi)^D \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \varphi(\mathbf{k}_1) \varphi(\mathbf{k}_2) \varphi(\mathbf{k}_3) \varphi(\mathbf{k}_4) \\
&= \int \frac{d^D k_1 \cdots d^D k_4}{(2\pi)^{3D}} \int d^D r_1 \cdots d^D r_4 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}_4) \\
&\quad \times e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_3} e^{-i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{r}_4} \\
&= \int \frac{d^D k_1 \cdots d^D k_3}{(2\pi)^{3D}} \int d^D r_1 \cdots d^D r_4 \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}_4) \\
&\quad \times e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}_3} e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}_4} \\
&= \int \frac{d^D k_1 \cdots d^D k_3}{(2\pi)^{3D}} \int d^D r_1 \cdots d^D r_4 \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}_4) \\
&\quad \times e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)} e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)} e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)} \\
&= \int d^D r_1 \cdots d^D r_4 \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_3) \varphi(\mathbf{r}_4) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \delta(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \\
&= \int d^D r_4 \varphi(\mathbf{r}_4) \varphi(\mathbf{r}_4) \varphi(\mathbf{r}_4) \varphi(\mathbf{r}_4)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
S[\varphi] &= -N \log 2 - \lambda_0 \int d^D r \varphi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}|_{\mathbf{k}=0} + \int d^D r \left(\frac{\lambda_2}{2} \varphi^2(\mathbf{r}) + \frac{\lambda}{2} (\nabla \varphi(\mathbf{r}))^2 + \frac{\lambda_4}{4!} \varphi^4(\mathbf{r}) \right) \\
&= -N \log 2 + \int d^D r \left(\frac{\lambda_2}{2} \varphi^2(\mathbf{r}) + \frac{\lambda}{2} (\nabla \varphi(\mathbf{r}))^2 + \frac{\lambda_4}{4!} \varphi^4(\mathbf{r}) - \lambda_0 \varphi(\mathbf{r}) \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

これを Ginzburg-Landau-Wilson 作用と言います。余計な項もありますが、 ϕ^4 理論の作用と同じ形です (今はユークリッド空間なのでミンコフスキー空間での時間微分の項は出てこない)。

これを出すために近似をしてきましたが、重要なのは $|k|$ には制限があり、しかも小さいとした点です。このため積分は長波長の領域で行われていることになり、短波長の影響は捨てられています。

元のイジングモデルとの対応を見るために、外部磁場がないとして ($\lambda_0 = 0$)、 S の極値を求めてみます。 $\varphi + \delta\varphi$ での変分 δS は

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^D r (\lambda_2 \varphi \delta\varphi + \lambda \nabla \varphi \nabla \delta\varphi + \frac{\lambda_4}{3!} \varphi^3 \delta\varphi) \\
&= \int d^D r (\lambda_2 \varphi \delta\varphi + \lambda \nabla (\delta\varphi \nabla \varphi) - \lambda \delta\varphi \nabla^2 \varphi + \frac{\lambda_4}{3!} \varphi^3 \delta\varphi) \\
&= \int d^D r (\lambda_2 \varphi - \lambda \nabla^2 \varphi + \frac{\lambda_4}{3!} \varphi^3) \delta\varphi
\end{aligned}$$

なので

$$\lambda_2 \varphi - \lambda \nabla^2 \varphi + \frac{\lambda_4}{3!} \varphi^3 = 0 \tag{9}$$

となるのが S の極値です。これは φ が定数のとき明らかに解を持つので

$$\lambda_2 \varphi + \frac{\lambda_4}{6} \varphi^3 = 0$$

$$\varphi = \pm \sqrt{-\frac{6\lambda_2}{\lambda_4}}$$

λ_4 は正なので、 $\lambda_2 < 0$ のときに解です。このため、 $\lambda_2 < 0$ で磁化が 0 でなくなるので、このときの温度で強磁性への相転移が起きます。この結果はイジングモデルの平均場近似によるものと一致します。

それを見るために、 λ_2, λ_4 を臨界温度付近 $T \simeq T_c = zJ$ ($z = 2D$) として近似します。 $T_c = zJ$ は平均場近似での臨界温度です。そのために、飛ばした $J(\mathbf{k}_n)$ の近似を求めます。(6) を $|\mathbf{k}|$ が小さいとして展開すれば

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2D} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i} J &\simeq \sum_{i=1}^{2D} \left((1 - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i)^2 + \dots) J \right) \\ &= 2DJ + \sum_{i=1}^{2D} \left(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i + \frac{1}{2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i)^2 + \dots \right) J \end{aligned}$$

$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_{ij}$ の項は、ある格子点を挟んでいる 2 つの格子点の位置は逆向きのベクトルなので足せば消えます。 $|\mathbf{k}|$ は波数なので、これは波長が長いという近似をしたことになります。

よって、 $J(\mathbf{k})$ は $|\mathbf{k}|$ の 2 次までで

$$J(\mathbf{k}) \simeq (z - |\mathbf{k}|^2 a^2) J \quad (z = 2D)$$

これを使って、 k^4 の項は無視すると

$$\begin{aligned} \beta J(\mathbf{k})(1 - \beta J(\mathbf{k})) &\simeq \beta(z - |\mathbf{k}|^2 a^2) J - \beta^2(z - |\mathbf{k}|^2 a^2)^2 J^2 \\ &\simeq \beta z J - \beta^2 z^2 J^2 + |\mathbf{k}|^2 a^2 (-\beta J + 2\beta^2 z J^2) \\ &= \lambda_2 a^2 + \lambda |\mathbf{k}|^2 a^2 \end{aligned}$$

となります。

λ_2 と $J(\mathbf{k})$ の近似が求められたので、 λ_2 と λ_4 で $T \simeq T_c$ とすると

$$\begin{aligned} a^2 \lambda_2 &= \beta z J (1 - \beta z J) = \frac{1}{T} \frac{zJ}{T} (T - zJ) = \frac{1}{T} \frac{T_c}{T} (T - T_c) \simeq \frac{T - T_c}{T_c} \\ \lambda_4 &= \frac{2\beta^4 J^4(0)}{a^{4-D}} = \frac{2(\beta z J)^4}{a^{4-D}} \simeq \frac{2}{a^{4-D}} \quad (J(0) \simeq zJ) \end{aligned}$$

と近似されます。

イジングモデルの平均場近似の場合も求めます。 m を磁化として、平均場近似での自由エネルギー (統計力学の「イジングモデルの平均場近似」参照)

$$F = \frac{zJm^2}{2} - \frac{1}{\beta} \log[2 \cosh(\beta z J m)]$$

での第二項を展開し

$$\begin{aligned}
F &\simeq \frac{zJm^2}{2} - \frac{1}{\beta}(\log 2 + \frac{1}{2}(\beta zJm)^2 - \frac{1}{12}(\beta zJm)^4) \\
&= -\frac{1}{\beta} \log 2 + \frac{1}{2}zJ(1 - \beta zJ)m^2 + \frac{1}{12}\frac{1}{\beta}(\beta zJ)^4m^4
\end{aligned}$$

これの極値を求めれば

$$\frac{\partial F}{\partial m} = zJ(1 - \beta zJ)m + \frac{1}{3}\frac{1}{\beta}(\beta zJ)^4m^3 = 0$$

となって、同じ形の式になります。 $T \simeq T_c = zJ$ ($T_c/T \simeq 1$) とすれば

$$\begin{aligned}
zJ(1 - \beta zJ) &= \frac{zJ}{T}(T - zJ) = \frac{T_c}{T}(T - T_c) \simeq T - T_c \\
\frac{1}{\beta}(\beta zJ)^4 &= \frac{T_c^4}{T^3} \simeq T_c
\end{aligned}$$

から

$$(T - T_c)m + \frac{1}{3}T_cm^3 = 0$$

となります。

(9) での φ を $\varphi = a^{1-D/2}m$ として、 λ_2, λ_4 を入れてみると

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{T - T_c}{a^2T_c}\varphi + \frac{1}{3}\frac{1}{a^{4-D}}\varphi^3 \\
&= \frac{T - T_c}{a^2T_c}a^{1-D/2}m + \frac{1}{3}\frac{1}{a^{4-D}}a^{3-3D/2}m^3 \\
&= \frac{T - T_c}{T_c}m + \frac{1}{3}\frac{1}{a^{4-D}}a^{4-D}m^3 \\
&= \frac{T - T_c}{T_c}m + \frac{1}{3}m^3
\end{aligned}$$

よって

$$(T - T_c)m + \frac{1}{3}T_cm^3 = 0$$

となり、平均場近似での臨界温度付近での結果と一致します。

どちらかと言えば統計力学で出てくる話ですが、今の話の外観が分かりやすくなるのでギンツブルグ・ランダウ (Ginzburg-Landau) 理論の入り口の話を経由しておきます。

スピンは格子点上にいたので離散的な位置に依存していますが、これをぼかして見ます。つまり、ある適当な大きさ V_0 があり、この中に複数の格子点が含まれているとします。しかし、この大きさ V_0 は知りたい物理現象を特徴づけるスケールに対して十分小さいとします。そうすると、各 V_0 の中心の位置 r はそのスケールからすれば連続的になっていると見なせ、 V_0 内にあるスピンは V_0 内での単純な平均 (各格子点のスピンを足して格子点の数で割る) として扱えてしまえます。このようにして元々の状況をぼかすことを粗視化 (coarse-graining) と言います。

このとき、 V_0 内の格子点が十分多ければスピンの平均は連続値と出来ます (格子点の数 N_0 が大ければ $1/N_0$ が連続的になる)。これを $\phi(\mathbf{r})$ として、これによってイジングモデルの分配関数でのスピンを

$$Z = \sum_{\phi(\mathbf{x}_1)} \sum_{\phi(\mathbf{x}_2)} \cdots \sum_{\phi(\mathbf{x}_n)} e^{-\beta E(\sum_i \sigma_i)} \Big|_{\sigma_i = \phi(\mathbf{r})}$$

と変更します。和は σ_i を囲む V_0 での $\phi(\mathbf{r}_i)$ に σ_i を置き換えて、可能な全ての $\phi(\mathbf{r}_i)$ に対して和を取るという意味です。そうすると、 $\phi(\mathbf{r}_i)$ は連続なために各和は積分となり、

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\beta F[\phi]}$$

として経路積分になります。この変形を直接計算せず、制限を加えることで F の形を与えます。

F は微分の項も含むとして $F[\phi, \nabla\phi, \nabla^2\phi, \dots]$ とします。格子点は区別できないので、 F は位置に陽に依存しないとしています (F の関数形は空間のどこでも同じ)。そして、 F はテーラー展開可能とします。他にも格子点は回転に対して不変なため回転不変性も要求できますが、 ϕ はスカラーにしているのでこれは気にしないでいいです。

ついでに、外部磁場はないとします ($h = 0$)。 $h = 0$ でのイジングモデルではスピンの符号反転に対してハミルトニアンは不変なので、 ϕ の 1 次、3 次といった項は含めないようにします。そうすると、 $F[\phi]$ は、 ϕ の 4 次までと $(\nabla\phi)^2$ までを含めることにすれば

$$F[\phi] = \int d^D r (f_0 + \alpha_2 \phi^2 + \alpha_4 \phi^4 + \kappa (\nabla\phi)^2)$$

という形で書けます。 f_0 は定数、 $\alpha_2, \alpha_4, \kappa$ は温度などに依存するパラメータです。これは Ginzburg-Landau-Wilson 作用 (8) と一致します (外部磁場なしなので $\lambda_0 = 0$)。このようにして作られた F をランダウ・ギンツブルグ自由エネルギーと言います (より一般的には $(\nabla^2\phi)^2$ といった項を加えられる)。

イジングモデルでの相転移は磁化によって決まり、磁化のように相転移を表すことになるものを秩序パラメータ (order parameter) と言います。ギンツブルグ・ランダウ自由エネルギーは秩序パラメータによって展開されたものです。

これから、Ginzburg-Landau-Wilson 作用において短波長の影響がなくなるのは、粗視化 (φ が粗視化された磁化) に対応しているのが分かります (長波長のスケールの物理現象を見ている)。そして、粗視化による V_0 のために、フーリエ変換の波数には V_0 の大きさによる上限が与えられます。