

格子ゲージ理論

現在の素粒子物理で重要な役目を担っている格子ゲージ理論 (lattice gauge theory) の導入部分について見ていき、格子上でのゲージ場に対する作用を作ります。フェルミオンについては無視して非可換ゲージ場のみを扱います。離散化させるんですが、その基本的な話は「経路積分～離散的な場合～」を見てください。

最初に表記を定義しておきます。ある点での座標 x_μ を、 i, j, k, l を整数として $e_{1,2,3,4}$ を各成分の単位ベクトルとすることで (ユークリッド的にするために時間は第 4 成分)

$$x_\mu = an_\mu = a(ie_1 + je_2 + ke_3 + le_4)$$

このように表現します (e と太字で書いていますが、3 次元ベクトルではないことに注意してください)。これで座標は表現でき、スカラー場も何の問題もなく表現できます。次に問題になるのがゲージ場も格子上で定義できるのかということです。ゲージ場のスカラー場との違いはゲージ不変性を持っている点です。この性質をどうやって組み込むのかですが、ゲージ場に対する共変微分の考えを流用することで素直に組み込めます。

ユークリッド化は $A_0 = -iA_4$ を使います (有限温度の場の理論での「ファインマン則～虚時間法～」参照)。この場合共変微分内の符号が反転して

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a \Rightarrow D_\mu^E = \partial_\mu + igA_\mu^a t^a$$

となります。ついでに $\bar{A}_\mu = A_\mu^a t^a$ という表記を定義して、 $SU(N)$ の生成子 t^a を含ませています。

ここからは特に何も言わない限りユークリッド空間だとします
和の Σ 記号がないときは添え字が揃っていても和をとらないようにします

ここでの 4 次元空間は格子状に分割された空間で、これからの話はその格子上で考えています。離散的な経路積分の定式化は「経路積分～離散的な場合～」でやっているのので、一気にゲージ場に飛びます。ゲージ変換はある点を出発点にして 4 角形を描いて元に戻ってきたときのズレから構成されるので、それを格子上で行います。連続的な場合での微小移動の式は

$$\phi(x + dx) = \phi(x) + \sum_\mu (\partial_\mu \phi(x)) dx_\mu$$

こんなので与えられますが、 $SU(N)$ の非可換ゲージ場があるときでは共変微分によって

$$\psi(x + dx) = \psi(x) + \sum_\mu dx_\mu D_\mu \psi(x) = \psi(x) + \sum_\mu dx_\mu (\partial_\mu + ig\bar{A}_\mu) \psi(x)$$

となっています。見比べればゲージ場による影響は $ig\bar{A}_\mu dx_\mu$ で与えられていることが分かります。なので、この部分だけを取り出して、微小移動っぽくさせた

$$1 + ig\bar{A}_\mu(x) dx_\mu \quad (1)$$

こんなのを作ります。このとき μ に対して和を取らないようにして、 μ 方向の移動を表しているとしします。これを $\bar{A}_\mu(x)$ に各地点で作用させ続けることで、地点 x から x_1 に行くなら (x は離散化された座標)

$$\begin{aligned}
& (1+ig\bar{A}_\mu(x)\Delta x_\mu)(1+ig\bar{A}_\mu(x+\Delta x)\Delta x_\mu)\cdots \\
& \simeq (1+ig\bar{A}_\mu(x)\Delta x_\mu+ig\bar{A}_\mu(x+\Delta x)\Delta x_\mu+\cdots) \\
& = \prod_{n=0}^{M-1} (1+ig\bar{A}_\mu(x+n\Delta x)\Delta x_\mu)
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\Delta x^\mu = \frac{x_1^\mu - x^\mu}{M}$$

こんな式になります。 x_1 と x_2 が隣り合った格子上にいるとすれば x_1 と x_2 の差は格子間隔 ae^μ なので

$$\Delta x^\mu = \frac{ae^\mu}{M}$$

(2) は exp を展開した形になっているので、 M の無限大の極限を取れば、exp 内が積分で書けて

$$\begin{aligned}
U_\mu(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^{M-1} (1+ig\bar{A}_\mu(x+n\Delta x)\Delta x_\mu) \\
&= \text{P exp} \left[ig \int_x^{x+ae_\mu} ds_\mu \bar{A}_\mu(x) \right]
\end{aligned} \tag{3}$$

P は $A_\mu(x)$ から $A_\mu(x+ae_\mu)$ に行くまでの経路を指定していることを表し、その経路に沿って (1) が作用することで移動していきます。上でもいったように μ の和を取らないので、 U_μ と書いています。 $\bar{A}_\mu$ がいるので、 $U_\mu(x)$ は $SU(N)$ の要素になっています。方向を指定せずに経路だけを決めているときには

$$U_P(x) = \text{P exp} \left[ig \sum_\mu \int_x^y ds_\mu \bar{A}_\mu(x) \right]$$

のように書かれ、和も取ります。この U_μ のことをリンク変数 (link variable) と呼び、格子場の理論での基本的な量になります。始点 (積分の下限) を y 、終点 (積分の上限) を x として時間発展演算子と同じような表記を使えば $U_\mu(x, y)$ と書けます。式を見て分かるように時間発展演算子と同じ構造をしているので、これが格子上での移動を表現するのだとします。格子間隔自体が微小量だとしたとき、リンク変数は

$$U_\mu(x) \simeq 1 + iag\bar{A}_\mu(x) \tag{4}$$

と近似できます (1 回しか微小移動させないから)。

また、 $x_\mu + ae_\mu$ から x_μ へ移動するリンク変数は (3) において、積分の並びが逆になるだけなので、 $U_{-\mu}(x+ae) = U_\mu^\dagger(x)$ となります (このことから分かるようにリンク変数はユニタリー行列)。 U_μ は μ 方向への移動なので、逆方向の移動のときは $-\mu$ と書くようです。つまり、 $U_\mu(x)$ は x から $x+ae_\mu$ に移動することを表し、 $U_{-\mu}(x)$ は x から $x-ae_\mu$ に移動することを表します。

リンク変数がゲージ変換に対してどう振舞うのかを調べます。(4) での格子間隔をさらに M で分割して

$$\delta U_\mu(x) = \exp[i \frac{a}{M} g \bar{A}_\mu(x)] \simeq 1 + i \frac{a}{M} g \bar{A}_\mu(x) = 1 + i\epsilon g \bar{A}_\mu(x)$$

これを N 回作用させることで (4) になって

$$\begin{aligned}
U(x) &= \delta U_\mu(x) \delta U_\mu(x + \epsilon \mathbf{e}_\mu) \cdots \delta U_\mu(x + (a - \epsilon) \mathbf{e}_\mu) \\
&= \exp[i\epsilon g \bar{A}_\mu(x)] \exp[i\epsilon g \bar{A}_\mu(x + \epsilon \mathbf{e}_\mu)] \cdots \exp[i\epsilon g \bar{A}_\mu(x + (a - \epsilon) \mathbf{e}_\mu)]
\end{aligned}$$

δU_μ のゲージ変換が分かればいいので、これの局所ゲージ変換を考えます。 $\bar{A}_\mu$ がゲージ場なので、ゲージ変換を $G(x)$ としたとき、変換としては

$$\delta U_\mu(x) \Rightarrow \delta U'_\mu(x) = 1 + ig\epsilon \bar{A}'_\mu(x) = 1 + ig\epsilon G(x) \bar{A}_\mu(x) G^\dagger(x) + \epsilon G(x) (\partial_\mu G^\dagger(x))$$

$$\bar{A}'_\mu(x) = G(x) \bar{A}_\mu(x) G^\dagger(x) - \frac{i}{g} G(x) (\partial_\mu G^\dagger(x))$$

このようになります (ヤン・ミルズ理論」の場合から共変微分の g の符号を反転させているので、 A_μ での g の符号も反転させています)。この式は ϵ^2 を無視するなら ($GG^\dagger = 1$)

$$\begin{aligned}
1 + ig\epsilon G(x) \bar{A}_\mu(x) G^\dagger(x) + \epsilon G(x) (\partial_\mu G^\dagger(x)) &\simeq G(x) (1 + ig\epsilon \bar{A}_\mu(x)) (G^\dagger(x) + \epsilon \partial_\mu G^\dagger(x)) \\
&= G(x) \exp[ig\epsilon \bar{A}_\mu(x)] (1 + \epsilon \partial_\mu G^\dagger(x)) \\
&= G(x) \exp[ig\epsilon \bar{A}_\mu(x)] G^\dagger(x + \epsilon \mathbf{e}_\mu)
\end{aligned}$$

と近似的に書けます。これを使うことで

$$\delta U'_\mu(x) = 1 + ig\epsilon \bar{A}'_\mu(x) = G(x) \exp[ig\epsilon \bar{A}_\mu(x)] G^\dagger(x + \epsilon \mathbf{e}_\mu)$$

よって $U'_\mu(x)$ は

$$U'_\mu(x) = G(x) U_\mu(x) G^\dagger(x + \epsilon \mathbf{e}_\mu)$$

変換 G が始点となる x と終点となる $x + a\mathbf{e}_\mu$ によって構成されています。

リンク変数を使ってゲージ不変な量を作ります。リンク変数 $U(x)$ は x から隣の格子点 $x + a\mathbf{e}_\mu$ に動くことを表しているので、格子上で4角形を描くように動かしてみるなら

$$\begin{aligned}
P_{\mu\nu}(x) &= U_\mu(x) U_\nu(x + a\mathbf{e}_\mu) U_{-\mu}(x + a\mathbf{e}_\mu + a\mathbf{e}_\nu) U_{-\nu}(x + a\mathbf{e}_\nu) \\
&= U_\mu(x) U_\nu(x + a\mathbf{e}_\mu) U_\mu^\dagger(x + a\mathbf{e}_\nu) U_\nu^\dagger(x)
\end{aligned}$$

のようになります。 μ, ν 平面だとして左から読んでいくと、 x から $U_\mu(x)$ によって μ 方向に動かされ $x_1 = x + a\mathbf{e}_\mu$ に行き、 x_1 から $U_\nu(x + a\mathbf{e}_\mu)$ によって ν 方向に動かされ $x_2 = x + a\mathbf{e}_\mu + a\mathbf{e}_\nu$ に行き、 x_2 から $U_{-\mu}(x + a\mathbf{e}_\mu + a\mathbf{e}_\nu)$ によって $-\mu$ 方向に動かされ $x_3 = x + a\mathbf{e}_\nu$ に行き、 x_3 で $U_{-\nu}(x + a\mathbf{e}_\nu)$ によって $-\nu$ 方向に動かされ x に戻るといようになっています。これ自体は明らかにゲージ不変な量になっていませんがトレースを取ってみると、トレースの巡回性から

$$\begin{aligned}
\text{tr}[P'_{\mu\nu}(x)] &= \text{tr}[U_\mu(x)U_\nu(x+ae_\mu)U_\mu^\dagger(x+ae_\nu)U_\nu^\dagger(x)] \\
&= \text{tr}[G(x)U_\mu(x)G^\dagger(x+ae_\mu)G(x+ae_\mu)U_\nu(x+ae_\mu)G^\dagger(x+ae_\mu+ae_\nu) \\
&\quad \times G(x+ae_\mu+ae_\nu)U_\mu^\dagger(x+ae_\nu)G^\dagger(x+ae_\nu)G(x+ae_\nu)U_\nu^\dagger(x)G^\dagger(x)] \\
&= \text{tr}[G(x)U_\mu(x)U_\nu(x+ae_\mu)U_\mu^\dagger(x+ae_\nu)U_\nu^\dagger(x)G^\dagger(x)] \\
&= \text{tr}[U_\mu(x)U_\nu(x+ae_\mu)U_\mu^\dagger(x+ae_\nu)U_\nu^\dagger(x)]
\end{aligned}$$

となって、ゲージ不変になっていることが分かります。これが格子上でリンク変数を動かすことで最初に作れる意味のあるゲージ不変な量で、 $P_{\mu\nu}(x)$ をプラケット (plaquette) と呼びます。最初に作れるというのは、4 角形より簡単な量である $U_\mu(x)U_{-\mu}(x+ae_\mu)$ は定数になってしまい、意味のある量になっていないためです。

ゲージ不変な量が作れたので、それによってゲージ不変な作用を表現できるのではないかと考えます。なので、非可換ゲージ場のテンソルの形

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^i t^i &= \partial_\mu A_\nu^i t^i - \partial_\nu A_\mu^i t^i - ig[A_\mu^i t^i, A_\nu^j t^j] \\
\bar{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}^i t^i = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu + ig[\bar{A}_\mu, \bar{A}_\nu]
\end{aligned} \tag{5}$$

をうまく再現できるようにします (これも g の符号を反転させてます)。そうすると、リンク変数の中に A_μ の微分が必要になってくるので、それが出てくるように近似的な操作を行います。格子間隔 a が十分微小だとして、リンク変数内の $\bar{A}_\mu(x)$ の位置が x でなく中間地点 $x+ae_\mu/2$ だとします。こうすることで、 $A(x+ae_\mu/2)$ を展開することで、プラケットのリンク変数は近似的に

$$\begin{aligned}
U_\mu(x) &\simeq \exp[iag\bar{A}_\mu(x+ae_\mu/2)] \simeq \exp[iag\bar{A}_\mu(x) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2] \\
U_\nu(x+ae_\mu) &\simeq \exp[iag\bar{A}_\nu(x+ae_\mu+ae_\nu/2)] \simeq \exp[iag\bar{A}_\nu(x) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\nu(x) + ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2] \\
U_\mu^\dagger(x+ae_\nu) &\simeq \exp[-iag\bar{A}_\mu(x+ae_\nu+ae_\mu/2)] \simeq \exp[-iag\bar{A}_\mu(x) - ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\mu(x) - ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2] \\
U_\nu^\dagger(x) &\simeq \exp[-iag\bar{A}_\nu(x+ae_\nu/2)] \simeq \exp[-iag\bar{A}_\nu(x) - ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2]
\end{aligned}$$

となって、微分を取り出せます。これらによってプラケットを計算します。 $\bar{A}_\mu$ は非可換なので、ハウスドルフの公式

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]}$$

を使うことで、 $U_\mu(x)U_\nu(x+ae_\mu)$ は

$$\begin{aligned}
U_\mu(x)U_\nu(x+ae_\mu) &\simeq \exp[iag\bar{A}_\mu(x) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2] \\
&\quad \times \exp[iag\bar{A}_\nu(x) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\nu(x) + ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2] \\
&= \exp[iag(\bar{A}_\mu(x) + \bar{A}_\nu(x)) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2 \\
&\quad + ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2 + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\nu(x) - a^2g^2[\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]/2]
\end{aligned}$$

a^2 のオーダーまで取っています。 $U_\mu^\dagger(x+ae_\nu)U_\nu(x+ae_\mu)$ は

$$\begin{aligned}
U_\mu^\dagger(x + a\mathbf{e}_\nu)U_\nu^\dagger(x) &\simeq \exp[-ia g \bar{A}_\mu(x) - ia^2 g \partial_\nu \bar{A}_\mu(x) - ia^2 g \partial_\mu \bar{A}_\nu(x)/2] \\
&\times \exp[-ia g \bar{A}_\nu(x) - ia^2 g \partial_\nu \bar{A}_\nu(x)/2] \\
&= \exp[-ia g (\bar{A}_\mu(x) + \bar{A}_\nu(x)) - ia^2 g \partial_\nu \bar{A}_\mu(x) \\
&\quad - ia^2 g \partial_\mu \bar{A}_\nu(x)/2 - ia^2 g \partial_\nu \bar{A}_\nu(x)/2 - a^2 g^2 [\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]]
\end{aligned}$$

なので、ブラケットは

$$\begin{aligned}
P_{\mu\nu} &\simeq \exp[ia g (\bar{A}_\mu(x) + \bar{A}_\nu(x)) + ia^2 g \partial_\mu \bar{A}_\mu(x)/2 + ia^2 g \partial_\nu \bar{A}_\nu(x)/2 + ia^2 g \partial_\mu \bar{A}_\nu(x) - a^2 g^2 [\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]/2] \\
&\times \exp[-ia g (\bar{A}_\mu(x) + \bar{A}_\nu(x)) - ia^2 g \partial_\nu \bar{A}_\mu(x) - ia^2 g \partial_\mu \bar{A}_\mu(x)/2 - ia^2 g \partial_\nu \bar{A}_\nu(x)/2 - a^2 g^2 [\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]] \\
&= \exp[ia^2 g (\partial_\mu \bar{A}_\nu(x) - \partial_\nu \bar{A}_\mu(x)) - a^2 g^2 [\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]] \\
&= \exp[ia^2 g (\partial_\mu \bar{A}_\nu(x) - \partial_\nu \bar{A}_\mu(x) + ig [\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)])]
\end{aligned}$$

よって (5) との比較から a が微小なときに

$$P_{\mu\nu} = \exp[ia^2 g \bar{F}_{\mu\nu}] \quad (a \rightarrow 0)$$

と書けることが分かり、 $\bar{F}_{\mu\nu}$ との対応が取れます。

後は、ゲージ場の作用を $P_{\mu\nu}$ を使って表現出来れば、格子上でのゲージ理論が作れたことになります。ブラケットを a^4 のオーダーまで展開すると

$$P_{\mu\nu} = 1 + ia^2 g \bar{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} a^4 g^2 (\bar{F}_{\mu\nu})^2 + \dots$$

となって、 $(\bar{F}_{\mu\nu})^2$ が出てくるので、この部分を取り出すために実部だけを拾うようにして

$$\text{Re} P_{\mu\nu} \simeq 1 - \frac{1}{2} a^4 g^2 (\bar{F}_{\mu\nu})^2$$

$SU(N)$ の行列要素に対してトレースを取って

$$\text{tr} P_{\mu\nu} \simeq \text{tr} (1 - \frac{1}{2} a^4 g^2 (\bar{F}_{\mu\nu})^2) = N - \frac{1}{2} a^4 g^2 \text{tr} (\bar{F}_{\mu\nu})^2$$

後は N を外から引くことで、 $N - \text{tr} P_{\mu\nu}$ によって a^4 のオーダーでゲージ場の作用

$$S_E = - \int d^4 x \frac{1}{2} \text{tr} (\bar{F}_{\mu\nu})^2 \quad (e^{iS} \Rightarrow e^{S_E})$$

と同じ格好をしたものが取り出せることが分かります (S_E は有限温度の場の理論での「ファインマン則～虚時間法～」を見てください)。また、実部を取ることにによる別の利点があります。これは、ブラケット $P_{\mu\nu}$ の進行方向が逆向きになっているものはブラケットのエルミート共役 $P_{\mu\nu}^\dagger$ に対応している (リンク変数の関係 $U_\mu^\dagger(x) = U_{-\mu}(x + a\mathbf{e}_\mu)$ から) ために

$$\text{Re} P_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (P_{\mu\nu} + P_{\mu\nu}^\dagger)$$

とすることで、ブラケットの向きを逆向きにしたときの寄与を含められるからです。
上手いこと係数をくっつけて、全ての可能なブラケットの和を取ることで

$$\begin{aligned} S_W &= \frac{\beta}{2} \sum_x \sum_{1 \leq \mu, \nu \leq 4} \left(1 - \frac{1}{N} \text{tr} P_{\mu\nu}(x)\right) \quad (\mu \neq \nu) \\ &= \beta \sum_{\square} \left(1 - \frac{1}{N} \text{tr} P_{\square}(x)\right) \\ \beta &= \frac{2N}{g^2} \end{aligned}$$

この作用をウィルソン作用 (wilson action) と言います。□ がブラケットの和を取ることを表していて、 μ, ν の和の形で書いているときに $1/2$ が出てくるのは μ と ν の入れ替えによるブラケットを省くためです。 x は離散的なので和を取るようにし、 a^4 と組み合わせることで 4 次元の空間積分になります。ウィルソン作用が格子ゲージ理論における基本的な作用になっています。

最後に重要な量であるポリヤコフループ (Polyakov loop) について触れておきます。定義自体は単純で

$$L(\mathbf{x}) = \text{tr} \prod_{n_\tau=1}^{N_\tau} U_4(\mathbf{x}, n_\tau)$$

となっています。 U_4 は時間方向のリンク変数で n_τ が時間方向の格子点です。つまり、3 次元の位置を固定した時間方向のリンク変数を $n_\tau = 1$ から $n_\tau = N_\tau$ までかけていった量です。時間を t でなく τ と書いているのは、ユークリッド的なので $\tau = it$ だからです。トレースがいるためにポリヤコフループはゲージ不変になっています。今の場合ではリンク変数は時間方向にしか動かないので、ゲージ変換も時間方向にしか動かなく

$$U_4(\mathbf{x}, n_\tau) \Rightarrow G(\mathbf{x}, n_\tau) U_4(\mathbf{x}, n_\tau) G^\dagger(\mathbf{x}, n_\tau + 1)$$

と変換されます。なので、 $n_\tau = 1$ を始点とするなら ($\mathbf{x}$ は省いて書きます)

$$\begin{aligned} L'(\mathbf{x}) &= \text{tr} G(1) U_4(1) G^\dagger(2) G(2) U_4(2) G^\dagger(3) \cdots G(N_\tau) U_4(N_\tau) G^\dagger(N_\tau + 1) \\ &= \text{tr} G(1) U_4(1) U_4(N_\tau) G^\dagger(N_\tau + 1) \end{aligned}$$

このとき、 $G(1) = G(N_\tau + 1)$ という条件かけるとゲージ不変になります。この制限は N_τ まで行ったら次は元の $n_\tau = 1$ に戻ってこいというものです。この条件は通常の場合の理論では手につけたように見えますが、有限温度に持っていくと自然と出てくる条件です (有限温度の場の理論の「虚時間法」参照)。なので、ポリヤコフループは有限温度で大事な量になります。

ポリヤコフループの意味にも触れておきます。そのために、重いフェルミオンに対する運動方程式を作ります。通常のディラック方程式は

$$(\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0$$

このとき質量が運動量に比べて十分大きい $m \gg |\mathbf{p}|$ とします。そうするとエネルギー $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ は近似的に

$$E = m$$

となります。つまり、ハミルトニアン演算子による式が (重いフェルミオン場を Ψ として)

$$\hat{H}\psi = E\psi \Rightarrow \hat{H}\Psi = m\Psi$$

このような静的な場合の式になるので (正エネルギーのみを考えて)、ディラック方程式での三次元微分が落ちて

$$(\gamma_0 \partial_0 - m)\Psi = 0 \quad (6)$$

と書き換えられます。さらにエネルギーを新しく、 $E' = E - m$ と定義することで、 $E' = 0$ より

$$\gamma_0 \partial_0 \psi = 0$$

となり、これが重いフェルミオンに対するディラック方程式です。この式での ψ はスピノールの 4 成分のうち上 2 成分しか考えていません ($\gamma_0 \psi = \psi$)。最後のエネルギーの置き換えた後にフェルミオン場が ψ になっているのは、(6) での重いフェルミオン場 Ψ を $\Psi = e^{imt} \psi$ と書き換えたものに対応するからです (場 ψ のエネルギー E を $-m$ ずらしている)。

これを電磁場があるときに拡張するには単に共変微分に書き換えればいいので (γ_0 は意味がないので省いて)

$$iD_0 \psi = 0$$

$$i\partial_0 \psi = -g\bar{A}_0 \psi$$

ユークリッド化すれば

$$\partial_4 \psi(\tau, \mathbf{x}) = i\bar{A}_4(\tau, \mathbf{x})\psi(\tau, \mathbf{x}) \quad (\partial_4 = \frac{\partial}{\partial \tau})$$

この解は

$$\psi(\tau, \mathbf{x}) = \exp \left[i \int_0^\tau d\tau' \bar{A}_4(\tau', \mathbf{x}) \right] \psi(0, \mathbf{x})$$

のように書くことが出来ます。 τ を β とし

$$\psi(\beta, \mathbf{x}) = \exp \left[i \int_0^\beta d\tau' \bar{A}_4(\tau', \mathbf{x}) \right] \psi(0, \mathbf{x}) = \Omega_\beta(\mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x})$$

とします。 Ω_β が $0 \sim \beta$ の範囲内でのポリヤコフループの連続極限になってることが分かります。ここで統計力学を持ち込みます (詳しいことは有限温度の場の理論の「虚時間法」参照)。重いフェルミオンとゲージ場による分配関数は、そのハミルトニアン H_{f+g} と温度 T によって ($\beta = 1/T$)

$$Z_{f+g} = \text{tr} e^{-\beta H_{f+g}} = \sum_a \langle a | e^{-\beta H_{f+g}} | a \rangle$$

このように定義されています (f はフェルミオン、 g はゲージ場を表します)。そして、重いフェルミオンを含まないある状態 b に、重いフェルミオンの場の演算子 $\psi(0, \mathbf{x})$ を作用させれば、 $\tau = 0, \mathbf{x}$ での重いクォークを 1 個生成できるので

$$Z_{f+g} = \sum_b \langle b | \psi(0, \mathbf{x}) e^{-\beta H_{f+g}} \psi^\dagger(0, \mathbf{x}) | b \rangle$$

そして $e^{\beta H} \psi(0, \mathbf{x}) e^{-\beta H} = \psi(\beta, \mathbf{x})$ を使うことで

$$Z_{f+g} = \sum_b \langle b | e^{-\beta H} \psi(\beta, \mathbf{x}) \psi^\dagger(0, \mathbf{x}) | b \rangle$$

ここに先ほどの解を代入すれば

$$\begin{aligned} Z_{f+g} &= \sum_b \langle b | e^{-\beta H_{f+g}} \Omega_\beta(\mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x}) \psi^\dagger(0, \mathbf{x}) | b \rangle \\ &= \sum_b \langle b | e^{-\beta H_g} \Omega_\beta(\mathbf{x}) \psi(0, \mathbf{x}) \psi^\dagger(0, \mathbf{x}) | b \rangle \end{aligned}$$

b はゲージ場の固有状態なので H_f は消えます。さらに $\psi(0, \mathbf{x}) \psi^\dagger(0, \mathbf{x})$ の組み合わせは粒子数演算子に対応するので、定数しか返さないことから無視してしまって

$$Z_{f+g} = \text{tr}[e^{-\beta H_g} \Omega_\beta(\mathbf{x})]$$

両辺を Z_g で割ると右辺の形は H_g による熱平均の式になっているので

$$Z_f = \frac{\text{tr}[e^{-\beta H_g} \Omega_\beta(\mathbf{x})]}{Z_g} = \langle \Omega_\beta(\mathbf{x}) \rangle$$

つまり、連続極限でのポリヤコフループの熱平均は重いフェルミオンの分配関数に対応します。この意味をさらにみるためにヘルムホルツの自由エネルギー

$$F = -T \log Z$$

$$Z = \exp[-\beta F]$$

を使うと

$$\langle \Omega_\beta(\mathbf{x}) \rangle = \exp[-\beta F_f]$$

となっていることが分かります。 F_f が無限大ならポリヤコフループの熱平均は0になります。ヘルムホルツの自由エネルギーは系が可能な仕事の最大値であるので、 $\langle \Omega_\beta(\mathbf{x}) \rangle = 0$ は外からフェルミオンを加えるのに無限大のエネルギーが必要になるという意味になります。つまりこの場合、重いフェルミオンによる系は外部から新しいフェルミオン、言い換えれば電荷を加えることができない系を作っています。このような系は実際に存在すると考えられていて、ハドロンの内部です。ハドロンの内部ではクォークによる色荷が0(無色)になるように構成されているために、色荷を自由に操作できないからです。

重いフェルミオンを重いクォーク、ゲージ場をグルーオンだとすれば、 $\langle \Omega_\beta(\mathbf{x}) \rangle = 0$ はハドロンの内部にクォークが閉じ込められている現象を表すのだと解釈できます。このため、 $\langle \Omega_\beta(\mathbf{x}) \rangle = 0$ はハドロンの閉じ込めを表すことになります。で、 $\langle \Omega_\beta(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$ ならハドロンの閉じ込めはなくなった状態になるだろうと考えられるので、ポリヤコフループ $L(\mathbf{x})$ は閉じ込めに対するオーダーパラメータになっています。で、閉じ込めがなくなる $\langle L(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$ には、格子ゲージ理論での数値計算によれば、 $T = 100 \sim 300(\text{MeV})$ 程度でなるようです(閉じ込め相から非閉じ込め相への相転移)。近似の仕方や数値計算のアルゴリズムでバラつきがあるので最大限に幅を取るとこれぐらいです。この閉じ込めから開放された状態がクォーク・グルーオンプラズマ(quark-gluon plasma)と呼ばれる状態です。

言葉の説明をしておきます。質量が非常に大きいとき粒子はほぼ動けなくなるために静的(static)であると表現されます。で、ヘルムホルツの自由エネルギー F_f が無限大になるためにはそのフェルミオンの質量が無限大になる必要があります。なので、この状態のクォークを静的クォーク(static quark)と言います。ついでに動的クォーク(dynamical quark)という言い方もありますが、これは、グルーオンに寄与するクォーク(真空偏極での生成、消滅するクォーク)のことを言います。

ポリヤコフグループに対する対称性にも簡単に触れておきます。リンク変数 U_4 に対して

$$U'_4(\mathbf{x}, n_\tau = 1) = z U_4(\mathbf{x}, n_\tau = 1)$$

$$z = zI$$

$$\det z = 1$$

$$zz^\dagger = 1 \quad (zz^\dagger = 1)$$

$$z = e^{2\pi i n/N} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$z^N = 1$$

という変換を考えます (I は $N \times N$ の単位行列)。 $U_4(\mathbf{x}, n_\tau = 1)$ としていますが、 $n_\tau = 1$ でなくてもどこかに固定されていればいいです。この変換は $Z(N)$ と呼ばれ、 z が $Z(N)$ の構成要素です。 $Z(N)$ は $SU(N)$ の中心 (center) と群論で言われ、このため中心対称 (center symmetry) とも呼ばれます ($Z(N)$ は $SU(N)$ の部分群になっている)。群の中心と呼ばれるものの特徴は全ての群の要素と交換することです (今の場合では単位行列しかくっついていないので交換するようになっている)。なので、 z はリンク変数と交換します。このため、出発点に帰ってくるように構成されているプラケットでは U_4 があれば必ず $U_4^\dagger$ がいるので、明らかに $Z(N)$ に対して不変です。なのでプラケットによって構成させる作用も不変です。しかし、ポリヤコフグループでは $z^\dagger$ が現れないために

$$L(\mathbf{x}) \Rightarrow zL(\mathbf{x})$$

となり、不変になりません。

ポリヤコフグループが0でないならポリヤコフグループにおいて $Z(N)$ 対称性はなくなりますが、作用は不変です。このように作用は不変でも他の量が不変になっていないというのは、対称性の破れに対応します。このこととハドロンの閉じ込めを合わせることで、 $Z(N)$ 対称性が破れているとき ($\langle L(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$)、ハドロンの閉じ込めはなくなっていることになります。そして、 $Z(N)$ 対称性が破れていない $\langle L(\mathbf{x}) \rangle = 0$ では閉じ込めがあることになります。

・補足

定義の仕方で、実害はそれほどないんですが、気になると少し混乱する部分があるので触れておきます。話は簡単に共変微分の定義を

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a t^a, \quad D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a$$

のどちらを選ぶのかというだけです。ただ、最初からユークリッド空間のみを考えているだけなら g の符号を反転させればよいということになるんですが、ミンコフスキー空間か始めてユークリッド空間に移すという手順を踏むとめんどうになります。

格子ゲージ理論ではほぼ確実に、ゲージ場のユークリッド化に $A_0 = -iA_4$ を使うので、ユークリッド化の定義には混乱が生じないはずですが、しかし、この定義だとミンコフスキー空間での共変微分とユークリッド空間での共変微分では、最初に触れたように g の符号が反転します。ここが注意すべきところです。ミンコフスキー空間の時点で電磁場での共変微分のように $-g$ で定義して、ユークリッド空間で $+g$ になるように定義していたりする場合があります。なので、いきなりスカラー場やフェルミオン場の共変微分が出てきたときに、どの定義が使われているのか把握していないとおかしくなります。

ここまでの話なら単なる g の符号だけの問題のように思えますが、リンク変数のゲージ変換にも影響を与えます。これは $\delta U_\mu(x)$ の変換を見ればすぐに分かります。上での場合と符号を反転させると

$$\delta U_\mu(x) \Rightarrow \delta U'_\mu(x) = 1 + ig\epsilon \bar{A}'_\mu(x) = 1 + ig\epsilon G(x) \bar{A}_\mu(x) G^\dagger(x) - \frac{\epsilon}{g} G(x) (\partial_\mu G^\dagger(x))$$

$$\bar{A}'_\mu(x) = G(x) \bar{A}_\mu(x) G^\dagger(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu G(x)) G^\dagger(x)$$

となるので、ここですでに異なった結果を出すことが予想できます。この形だと比較しづらいので、ゲージ場のゲージ変換をエルミート共役版にして

$$\delta U_\mu(x) \Rightarrow \delta U'_\mu(x) = 1 + ig\epsilon \bar{A}'_\mu(x) = 1 + ig\epsilon G(x) \bar{A}_\mu(x) G^\dagger(x) + \frac{\epsilon}{g} (\partial_\mu G(x)) G^\dagger(x)$$

$$\bar{A}'_\mu(x) = G(x) \bar{A}_\mu(x) G^\dagger(x) + \frac{i}{g} (\partial_\mu G(x)) G^\dagger(x)$$

同じように計算すると

$$\begin{aligned} 1 + ig\epsilon G(x) \bar{A}_\mu(x) G^\dagger(x) + \epsilon (\partial_\mu G(x)) G^\dagger(x) &\simeq (G(x) + \epsilon \partial_\mu G(x)) (1 + ig\epsilon \bar{A}_\mu(x)) G^\dagger(x) \\ &= (1 + \epsilon \partial_\mu G(x)) \exp[ig\epsilon \bar{A}_\mu(x)] G^\dagger(x) \\ &= G(x + \epsilon e_\mu) \exp[ig\epsilon \bar{A}_\mu(x)] G^\dagger(x) \end{aligned}$$

となるので $U'_\mu(x)$ は

$$U'_\mu(x) = G(x + ae_\mu) U_\mu(x) G^\dagger(x)$$

G と $G^\dagger$ の変数が交換して出てきています。この場合では右から読んでいくことで、 $G^\dagger$ が x で作用し、リンク変数によって x から $x + ae_\mu$ に運ばれ、 $x + ae_\mu$ で G が作用するようになっています。このようにゲージ変換の作用の仕方が反対向きになります。といっても、結果自体は変わらないのでどちらでやっても害はないんですが、リンク変数の順序に気をつける必要が出てきます。

例えば、プラケットを

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu}(x) &= U_\mu(x) U_{-\nu}(x + ae_\nu) U_{-\mu}(x + ae_\mu + ae_\nu) U_\nu(x + ae_\mu) \\ &= U_\mu(x) U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + ae_\nu) U_\nu(x + ae_\mu) \end{aligned}$$

とします。 μ, ν 平面だとして右側から読んでいくと、 $x_1 = x + ae_\mu$ から $U_\nu(x + ae_\mu)$ によって ν 方向に動かされ $x_2 = x + ae_\mu + ae_\nu$ に行き、 x_2 から $U_{-\mu}(x + ae_\mu + ae_\nu)$ によって $-\mu$ 方向に動かされ $x_3 = x + ae_\nu$ に行き、 x_3 から $U_{-\nu}(x + ae_\nu)$ によって $-\nu$ 方向に動かされ x に行き、 x で $U_\mu(x)$ によって μ 方向に動かされ $x_1 = x + ae_\mu$ に戻るといふようになっています。これの変換を行えば

$$\begin{aligned} \text{tr}[P'_{\mu\nu}(x)] &= \text{tr}[U'_\mu(x) U_\nu'^\dagger(x) U_\mu'^\dagger(x + ae_\nu) U'_\nu(x + ae_\mu)] \\ &= \text{tr}[G(x + ae_\mu) U_\mu(x) G^\dagger(x) G(x) U_\nu^\dagger(x) G^\dagger(x + ae_\nu) G(x + ae_\nu) \\ &\quad \times U_\mu^\dagger(x + ae_\nu) G^\dagger(x + ae_\mu + ae_\nu) G(x + ae_\nu + ae_\mu) U_\nu(x + ae_\mu) G^\dagger(x + ae_\mu)] \\ &= \text{tr}[G(x + ae_\mu) U_\mu(x) U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + ae_\nu) U_\nu(x + ae_\mu) G^\dagger(x + ae_\mu)] \\ &= \text{tr}[U_\mu(x) U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + ae_\nu) U_\nu(x + ae_\mu)] \end{aligned}$$

となります。ポリヤコフグループでは左から読んでいくのが自然なので、こっちの定義だと不自然なかんじになります (反対方向に進んでいるようになる)。

ついでに、作用も出しておきます。ゲージ場を中間点においたとき

$$U_\mu(x) \simeq \exp[iag\bar{A}_\mu(x + ae_\mu/2)] \simeq \exp[iag\bar{A}_\mu(x) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2]$$

$$U_\nu(x + ae_\mu) \simeq \exp[iag\bar{A}_\nu(x + ae_\mu + ae_\nu/2)] \simeq \exp[iag\bar{A}_\nu(x) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\nu(x) + ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2]$$

$$U_\mu^\dagger(x + ae_\nu) \simeq \exp[-iag\bar{A}_\mu(x + ae_\nu + ae_\mu/2)] \simeq \exp[-iag\bar{A}_\mu(x) - ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\mu(x) - ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2]$$

$$U_\nu^\dagger(x) \simeq \exp[-iag\bar{A}_\nu(x + ae_\nu/2)] \simeq \exp[-iag\bar{A}_\nu(x) - ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2]$$

$U_\mu(x)U_\nu^\dagger(x)$ は

$$\begin{aligned} U_\mu(x)U_\nu(x + ae_\mu) &\simeq \exp[iag\bar{A}_\mu(x) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2] \exp[-iag\bar{A}_\nu(x) - ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2] \\ &= \exp[iag(\bar{A}_\mu(x) - \bar{A}_\nu(x)) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2 - ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2 + a^2g^2[\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]/2] \end{aligned}$$

$U_\mu^\dagger(x + ae_\nu)U_\nu(x + ae_\mu)$ は

$$\begin{aligned} U_\mu^\dagger(x + ae_\nu)U_\nu(x + ae_\mu) &\simeq \exp[-iag\bar{A}_\mu(x) - ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\mu(x) - ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2] \\ &\quad \times \exp[iag\bar{A}_\nu(x) + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\nu(x) + ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2] \\ &= \exp[-iag(\bar{A}_\mu(x) - \bar{A}_\nu(x)) - ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\mu(x)/2 + ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\nu(x)/2 \\ &\quad + ia^2g\partial_\mu\bar{A}_\nu(x) - ia^2g\partial_\nu\bar{A}_\mu(x) + a^2g^2[\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]/2] \end{aligned}$$

合わせることでブラケットは

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} &\simeq \exp[ia^2g(\partial_\mu\bar{A}_\nu(x) - \partial_\nu\bar{A}_\mu(x)) + a^2g^2[\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]] \\ &= \exp[ia^2g(\partial_\mu\bar{A}_\nu(x) - \partial_\nu\bar{A}_\mu(x) - ig[\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)])] \end{aligned}$$

$[\bar{A}_\mu(x), \bar{A}_\nu(x)]$ の項の符号が上の場合から反転していますが、この場合の $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ は

$$\bar{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i t^i = \partial_\mu\bar{A}_\nu - \partial_\nu\bar{A}_\mu - ig[\bar{A}_\mu, \bar{A}_\nu]$$

なので、一致しています。このように共変微分の定義しだいで地味に変更される部分があることに注意してください。