

リー群

リー群の導入部分の話を数学的に厳密なことはせずに見ていきます。それでも数学用語が出てくるので注意してください。

ほとんどが言葉の定義を与えているだけで、物理への応用の話はしていません。

同じローマ文字の添え字は和を取ります。

I を単位行列としています。

ある集合 S があり、それに含まれる $a, b, c, \dots$ (元、要素) がある演算「 $\cdot$ 」によって、 $a \cdot b$ が S に含まれ、

$$(i) : a \cdot e = e \cdot a = a$$

$$(ii) : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

$$(iii) : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

という関係を満たすとき、その集合を群 (group) と呼びます。 e は (i) を満たすもの (単位元)、 a^{-1} は (ii) を満たすものです (逆元)。(iii) は結合法則です。

「 $\cdot$ 」は積 (multiplication) と呼ばれますが、掛け算である必要はありません。ただし、「 $\cdot$ 」は大抵は和か積になっています。簡単に言えば、群はある集合 S から集合 S への演算規則が与えられたものです。「 $\cdot$ 」を省いて ab とだけ表記される場合もあり、ここでも省いていきます。

見た目から $e = 1$ のように見え、実際に演算が掛け算で a, b が実数なら $e = 1$ ですが、演算が和の場合

$$a + e = a, a + a^{-1} = e$$

なので、 $e = 0, a^{-1} = -a$ となります。

$a \cdot b = b \cdot a$ なら可換 (commutative, abelian)、 $a \cdot b \neq b \cdot a$ なら非可換 (non-commutative, non-abelian) と呼ばれます。演算が和で与えられていれば可換なので、可換な群は加法群 (additive group) と呼ばれ、実数は和によって加法群となります。

物理でよく出てくる群は一般線形群 (general linear group) と呼ばれるものに含まれており、一般線形群は記号で GL と書かれます。線形とついているように、ベクトル空間上の線形演算子 (線形変換。逆変換が可能) の集まりによる群です。線形演算子は基底を指定すれば行列にでき、正則行列の集まりに行列の積の規則を与えたものは群になります。 $n \times n$ の正則行列 M は、単位行列 I によって

$$MI = IM = M, MM^{-1} = M^{-1}M = I, M_1(M_2M_3) = (M_1M_2)M_3$$

となるからです (M^{-1} は M の逆行列)。 $n \times n$ 正則行列による一般線形群は $GL(n)$ 、もしくは GL_n のように書かれます。そして、行列が実数 R なのか複素数 C なのかによっても区別されて、実数なら $GL(n, R)$ や $GL_n(R)$ 、複素数なら $GL(n, C)$ や $GL_n(C)$ と書かれます。

一般線形群に条件 (行列に条件) を加えると

- $\det M = 1 \Rightarrow$ 特殊線形群 (special linear group) $SL(n, R), SL(n, C)$
- $GL(n, R), M^T M = I \Rightarrow$ 直交群 (orthogonal group) $O(n)$
- $GL(n, R), M^T M = I, \det M = 1 \Rightarrow$ 特殊直交群 (special orthogonal group) $SO(n)$
- $GL(n, C), M^\dagger M = I \Rightarrow$ ユニタリー群 (unitary group) $U(n)$
- $GL(n, C), M^\dagger M = I, \det M = 1 \Rightarrow$ 特殊ユニタリー群 (special unitary group) $SU(n)$

という群に分類されます。 $\det$ は行列式、 M^T は M の転置、 $M^\dagger$ は M のエルミート共役です。直交群では実数 (複素数の場合もある)、ユニタリー群では複素数が使われます。直交群は直交行列、ユニタリー群はユニタリー行列によって構成されているというだけで、行列式が 1 だと特殊がくっつきます。ちなみに、 $O(n)$ では行列式の関係

$$\det(M^T M) = (\det M)^2$$

から行列式は

$$(\det M)^2 = 1$$

$$\det M = \pm 1$$

となっています。

他にもシンプレクティック群 (symplectic group) やモジュラー群 (modular group) というのも分野によっては出てきたりしますが、省きます。

直交行列とユニタリー行列には、ベクトルの内積を

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (M\mathbf{v}, M\mathbf{w})$$

とする性質があります。「 $\cdot$ 」と記号が重なるのでベクトル $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ の内積を $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ と表記します。この関係を満たす M は等長写像 (isometry) と呼ばれ、見たとおりベクトルの長さを変えない変換です ($|\mathbf{v}| = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$)。これを M が実数として、ベクトル $\mathbf{v}', \mathbf{w}'$ を直交基底 $\mathbf{e}_i$ で展開してみると (同じローマ文字は和を取る)

$$\begin{aligned} (M\mathbf{v}, M\mathbf{w}) &= (\mathbf{v}', \mathbf{w}') = (v'_i \mathbf{e}_i, w'_j \mathbf{e}_j) = v'_i w'_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} v'_i w'_j \quad ((\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}) \\ &= \delta_{ij} M_{ik} v_k M_{jl} w_l \\ &= M_{ik} M_{il} v_k w_l \\ &= (M^T M)_{kl} v_k w_l \quad (M_{ik} = (M_{ki})^T) \end{aligned}$$

となっているので、 $M^T M = I$ から直交行列になります。複素数なら片方は複素共役を取るので (「 $*$ 」は複素共役)

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_i^* w_j e_i e_j$$

から

$$\begin{aligned} (M\mathbf{v}, M\mathbf{w}) &= \delta_{ij} v_i^* w'_j = \delta_{ij} M_{ik}^* v_k^* M_{jl} w_l = M_{ik}^* M_{il} v_k^* w_l \\ &= (M^\dagger M)_{kl} v_k^* w_l \quad (M_{ik}^* = (M_{ki}^*)^T = (M_{ki})^\dagger) \end{aligned}$$

となって、 $M^\dagger M = I$ からユニタリー行列になります。位相構造の話が等長写像から出てきたりしますが、ここでは触れる必要がないので省きます。

一番分りやすい具体的な例は $SO(n)$ です。これは例えば 2×2 行列なら 2 次元の回転行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

で与えられます。 θ_1 の回転と θ_2 の回転を行えば $\theta_1 + \theta_2$ の回転になり (ただの行列計算から確かめられる)

$$A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$$

このため、 A 同士の積は A のままです。転置との積は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = I$$

そして、行列式は $\det A = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ なので、 $SO(2)$ です。このように回転行列で書けるので、回転群とも呼ばれます。また、 2×2 回転行列は 2 次元ベクトルに対する線形演算子として与えられているので、群そのものが 2 次元ベクトル空間の表現を与えています (「リー群の表現」参照)。

行列式が 1 という条件のために行列の形をかなり限定できる場合もあります。例えば $SU(2)$ では、行列式が 1 の 2×2 ユニタリー行列なので

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad aa^* + bb^* = |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (1)$$

これでエルミート共役が逆行列にもなっています。 a, b は複素数なので

$$a = |a|e^{i\theta_1}, \quad b = |b|e^{i\theta_2}$$

とすれば、 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ から

$$a = e^{i\theta_1} \cos \phi_1, \quad b = e^{i\theta_2} \sin \phi_1$$

そして、 $\theta_1 = \phi_2 + \phi_3$, $\theta_2 = \phi_2 - \phi_3$ と置き換えて

$$a = e^{i(\phi_2 + \phi_3)} \cos \phi_1, \quad b = e^{i(\phi_2 - \phi_3)} \sin \phi_1$$

よって、 $SU(2)$ の行列は

$$\begin{pmatrix} e^{i(\phi_2 + \phi_3)} \cos \phi_1 & e^{i(\phi_2 - \phi_3)} \sin \phi_1 \\ -e^{-i(\phi_2 - \phi_3)} \sin \phi_1 & e^{-i(\phi_2 + \phi_3)} \cos \phi_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は実数の任意パラメータです。任意パラメータが 3 つなのは、(1) から分かるように 2×2 のユニタリー行列は a, b での 4 つの実数の任意パラメータを含んでいますが (複素数なので $a = x + iy$)、行列式が 1 という制限のために 1 つ落ちて、3 つになるためです。

次にリー群 (Lie group) に移ります。ここで言うリー群は一般的なものでなく線形リー群 (matrix Lie group) と呼ばれるものに限定し、リー群と言っていきます。物理でリー群と言ったら大抵はこれを指します。

$GL(n, \mathbb{C})$ の中にある群 G があるとします。 G は群なので G に含まれる行列同士の積は G にいます。その G に含まれる行列による数列 A_i ($i = 1, 2, \dots$) が G に含まれる行列 A に収束するとき、その群 G を線形リー群と言います。このように収束する群 G を数学用語で閉部分群 (closed subgroup) と言い、線形リー群は $GL(n, \mathbb{C})$ の閉部分群です。 $GL(n, \mathbb{C}), GL(n, \mathbb{R}), SL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{R}), O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ は線形リー群です。なので、最初から線形リー群の話をしていくことになります。

例として $O(n)$ が線形リー群であることを示しておきます。直交行列による数列 R_i があり、その収束先を R とします。これは

$$\lim_{i \rightarrow \infty} R_i = R$$

ということです。そして、 $R_i R_i^T$ の極限に対して

$$\left(\lim_{i \rightarrow \infty} R_i \right) \left(\lim_{i \rightarrow \infty} R_i^T \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} (R_i R_i^T)$$

とできることと (連続的な計算なので極限を前に出せる)、 $R_i R_i^T = I$ から

$$RR^T = (\lim_{i \rightarrow \infty} R_i)(\lim_{i \rightarrow \infty} R_i^T) = \lim_{i \rightarrow \infty} (R_i R_i^T) = \lim_{i \rightarrow \infty} I = I$$

よって、収束先の R が直交行列になっているので、 $O(n)$ は線形リー群です。線形リー群は数学的な分類の話なのでこれ以上踏み込まずに進みます。

次にリー代数を定義します。任意の正則行列 X を指数に乘せたものは

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \quad (X^0 = I)$$

と定義されています。ついでに基本的な性質も示しておく

$$\begin{aligned} e^0 &= I \\ e^{X+Y} &= e^X e^Y \quad ([X, Y] = XY - YX = 0) \\ (e^X)^{-1} &= e^{-X} \\ (e^X)^T &= e^{X^T} \\ (e^X)^* &= e^{X^*} \\ (e^X)^\dagger &= e^{X^\dagger} \\ e^{YXY^{-1}} &= Y e^X Y^{-1} \\ \det e^X &= e^{\text{tr} X} \end{aligned}$$

最後を除けば展開の形から証明できます。最後のは「 $U(N)$ と $SU(N)$ 」で導いています。

任意の複素正則行列 X と実数パラメータ t による e^{tX} を考えます。これは実数パラメータ t の連続関数 (写像) を ρ_X とすれば

$$\rho_X(t) = e^{tX}$$

ρ_X は

$$\rho_X(t_1)\rho_X(t_2) = e^{t_1X}e^{t_2X} = e^{(t_1+t_2)X} = \rho_X(t_1+t_2)$$

という性質を持ちます。 ρ_X が連続であるのは例えば t による微分

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX}$$

が成立することを示せばいいですが、省きます。

連続で、 $f(x_1)f(x_2) = f(x_1+x_2)$ となる写像 f を準同型写像 (homomorphism) と言い、 ρ_X は準同形写像です。つまり、 ρ_X は実数による群 (群の演算は和) から $GL(n, \mathbb{C})$ への準同形写像で、この準同形写像を 1 パラメータ部分群 (1 径数部分群、one parameter subgroup) と言います。簡単に言ってしまうと実数パラメータと行列を指数に乘せたものです。今は線形リー群に限定しているので、考えるのは線形リー群への準同形写像です。

先に e^{tX} としなくても、 $\rho_X(t)$ は準同形写像とすることで $\rho_X(t) = e^{tX}$ になります。準同形写像の性質と微分の定義から

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_X(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_X(t + \Delta t) - \rho_X(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_X(t)\rho_X(\Delta t) - \rho_X(t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_X(\Delta t) - I}{\Delta t} \rho_X(t)
\end{aligned}$$

そして、

$$\begin{aligned}
\rho_X(t_1 = 0)\rho_X(t_2 = 0) &= \rho_X(t_1 + t_2 = 0) \\
\rho_X^2(0) &= \rho_X(0) \\
\rho_X(0) &= I
\end{aligned}$$

なので

$$\frac{d\rho_X(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho_X(\Delta t) - \rho_X(0)}{\Delta t} \rho_X(t) = \left. \frac{d\rho_X(t)}{dt} \right|_{t=0} \rho_X(t)$$

最右辺の微分を X とすることで微分方程式として

$$\frac{d\rho_X(t)}{dt} = X\rho_X(t)$$

この解は e^{tX} なので、1 パラメータ部分群は自動的に e^{tX} になります。

ここから、 $GL(n, C)$ の閉部分群である線形リー群を G とします。任意の正則行列 X と実数パラメータ t による e^{tX} がこの G に含まれているとき、その全ての X をリー代数 (Lie algebra) と呼びます。群 G のリー代数を表すには $\mathfrak{g}$ という書体 (フラクトゥール、ドイツ文字) が使われます。 GL なら $\mathfrak{gl}$ 、 O なら $\mathfrak{o}$ となります。リー代数の定義から分かるように、リー代数 $\mathfrak{g}$ は対応する 1 パラメータ部分群 ρ_X を生成します。

行列 X の自由度 (任意パラメータの数) をリー代数の次元と言い、 X の数 (n 次元ベクトルの基底が n 個と同じ意味での個数) に対応します。これは、リー代数 $\mathfrak{g}$ の行列の和 $X + Y$ と、実数 a によるスカラー倍 aX を与えられるために (和やスカラー後も同じリー代数 $\mathfrak{g}$)、リー代数 $\mathfrak{g}$ は実ベクトル空間になるからです。

ちなみに、物理ではリー群 G とリー代数 $\mathfrak{g}$ の区別があいまいで、大抵はリー群 G だけを指して話を進めます。

リー代数の行列 X がどうなっているのかを見ます。 $O(n)$ の場合では、 ρ_X は実数から $O(n)$ への準同形写像なので、 $\rho_X(t) = e^{tX}$ が直交行列となって

$$(e^{tX})^T = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX} \quad ((e^{tX})^T e^{tX} = I)$$

そうすると

$$(e^{tX})^T = e^{tX^T}$$

から

$$e^{tX^T} = e^{-tX} \Rightarrow X^T = -X$$

という関係が出てくるので、 $O(n)$ のリー代数 $\mathfrak{o}(n)$ (行列 X) は $X^T = -X$ という反対称な行列です。 $Z^T = (X + Y)^T = X^T + Y^T$ なので、 $Z^T = -Z$ となっています。

$SO(n)$ では

$$\det e^{tX} = 1$$

が新しく加わり、

$$\det e^{tX} = e^{\text{tr}(tX)}$$

から、 $SO(n)$ のリー代数 $\mathfrak{so}(n)$ では $\text{tr}X = 0$ が必要になります。しかし、 $\mathfrak{o}(n)$ での X は反対称行列なので、 $O(n)$ の時点で $\text{tr}X = 0$ です。つまり、 $SO(n)$ と $O(n)$ のリー代数は同じです ($\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$)。また、反対称行列の自由度は n^2 から対角成分 n を引いて半分にしたもの (対角成分が 0 で非対角成分の半分を決めれば残りも決まるから) なので、 $\mathfrak{o}(n)$ の次元は $n(n-1)/2$ です。

$U(n)$ でも同様に

$$(e^{tX})^\dagger = (e^{tX})^{-1} = e^{-tX}, \quad (e^{tX})^\dagger = e^{tX^\dagger}$$

から、 $U(n)$ のリー代数 $\mathfrak{u}(n)$ は $X^\dagger = -X$ という反エルミート行列となります。今度は反エルミートなので $O(n)$ と $SO(n)$ のときと違い、 $U(n)$ と $SU(n)$ のリー代数は同じにならず、 $\mathfrak{su}(n)$ には $X^\dagger = -X$ と $\text{tr}X = 0$ という条件が付きます。反エルミートな複素行列の自由度は、非対角成分が含むパラメータの数 $2(n^2 - n)$ (実部と虚部のため 2 倍) の半分からの $n^2 - n$ と、対角成分は 0 でなく純虚数でもいいことから n です。よって、 $\mathfrak{u}(n)$ は $n^2 - n + n = n^2$ の次元を持ちます。 $\mathfrak{su}(n)$ ではトレースが 0 ということから 1 つ減って $n^2 - 1$ です。

リー代数は行列なので交換関係を与えられ、リー代数は交換関係後も同じリー代数になるという性質 (A, B がリー代数 $\mathfrak{g}$ なら $[A, B]$ も $\mathfrak{g}$) を持ち、交換関係によって計算の構造が決まります。言い換えれば、リー代数は交換関係を持つベクトル空間ということです (行列の和、積に交換関係を加えたもの)。そして、リー代数はヤコビの恒等式

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

を満たします (展開すれば確かめられる)。これらを抽象化することでリー代数を、反交換しヤコビの恒等式を満たす演算を持つベクトル空間を構成するものと定義できます。

リー代数 $\mathfrak{g}$ をベクトルと同じように扱い、リー代数の基底としての行列 A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, \dots, l$) によって交換関係の形を

$$[A_i, B_j] = f_{ijk} C_k$$

と書いたとき、 f_{ijk} を構造定数 (structure constant) と呼びます。この交換関係に従うものという意味でもリー代数という言葉が使われ、物理ではこれを指していることが多いです。構造定数は、交換関係の性質

$$[A_i, B_j] = -[B_j, A_i]$$

とヤコビの恒等式から

$$f_{ijk} = -f_{jik}, \quad f_{ija}f_{akb} + f_{jka}f_{aib} + f_{kia}f_{ajb} = 0$$

という関係を持ちます。

これがリー群の大まかな概観です。ここから $SO(2), SO(3), SU(2)$ のリー代数を具体的に見ていきます。

一番単純なのが $SO(2)$ のリー代数 $\mathfrak{so}(2)$ です。これは 2×2 の反対称行列で、自由度が $2(2-1)/2 = 1$ なので、形を

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

としか選べないです (a の符号は変えられる)。そうすると、基底ベクトルと同じように考えることで、基底を

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と選べます。 $\mathfrak{so}(2)$ の次元は 1 なので 1 つの基底しか出てきません。 $SO(2)$ の行列は、これを $\exp$ に入れることで

$$\begin{aligned} e^{tX} &= I + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + \frac{1}{6}t^3X^3 + \dots \\ &= I + t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}t^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots & -t + \frac{1}{6}t^3 - \dots \\ t - \frac{1}{6}t^3 + \dots & 1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まり、2 次元の回転行列が出てきます。 X の符号を反転させれば逆回転の行列になります。このように $\mathfrak{so}(2)$ から $SO(2)$ の行列が出てきます。

$\mathfrak{so}(3)$ にしてみます。 $\mathfrak{so}(3)$ の自由度は $3(3-1)/2 = 3$ なので 3 つの実数パラメータ x, y, z によって、 $\mathfrak{so}(2)$ と同じように非対角成分を反対称にして

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

符号のつき方は結果が分かっているからこうしているというだけです。 $\mathfrak{so}(3)$ の次元は 3 なので、3 つの基底による和として

$$\begin{aligned} A &= x \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= xL_x + yL_y + zL_z \end{aligned}$$

と書けます。この L_x, L_y, L_z が $\mathfrak{so}(3)$ の基底としての行列です。今度は 3 つ出てきたので、交換関係を見ます。それぞれの交換関係を計算すると、例えば

$$L_xL_y - L_yL_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L_z$$

のようになっている、

$$[L_x, L_y] = L_z, \quad [L_z, L_x] = L_y, \quad [L_y, L_z] = L_x$$

これらの構造定数を使った形は

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

ϵ_{ijk} ($\epsilon_{123} = +1$) はレヴィ・チビタ記号で、ローマ文字には x, y, z をあてています。これを $SO(3)$ のリー代数と言ったりします。記号の定義でしかありませんが、よく出てくる形は虚数 i を加えて

$$[L'_i, L'_j] = i\epsilon_{ijk} L'_k \quad (L'_i = iL_i)$$

としたものです。

$\mathfrak{so}(3)$ から $SO(3)$ の行列を出すには L_x, L_y, L_z を $\exp$ に入れればよく、例えば L_z を入れれば $\mathfrak{so}(2)$ の結果からすぐに

$$e^{tL_z} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となります。これは z 軸周りの 3 次元回転行列です。よって、 L_x, L_y, L_z によって各軸周りの 3 次元回転行列が作られます。

別の方向から z 軸周りの 3 次元回転行列を見ます。回転角 θ が小さいとして 1 次まで展開すると

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & -\theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + \theta L_z$$

この無限小回転を N 回行うなら R_z^N となります。ここで、 N の無限大の極限で

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = e^x$$

となることを使えば、微小な回転角を $\theta = t/N$ として

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_z^N(\theta = t/N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{N} L_z\right)^N = e^{tL_z}$$

回転行列は $R_z(\theta_1)R_z(\theta_2) = R_z(\theta_1 + \theta_2)$ なので、 R_z は 1 パラメータ部分群で、 L_z はリー代数です。これから言いたいことは、リー代数の行列は無限小変換を起こすものと対応していることです (全単射として、1 対 1 で対応している)。物理ではこれが重要で、リー代数は無限小変換を生成する生成子として扱われます。「生成子・ポアンカレ群」はこの方向の話です。

$\mathfrak{su}(2)$ では $2^2 - 1 = 3$ から 3 つの実数パラメータ x, y, z を持ち、反エルミートでトレースが 0 なので

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iz & -y - ix \\ y - ix & iz \end{pmatrix} \quad (3)$$

となります。1/2 は後の都合でつけているだけです。この次元は 3 なので 3 つの基底によって

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -iz & -y - ix \\ y - ix & iz \end{pmatrix} = \frac{1}{2} x \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} z \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = xS_x + yS_y + zS_z$$

と書けます。 S_x, S_y, S_z はパウリ行列です (正確にはこれに i と 2 をかけたもの。 $\sigma_i = i2S_i$)。パウリ行列なので交換関係は

$$[S_x, S_y] = S_z, [S_z, S_x] = S_y, [S_y, S_z] = S_x \quad ([\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3)$$

となって

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$$

この交換関係の形は $\mathfrak{so}(3)$ と同じなのが分かります。このように交換関係の形が同じとき、同型と呼ばれ、 $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{su}(2)$ は同型です。より数学的な定義では、あるリー代数 $\mathfrak{g}_1$ から別のリー代数 $\mathfrak{g}_2$ への関数 (写像) D が、それぞれの行列 X_1, X_2 に対して

$$D([X_1, X_2]) = [D(X_1), D(X_2)]$$

を満たし (左辺は交換関係を変数にする)、 $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ の行列を全単射で結んでいるとき、 D を同型写像 (isomorphism) と呼び、このとき $\mathfrak{g}_1$ と $\mathfrak{g}_2$ が同型と言います。全単射を外すと準同型写像です。

同型であるのはリー代数 $\mathfrak{so}(3)$ と $\mathfrak{su}(2)$ に対してなのに注意してください。 $SO(3)$ と $SU(2)$ は 1 対 1 で対応していません。これを示します。 $\mathfrak{su}(2)$ の (3) を $SU(2)$ のユニタリー行列 U で

$$A' = UAU^{-1} \tag{4}$$

と変換します。 U は (1) で、 U^{-1} は

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix}$$

これはユニタリー変換なので A' は A の性質を持ったままで

$$A' = \begin{pmatrix} -iz' & -y' - ix' \\ y' - ix' & iz' \end{pmatrix}$$

とします。この変換を

$$D(U)A = UAU^{-1}$$

と表し、 $SU(2)$ を U_1, U_2 とすれば

$$D(U_1 U_2)A = U_1 U_2 A (U_1 U_2)^{-1} = U_1 U_2 A U_2^{-1} U_1^{-1} = D(U_1) U_2 A U_2^{-1} = D(U_1) D(U_2) A$$

となるので、この変換は準同形写像です。ちなみに、 A の行列式は

$$\det A = x^2 + y^2 + z^2$$

A' の行列式は

$$\det A' = \det(UAU^{-1}) = \det A$$

なので行列式が同じになっています。行列式がユークリッド空間の内積と同じなので、この変換は内積を変更しないという意味も持ちます。

A' を計算すると

$$A'_{ab} = U_{ai} A_{ij} U_{jb}^{-1}$$

から

$$\begin{aligned} A'_{11} &= -iz' = U_{1i} A_{ij} U_{j1}^{-1} = U_{11} A_{11} U_{11}^{-1} + U_{11} A_{12} U_{21}^{-1} + U_{12} A_{21} U_{11}^{-1} + U_{12} A_{22} U_{21}^{-1} \\ &= -i|a|^2 z + ab^*(-y - ix) + a^*b(y - ix) + i|b|^2 z \\ &= -iz(|a|^2 - |b|^2) + y(a^*b - ab^*) - ix(ab^* + a^*b) \end{aligned}$$

同様にすることで

$$A'_{12} = -y' - ix' = 2izab - y(a^2 + b^2) - ix(a^2 - b^2)$$

A'_{22} は A'_{11} の符号を反転させたもの、 A'_{21} は A'_{12} の複素共役を取って符号を反転させたものなので (a, b は複素数、 x, y, z は実数)

$$A'_{21} = y' - ix' = 2iza^*b^* + y(a^{*2} + b^{*2}) - ix(a^{*2} - b^{*2})$$

$$A'_{22} = iz = iz(|a|^2 - |b|^2) + y(ab^* - a^*b) + ix(a^*b + ab^*)$$

整理すると

$$\begin{aligned} x' &= -z(ab + a^*b^*) - \frac{i}{2}y(a^2 + b^2 - a^{*2} - b^{*2}) + \frac{1}{2}x(a^2 - b^2 + a^{*2} - b^{*2}) \\ y' &= iz(a^*b^* - ab) + \frac{1}{2}y(a^{*2} + b^{*2} + a^2 + b^2) - \frac{i}{2}x(a^{*2} - b^{*2} - a^2 + b^2) \\ z' &= z(|a|^2 - |b|^2) + iy(a^*b - ab^*) + x(ab^* + a^*b) \end{aligned}$$

a, b を (2) に対応させ、 $\phi_2 = \phi_3 = 0$ とします。これは $b = 0$ なので

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{i}{2}y(a^2 - a^{*2}) + \frac{1}{2}x(a^2 + a^{*2}) \\ y' &= \frac{1}{2}y(a^{*2} + a^2) - \frac{i}{2}x(a^{*2} - a^2) \\ z' &= z|a|^2 \end{aligned}$$

a は $a = e^{i\phi}$ になるので

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{i}{2}y(e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}) + \frac{1}{2}x(e^{2i\phi} + e^{-2i\phi}) = y \sin 2\phi + x \cos 2\phi \\ y' &= \frac{1}{2}y(e^{-2i\phi} + e^{2i\phi}) - \frac{i}{2}x(e^{-2i\phi} - e^{2i\phi}) = y \cos 2\phi - x \sin 2\phi \\ z' &= z \end{aligned}$$

$\phi = \theta/2$ として

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\z' &= z\end{aligned}$$

これは $SO(3)$ の回転行列による 3 次元ベクトルの変換と同じです。

これで、変換 (4) によって $SU(2)$ から $SO(3)$ に持っていけたことになります。しかし、 $SU(2)$ の行列

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

と $SO(3)$ の回転行列

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を比べると、 $\theta + 2\pi$ のとき、 R は変化しないのに対して、 U は符号が反転します ($e^{\pm i\pi} = -1$)。なので、 $SU(2)$ の行列と $SO(3)$ の行列は全単射でなく (1 対 1 でなく 1 対 2 で対応)、 $SO(3)$ の 1 つの行列に対して $SU(2)$ は符号が反転した 2 つの行列 $U, -U$ が対応しています。よって、 $SO(3)$ と $SU(2)$ は同型でないことになり、(4) は $SU(2)$ から $SO(3)$ への準同型写像です。

最後にリー群とリー代数の表現 (representation) について簡単に触れておきます。より細かいことは「リー群の表現」で触れます。リー群の随伴表現 (adjoint representation) というのがあり、これはリー代数 $\mathfrak{g}$ の行列 X をそのリー群 G の行列 A によって

$$X \Rightarrow AXA^{-1}$$

と変換する準同型写像のことを言います。この写像の記号は Ad で

$$\text{Ad}_A(X) = AXA^{-1}$$

のように書かれます ($\text{Ad}(A)X$ としたりもします)。 Ad_A はリー群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ への作用を表しているので、随伴作用 (adjoint action) や共役作用 (conjugation action) と呼ばれます。そして、 $SU(2)$ から $SO(3)$ へ持っていって (4) とこの変換は同じで、 $SU(2)$ は $SO(3)$ での回転行列がベクトルに作用するのと同じ形になっています。このため、 $SU(2)$ の随伴表現はベクトル表現と呼ばれます。 $SO(3)$ の随伴表現もベクトル表現です。

リー代数の行列 X, Y に対して

$$\text{ad}_X(Y) = [X, Y] = XY - YX$$

とする ad_X のことをリー代数の随伴表現といいます。 $[X, Y] = Z$ として、 ad_X の交換関係を見ると

$$\begin{aligned}
[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y](A) &= \mathrm{ad}_X(\mathrm{ad}_Y(A)) - \mathrm{ad}_Y(\mathrm{ad}_X(A)) = [X, [Y, A]] - [Y, [X, A]] \\
&= [X, [Y, A]] - [Y, [X, A]] \\
&= -[A, [X, Y]] \\
&= [[X, Y], A] \\
&= \mathrm{ad}_{[X, Y]}(A) \\
&= \mathrm{ad}_Z(A)
\end{aligned}$$

途中でヤコビの恒等式を使っています。これから ad_X は

$$[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y] = \mathrm{ad}_Z \quad ([X, Y] = Z)$$

という交換関係を持ち、 ad は X を同じ交換関係を満たす別の行列 ad_X へ変換すると言えます。このため ad_X は構造定数を行列に変えるために使われます。これを見ておきます。

ad_X が行列になっているとし、 X の区別を X_i 、 ad_X の行列成分を $(\mathrm{ad}_X)_{ij}$ とし

$$\mathrm{ad}_{X_i}(Y_j) = (\mathrm{ad}_{X_i})_{kj} Y_k$$

が成立するとします (添え字の並びを $(\mathrm{ad}_{X_i})_{jk}$ としても成分が逆になるだけ)。見やすくするために $(\mathrm{ad}_{X_i})_{kj}$ を $(a_i)_{kj}$ と書くことにします。 a_i の交換関係は行列成分を書くと

$$([a_i, a_j])_{mn} = (a_i a_j)_{mn} - (a_j a_i)_{mn} = (a_i)_{ml} (a_j)_{ln} - (a_j)_{ml} (a_i)_{ln}$$

構造定数が

$$f_{ijk} = (\mathrm{ad}_{X_i})_{kj} = (a_i)_{kj}$$

となっているとすれば

$$(a_i)_{ml} (a_j)_{ln} - (a_j)_{ml} (a_i)_{ln} = f_{ilm} f_{jnl} - f_{jlm} f_{inl}$$

構造定数の関係

$$f_{ijk} = -f_{jik}, \quad f_{jnl} f_{lim} + f_{nil} f_{ljm} + f_{ijl} f_{lnm} = 0$$

によって

$$f_{ilm} f_{jnl} - f_{jlm} f_{inl} = f_{jnl} f_{ilm} - f_{inl} f_{jlm} = -f_{jnl} f_{lim} + f_{inl} f_{ljm} = f_{ijl} f_{lnm}$$

これから

$$([a_i, a_j])_{mn} = f_{ijl} f_{lnm} = f_{ijl} (a_l)_{mn}$$

行列成分を外すと

$$[a_i, a_j] = f_{ijl} f_{lnm} = f_{ijl} a_l$$

よって、 ad_{X_i} の行列を $(\text{ad}_{X_i})_{kj} = f_{ijk}$ とすると、 $(\text{ad}_{X_i})_{kj}$ は X と同じ交換関係を満たす行列として存在します。このため、構造定数をリー代数 (生成子) からの行列 $(\text{ad}_{X_i})_{kj}$ に置き換えられます。このように、リー代数と同じ交換関係を満たし、構造定数と対応させられる行列として、随伴表現を定義する場合があります。

例えば、 $\mathfrak{so}(3)$ なら

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k$$

と

$$\text{ad}_{L_i}(L_j) = [L_i, L_j] = (\text{ad}_{L_i})_{kj} L_k$$

から

$$(\text{ad}_{L_i})_{kj} = \epsilon_{ijk}$$

なので、レヴィ・チビタの成分 ($\epsilon_{123} = 1$) を拾っていくと

$$(\text{ad}_{L_1})_{23} = \epsilon_{132} = -1, (\text{ad}_{L_1})_{32} = \epsilon_{123} = 1$$

$$(\text{ad}_{L_2})_{13} = \epsilon_{231} = 1, (\text{ad}_{L_2})_{31} = \epsilon_{213} = -1$$

$$(\text{ad}_{L_3})_{12} = \epsilon_{321} = -1, (\text{ad}_{L_3})_{21} = \epsilon_{312} = 1$$

よって、 ad_{L_i} の行列は

$$(\text{ad}_{L_1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (\text{ad}_{L_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\text{ad}_{L_3}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これは $\mathfrak{so}(3)$ の行列と同じです。よって、 $SO(3)$ の構造定数を $\mathfrak{so}(3)$ の行列で置き換えられます。ただし、常にリー代数の行列で置き換えられるわけではないことに注意してください。実際に、 $\mathfrak{su}(2)$ は 2×2 行列で、その随伴表現の行列は 3×3 行列です ($[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_j$ だから)。

他に基本表現 (fundamental representation) と呼ばれるものがあります。簡単に言えば、リー群の行列が作用する対象そのものに対する表現です。なので、 $GL(n, K)$ での n と $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ で分かります。 $O(3), SO(3)$ なら 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトルにリー群の行列が作用するのでベクトル表現、 $SU(2), SL(2, \mathbb{C})$ なら 2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ で作用するのでスピノール表現 (2 成分スピノールは 2 次元複素ベクトル空間の基底) というようになります。大雑把には、随伴表現は変換した先が同じ交換関係を満たす別の行列の場合、基本表現は元々の行列の場合ということです。

ここでは行列を扱ってきましたが、量子力学での演算子やポアソン括弧もリー代数に含まれます。これらは抽象的リー代数 (abstract Lie algebra) と呼ばれます。ポアソン括弧でもいいのは、 $[\cdot, \cdot]$ の定義を交換関係に限定していないからです。 $[\cdot, \cdot]$ はリー積 (Lie product) と呼ばれます。上での話はリー積が交換関係の場合だったというだけです。「生成子・ポアンカレ群」でポアソン括弧、演算子の交換関係、群論での生成子の話が出てきたのはこのためです。