

クライン・ゴールドン場～伝播関数～

QED で伝播関数を求めましたが、ここでは場の理論の形式から求めます。ただし、ここでは伝播関数を求めるのに必要な計算を行っていますが、具体的に出しているのは遅延グリーン関数です。なので、ここではなんとなく理解する程度でいいです。詳しいことは「伝播関数について」をご覧ください。
複素積分については知っているとしています。

y から x への粒子の伝播関数は、一般的に場の演算子 $\phi(x)$ と真空 $|0\rangle$ によって

$$G(x-y) = \langle 0 | T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) | 0 \rangle \quad (1)$$

という形で定義されます。記号 T は

$$T(A(x)B(y)) = \theta(x^0 - y^0)A(x)B(y) \pm \theta(y^0 - x^0)B(y)A(x)$$

これは、時間 x^0 と y^0 どちらが大きいかを区別するもので、時間順序積 (time-ordered product) と言います。 $\theta(x^0 - y^0)$ は階段関数です。 x_0, y_0, z_0 の大きさが $z_0 > y_0 > x_0$ と与えられているなら

$$T(A(y)B(x)C(z)) = C(z)A(y)B(x) \quad (z_0 > y_0 > x_0)$$

ということです。符号の $\pm$ は粒子がボソンかフェルミオンなのかによって変わります (フェルミオンなら一回交換する度に符号が逆転する)。

(1) で $G(x-y)$ と書いているように、大抵は伝播関数は位置の差にのみ依存するとします (時間と空間の並進不変性)。時空が一様でなく並進不変でないなら、伝播関数は $G(x, y)$ となりますが、場の量子論においては時空は一様であると普通は仮定するので、特に断らない限り $G(x, y)$ と $G(x-y)$ は同じ意味とします。

表記ですが、真空で挟んだものは単に

$$\langle 0 | T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) | 0 \rangle = \langle T(\phi(x)\phi^\dagger(y)) \rangle$$

とも書かれます。左辺は真空で挟んだ期待値 (真空期待値) なので、期待値の表記法を使うというだけです。

2 つの場の演算子を真空で挟んだものは 2 点相関関数 (two-point correlation function) とか、2 点関数、2 点グリーン関数と呼びます。2 点と言ってるのは場の演算子が 2 つだからで、数が増えればそれに伴って n 点となります。なので、伝播関数は 2 点相関関数です。

伝播関数の定義 (1) は、例えば $x_0 > y_0$ では、点 $(y_0, \mathbf{y})$ で粒子が作られ、点 $(x_0, \mathbf{x})$ で消えることを表し、そのまま y から x への遷移振幅になります。そして、重要なことは、時間順序が順行と逆行の両方含んでいる点です。これは反粒子を時間が逆行している粒子として扱うことを反映しています。

具体的に実スカラー場を使って計算してみます。ただし、ここでは伝播関数より簡単に出せる遅延グリーン関数を求めます (基本的に手順は同じで時間順序の扱いだけが異なっている)。実スカラー場の伝播関数 D は、実スカラー場 $\phi(x)$ から

$$D(x-y) = \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle$$

$\phi(x)$ は

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) \quad (px = E_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}, E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$$

$\phi(x)\phi(y)$ の真空期待値を求めてみると

$$\begin{aligned}
\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle &= \langle 0|\int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) (a_{\mathbf{p}'} e^{-ip'y} + a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{ip'y}) |0\rangle \\
&= \langle 0|\int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} (a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{-ipx} e^{ip'y} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} e^{ipx} e^{-ip'y}) |0\rangle \\
&= \langle 0|\int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') e^{-ipx} e^{ip'y} |0\rangle \\
&= \langle 0|\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)} |0\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}$$

このようになっています。\$a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'}^\dagger\$ の項が落とせるのは、真空で挟むと \$\langle 0|a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'}^\dagger|0\rangle = 0\$ となるからです。
同様にすれば、\$[\phi(x), \phi(y)]\$ を真空で挟んだものも求められて

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} ((a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx})(a_{\mathbf{p}'} e^{-ip'y} + a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{ip'y}) \\
&\quad - (a_{\mathbf{p}'} e^{-ip'y} + a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{ip'y})(a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx})) \\
&= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} (a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{-ipx} e^{ip'y} + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} e^{ipx} e^{-ip'y} \\
&\quad - a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip'y} e^{ipx} - a_{\mathbf{p}'}^\dagger a_{\mathbf{p}} e^{ip'y} e^{-ipx}) \\
&= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} (e^{-ipx} e^{ip'y} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] + e^{ipx} e^{-ip'y} [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}]) \\
&= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} (e^{-ipx} e^{ip'y} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - e^{ipx} e^{-ip'y} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \\
&= \Delta^{(+)}(x-y) + \Delta^{(-)}(x-y)
\end{aligned}$$

これは c 数なので真空で挟んでも何も変わらないです。

交換関係から簡単に求められるので、遅延グリーン関数を求めることにします。今の結果に対して、第一項では \$p_0 = E_p\$、第二項では \$p_0 = -E_p\$ とすることで

$$\begin{aligned}
\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\frac{1}{2E_p} e^{-ip(x-y)}|_{p_0=E_p} + \frac{1}{-2E_p} e^{ip(x-y)}|_{p_0=-E_p})
\end{aligned} \tag{2}$$

このようにして書けます。これは複素積分によって \$x^0 > y^0\$ に対して

$$\langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int_C \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (x^0 > y^0) \tag{3}$$

と出来ます。閉じた積分経路 C は、 $\pm E_p$ を避けるように $-\infty$ から $+\infty$ へ行き下半円を通して $-\infty$ に行くものです。 $\pm E_p$ を C の内側に来るように $\pm E_p$ を避けています (実軸の上側を通るようにしている)。一応計算を示しておきます。 p_0 積分だけを取りだします。変形すれば

$$\int_C \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip_0(x_0 - y_0)} = \int_C \frac{dp_0}{2\pi i} \frac{-1}{(p_0 + E_p)(p_0 - E_p)} e^{-ip_0(x_0 - y_0)} \quad (E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})$$

これから明らかに極は $\pm E_p$ です。積分経路が閉じているので留数定理を使います。留数 $\text{Res}(f, \pm E_p)$ は

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, \pm E_p) &= \lim_{z \rightarrow E_p} \frac{1}{2\pi i} (z - E_p) \frac{-1}{(z - E_p)(z + E_p)} e^{-iz(x_0 - y_0)} \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow -E_p} \frac{1}{2\pi i} (z + E_p) \frac{-1}{(z - E_p)(z + E_p)} e^{-iz(x_0 - y_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{-1}{2E_p} e^{-iE_p(x_0 - y_0)} + \frac{1}{2\pi i} \frac{-1}{-2E_p} e^{iE_p(x_0 - y_0)} \end{aligned}$$

f は被積分関数です。よって、留数定理より

$$\int_C f(z) = -2\pi i \text{Res}(f, \pm E_p) = \frac{1}{2E_p} e^{-iE_p(x_0 - y_0)} + \frac{1}{-2E_p} e^{iE_p(x_0 - y_0)}$$

となって、(2) と一致します (2 番目でマイナスが付いているのは経路が時計周りだから)。

(3) は時間の大小関係が $x^0 > y^0$ なので、その条件を階段関数を使うことで

$$D_R(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \quad (4)$$

と書いて、遅延グリーン関数の定義となります。 D_R がクライン・ゴールドン方程式に対するグリーン関数になっていることを確かめます。 $D_R(x - y)$ をクライン・ゴールドン方程式に適用させて

$$(\square + m^2) D_R(x - y)$$

階段関数の微分は

$$\frac{\partial \theta(\alpha)}{\partial \alpha} = \delta(\alpha)$$

なので、 $\partial^\mu D_R(x - y)$ は

$$\begin{aligned} &(\partial^\mu \theta(x^0 - y^0)) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + \theta(x^0 - y^0) \partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &= \delta^{0\mu} \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + \theta(x^0 - y^0) \partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \end{aligned}$$

デルタ関数から $x^0 = y^0$ が要求されるので、2 行目の第 1 項は同時刻交換関係から 0 になります。これに ∂_μ を作用させれば $\square D_R(x - y)$ になるので

$$\begin{aligned}
(\square + m^2)D_R(x-y) &= (\partial_\mu \theta(x^0 - y^0)) \partial^\mu \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + \theta(x^0 - y^0) (\square + m^2) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&= \delta(x^0 - y^0) \partial^0 \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle \\
&= -i \delta(x^0 - y^0) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -i \delta^4(x - y)
\end{aligned}$$

よって、 $D_R(x-y)$ はクライン・ゴールドン場のグリーン関数です。

QED では伝播関数 $D_R(x-y)$ をフーリエ変換して運動量表示にしたものが頻繁に出てきたので、ここでもフーリエ変換したものを求めてみます。フーリエ変換は

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} D_R(p)$$

これはクライン・ゴールドン方程式にいて

$$\begin{aligned}
(-p^2 + m^2)D_R(p) &= -i \\
D_R(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2}
\end{aligned}$$

(3) と同じ積分経路を選ぶことで、これに時間順序の条件が入って、 $x_0 > y_0$ において

$$D_R(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (x_0 > y_0)$$

となり、(3) と同じになります (より明確にするには $\theta(x_0 - y_0)$ の寄与を含めた形として $-ip_0\epsilon$ を分母に加えればよい)。遅延グリーン関数を求めてきましたが、ファインマンの伝播関数に対応させるのは簡単で、極をずらすための微小な $i\epsilon$ を加えて

$$D(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$$

とすればいいです。これが最初に示した伝播関数の定義に対応するものです。通常、伝播関数といった時にはこの形を指します。この場合の積分経路は QED の「伝播関数」で示したように、 $-E_p$ の下を通り、 $+E_p$ の上を通って、 $-\infty$ から $+\infty$ まで行って、下半円を通して $+\infty$ から $-\infty$ に行く経路 ($x_0 > y_0$ のとき) と、下半円でなく上半円を通して行く経路 ($x_0 < y_0$ のとき) です。

このように極の扱い (分母の $p^2 - m^2$ の特異点をどう処理するか) でグリーン関数の意味が変わります (グリーン関数の境界条件が変わるから)。より詳しい話は「伝播関数について」をご覧ください。また、実スカラー場として伝播関数を求めましたが、複素スカラー場でも同じ伝播関数になります。

最後に、因果律について簡単に触れておきます。ここでの因果律は、光速を超えて情報を離れた場所に伝達させることを禁じる、という相対論的な因果律を指します。例えば $\phi(\mathbf{x}, t=0)$ と $\phi(\mathbf{y}, t=0)$ という空間的 (space-like) に離れている 2 つの場に対する交換関係が

$$[\phi(\mathbf{x}, 0), \phi(\mathbf{y}, 0)] \neq 0 \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

であるとしします。空間的に離れているというのは、 $(x-y)^2 = (x_0 - y_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 < 0$ ということです。時間 $t=0$ にしているのは、そうした方が分かりやすいというだけです。この交換関係が 0 でないことは、量子力学と同じよう

に考えれば、 $\phi(x, 0)$ という観測の影響を同時刻に $\phi(y, 0)$ が受けることを表しているの、明らかに因果律をやぶる結果です。なので、同時刻での異なった 2 点での交換関係は常に 0 になる必要があります、 x, y が空間的なときに成り立つべき交換関係 $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ のことを微視的因果律 (microcausality, microscopic causality) と言います。これは、空間的である限り片方の影響がもう片方には及ばないということです (不確定性なしに観測できる)。これは空間的であれば、時間の選び方に依存しません。簡単に言い換えれば、空間的な領域は光速を超えないと $|x - y|$ の距離にたどりつけないので ($c|t_1 - t_2| < |x - y|$)、光速以下という制限をかけると、空間的な領域では $|x - y|$ 離れた場所へ影響を与えられないということです。

この話は言い換えれば、同時刻交換関係は 0 ということです。空間的に離れた 2 つの点 (x, t) と (y, t) に対してローレンツ変換を行えば、ローレンツ変換後の交換関係も 0 になります。

このことを今みてきた実スカラー場で実際に見てみます。まず交換関係はすでに計算したように

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)})$$

微視的因果律を満たすためには、これが空間的なときに 0 になる必要があります。この式は

$$\Delta(z) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (e^{-ipz} - e^{ipz}) \quad (z^\mu = x^\mu - y^\mu)$$

と書くと、 $\Delta(-z) = -\Delta(z)$ なのが分かります。そして、今は proper なローレンツ変換に対して不変になるように作ってきているので (「規格化について」参照)、proper なローレンツ変換によって $z \rightarrow -z$ とできるなら、 $\Delta(-z) = -\Delta(-z)$ から $\Delta(z) = 0$ となります。

実際に、空間的な場合では連続なローレンツ変換によって $(x - y) \rightarrow -(x - y)$ とできます。これは時間 t から $-t$ への変換が通常のローレンツ変換でできるということなので、ローレンツ変換として (簡単のために空間成分は 1 つにして、それを x とします)

$$t' = \gamma(t - vx) = -t, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

となるものが $t^2 - x^2 < 0$ の領域で存在します (ローレンツ変換は 3 次元回転を含んでいるので、空間成分は 3 次元回転すればいい)。変形していくと

$$\frac{1}{1 - v^2} (t - vx)^2 = t^2$$

$$(1 - vx/t)^2 = 1 - v^2$$

$$1 + a^2 v^2 - 2av = 1 - v^2 \quad (a = \frac{x}{t})$$

$$a^2 v^2 + v^2 - 2av = 0$$

$$(a^2 + 1)v - 2a = 0$$

なので、 v は

$$v = \frac{2a}{a^2 + 1} = \frac{2x/t}{x^2/t^2 + t^2/t^2} = 2 \frac{x}{t} \frac{t^2}{x^2 + t^2} = \frac{2xt}{x^2 + t^2}$$

となっていればいいです。ローレンツ変換に入れてみると

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = (1 - \frac{4x^2 t^2}{(x^2 + t^2)^2})^{-1/2} = (\frac{(x^2 + t^2)^2 - 4x^2 t^2}{(x^2 + t^2)^2})^{-1/2} = \frac{x^2 + t^2}{|x^2 - t^2|}$$

から

$$\begin{aligned}\gamma(t - vx) &= \frac{x^2 + t^2}{|x^2 - t^2|} \left(t - \frac{2x^2 t}{x^2 + t^2} \right) = \frac{x^2 + t^2}{|x^2 - t^2|} \frac{t(x^2 + t^2) - 2x^2 t}{x^2 + t^2} \\ &= - \frac{x^2 - t^2}{|x^2 - t^2|} t \\ &= -t \quad (t^2 < x^2)\end{aligned}$$

となるので、空間的 $t^2 < x^2$ であるなら t から $-t$ への連続的なローレンツ変換が存在することになります。この変換では

$$x' = \gamma(x - vt) = x \quad (x^2 > t^2)$$

となるので、時間だけ符号が反転します。
というわけで、空間的な場合での交換関係は

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0$$

とできます。ここでは実スカラー場でやっているのですが、明確にはわかりませんが、これは粒子と反粒子が打ち消し合って0になることを言っています。なので、相対論的な場の量子論は因果律を満たすために粒子と反粒子の存在を要求してきます。