リー群の表現

「リー群」の最後で触れた群の表現を見ていきます。具体的に $SU(2)$ を使い、他のはほぼ触れていないです。数学の細かことはだいぶ省いてますが、言い回しが数学よりになっています。物理の話はほぼしていないです。
ここで群やリー群と言っているのは線形リー群 (行列による群) です。線形リー群としなくても共通する部分はありますが、一般化をあまり考慮せずに進めているので、線形リー群と思ってください。線形リー群であることを強調するときは線形リー群と書いています。
A, B は線形リー群、X, Y はリー代数に含まれるものとしています。I は単位行列です。
ベクトル空間の基本的な部分は知っているとしています。
ここでの話は有限次元です。

群 G は大雑把には演算規則を持つ集合で、G からあるベクトル空間上の線形演算子の群 $D(G)$ へ持っていけば、そのベクトル空間上で群 G の性質による具体的な計算が可能になります。これが表現 (representation) で、G から $D(G)$ への写像を指します。例えば、ある群 G に含まれる元 (要素)g を表現 Π によって $\Pi(g)$ という行列にします。

素粒子での例としてハドロンでの随伴表現があります。陽子と中性子の 2 重項を作ると、それは「ヤン・ミルズ理論」で触れたように $SU(2)$ 変換に対して不変です。なので、群としては $SU(2)$ の話が出てきます。このとき 3 次元ベクトル空間であるアイソ空間が作られ、そのベクトルをパイオン π として、(π_1, π_2, π_3) が当てられます。このベクトル空間での表現が随伴表現と呼ばれるものに対応します。$SU(2)$ のリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ の随伴表現は 3 次元ベクトル空間上での回転になり、アイソ空間における (π_1, π_2, π_3) の回転を与えます。つまり、核子の $SU(2)$ 不変性から $\mathfrak{su}(2)$ の随伴表現に行くことでパイオンが導入されます。他にも、u, d クォークに対する $\mathfrak{su}(2)$ の随伴表現からでも (π_1, π_2, π_3)、u, d, s クォークの $\mathfrak{su}(3)$ の随伴表現からは 8 個のメソン、クォークのカラーの $\mathfrak{su}(3)$ の随伴表現からは 8 個のグルーオンが出てきます。

このように随伴表現にすることで、元の対称性の変換だけからはすぐには分からない性質が自然と出てきます (変換から直接見ていく例として「湯川理論」や「線形シグマモデル」参照)。これは随伴表現に限定した話でなく、他の表現でも分かることがあったります。これが素粒子をやるときにリー群をやらされる理由でもあって、リー群の構造から粒子の関係が繋がっていきます。大体は随伴表現だけですみます。

表現を見ていきます。準同型写像 (homomorphism) の定義をここでもしておきます。群 G があり、G から別の群 H への写像を F とします。g_1, g_2 を G の元として

$$F(g_1 \cdot g_2) = F(g_1) \circ F(g_2)$$

となるなら、F は準同型写像と呼ばれます ($F(g)$ は H の元)。左辺は G での積、右辺は H での積として区別するために「$\cdot$」,「$\circ$」を使っていますが、これ以降省いていきます。簡単に言えば、準同型写像は群の積の構造を残す写像です。

V はベクトル空間を表し、一般線形群 GL がベクトル空間 V 上で与えられていることを $GL(V)$ と表記します。ある群 G を $GL(V)$ に変換する準同型写像 Π があるとき、Π と V の組 (Π, V)、もしくは Π を群 G の表現 (representation) と言い、V を表現空間と言います。つまり、群 G から $\Pi(G) \in GL(V)$ として $GL(V)$ に持っていったとき、$\Pi(G)$ はベクトル空間 V のベクトル v に $\Pi(G)v$ と作用し、V での線形変換となります。また、V の次元を表現の次元、V が実ベクトル空間なら実表現、複素ベクトル空間なら複素表現と呼びます。というわけで、表現は群 G からベクトル空間上の線形演算子 (線形変換) への写像です。

リー代数に対しては、リー代数の行列 X による e^{tX} から

$$\Pi(e^{tX}) = e^{t\pi(X)}$$

として、準同型写像 π を定義します。これによって Π から

$$\pi(X) = \frac{d}{dt}\Pi(e^{tX})|_{t=0} \tag{1}$$

として求められます。

表現のよく出てくる例が基本表現と随伴表現です。基本表現は $\Pi(A) = A$ となる表現で、ベクトル空間は $n \times n$ 行列の群 $(GL(n, V))$ なら n 次元空間です。つまり、群の行列そのものを線形演算子とする表現です。

随伴表現はリー群 G の行列 A とそのリー代数 $\mathfrak{g}$ の行列 X によって

$$\Pi(A)X = AXA^{-1}$$

としたものです。Π はリー代数によるベクトル空間での表現で、$\Pi(A)$ はリー代数の行列によるベクトル空間上での線形演算子です。

大雑把に実用的に言えば、表現で知りたいのは、基本表現でのベクトル空間を別のベクトル空間に持っていったとき、リー群 G もしくはリー代数 $\mathfrak{g}$ の行列 (基本表現での線形演算子) がどうなって、それがそのベクトル空間でどのように作用しているのかです。

後で使うので関数の変換を導入しておきます。ベクトル空間上の関数を f とし、その関数によるベクトル空間を W とします。群 G に対して (Π, V) と与えられている表現があり、これを関数のベクトル空間 W による別の表現 (Π', W) に移したとします。このとき、G の元を g として、V にいるベクトル v と W にいる関数 f は

$$(\Pi'(g)f)(v) = f(\Pi^{-1}(g)v)$$

と与えられます。$\Pi'(g)$ は W での線形演算子で、群の行列 X, Y に対して $\Pi'(XY) = \Pi'(X)\Pi'(Y)$ となります。

これは座標変換に対応します。3 次元空間上の座標 $\boldsymbol{x}$ の座標変換を T とすれば、変換は $\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$ です。そして、T の座標変換による関数の変換を $f' = A_T f$ とし、3 次元空間上の点に対して $f'(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x})$ とすれば、

$$f'(\boldsymbol{x}') = (A_T f)(\boldsymbol{x}') = f(T^{-1}\boldsymbol{x}')$$

となり、同じ形になります。さらに $\boldsymbol{x}'' = S\boldsymbol{x}'$ として同じことをすれば、$\Pi'(XY) = \Pi'(X)\Pi'(Y)$ を示せます。

具体的な行列を使った例として $SL(2, C)$ を見ます。$SL(2, C)$ の基本表現のベクトル空間は 2 次元複素ベクトル空間です。これを 2×2 エルミート行列によるベクトル空間に持っていきます。エルミート行列を M $(M = M^\dagger)$、$SL(2, C)$ の行列を A とします。2×2 エルミート行列の自由度は 2×2 複素行列の自由度 $2 \times 2 \times 2 = 8$ から非対角成分からの 2 と対角成分からの 2 が減った 4 です ($M = M^\dagger$ で非対角成分は片方から決まり、対角成分は実数)。なので

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$$

対角成分を $a_1 = x_0 + x_3,\ a_2 = x_0 - x_3$ としています。実数 x_0, x_1, x_2, x_3 を係数に展開すると

$$\begin{aligned} M &= x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= x_0\sigma^0 + x_1\sigma^1 + x_2\sigma^2 + x_3\sigma^3 \end{aligned}$$

となって、エルミート行列は 4 次元でのパウリ行列 $\sigma^\mu = (I, \sigma^i)$ で書けます。つまり、エルミート行列は 4 元パウリ行列を基底にする 4 次元ベクトル空間にいます。この 4 次元ベクトル空間の内積 (計量) は行列式から

$$\det M = (x_0 + x_3)(x_0 - x_3) - (x_1 - ix_2)(x_1 + ix_2) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

と与え、x^μ のミンコフスキー空間での内積となります。これに対して、$SL(2, C)$ の行列 A を $AMA^\dagger$ と作用させたものの行列式は $\det A = 1$ から

$$\det(AMA^\dagger) = \det A \det M \det A^\dagger = \det M$$

このため M と $AMA^\dagger$ は同じ計量 (ミンコフスキー計量) を持ちます。なので、$AMA^\dagger$ もミンコフスキー空間上にいます。よって、$\Pi(A)M = AMA^\dagger$ と与えれば $\Pi(A)$ は 2 次元エルミート行列によるベクトル空間上で作用することから、$SL(2, C)$ の 2 次元エルミート行列による表現となります。

$SU(2)$ と $\mathfrak{su}(2)$ を使って表現の話を進めていきます。$SU(2)$ を複素数の多項式によるベクトル空間に持っていくことを考えます。まず、複素数 z_1, z_2 による多項式

$$p(z_1, z_2) = \sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij} z_1^i z_2^j = a_{00} + a_{10} z_1 + a_{01} z_2 + a_{11} z_1 z_2 \cdots a_{mn} z^m z^n$$

を用意します (a_{ij} は複素数)。この多項式を足し合うと

$$p(z_1, z_2) + p'(z_1, z_2) = \sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij} z_1^i z_2^j + \sum_{i,j}^{m,n} a'_{ij} z_1^i z_2^j = \sum_{i,j}^{m,n} a''_{ij} z_1^i z_2^j = p''(z_1, z_2)$$

$a''_{ij} = a_{ij} + a'_{ij}$ としています。$p(z_1, z_2)$ のスカラー倍はそのまま $ca_{ij} = a'_{ij}$ となり、これらから

$$cp(z_1, z_2) + dp(z_1, z_2) = (c + d)p(z_1, z_2)$$

$$c(p(z_1, z_2) + p'(z_1, z_2)) = c(p + p')(z_1, z_2)$$

が言えます。つまり、m, n で指定される多項式 P_{mn} は複素ベクトル空間を作ります。この基底は z_1^i, z_2^j の組み合わせによって

$$z_1, z_2, z_1 z_2, z_1^2, z_2^2, \ldots$$

これは $0 \leq k \leq n$ とすれば、$z_1^{n-k} z_2^k$ で表せて

$$z_1^n, z_1^{n-1} z_2, z_1^{n-2} z_2^2, \ldots, z_1 z_2^{n-1}, z_2^n$$

というわけで、$SU(2)$ をこの多項式による $n + 1$ 次元複素ベクトル空間 $P_n(C^2)$ に持っていきます。z_1, z_2 を変数に持つ多項式の関数を $p_n(z_1, z_2)$、2 次元複素ベクトル空間 V のベクトルを $v = (z_1, z_2)$ とします。$SU(2)$ の行列を A、もとの表現 (Π, V) を基本表現（2 次元複素ベクトル空間)、変換後を $(\Pi_n, P_n(C^2))$ とします。これは関数の定義から

$$(\Pi_n(A)p_n)(v) = p_n(\Pi^{-1}(A)v)$$

基本表現は恒等変換なので、$\Pi^{-1}(A) = A$ から

$$(\Pi_n(A)p_n)(v) = p_n(A^{-1}v)$$

右辺の括弧内は、$SU(2)$ の行列はユニタリーなので (「$*$」は複素共役)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix} \quad (|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1)$$

と書くことすれば

$$A^{-1}v = \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* z_1 - \beta z_2 \\ \beta^* z_1 + \alpha z_2 \end{pmatrix}$$

これは $p_n(z_1, z_2)$ が $p_n(\alpha^* z_1 - \beta z_2, \beta^* z_1 + \alpha z_2)$ になることなので

$$\begin{aligned}(\Pi_n(A)p_n)(v) &= p_n(\alpha^* z_1 - \beta z_2, \beta^* z_1 + \alpha z_2) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (\alpha^* z_1 - \beta z_2)^{n-k} (\beta^* z_1 + \alpha z_2)^k\end{aligned}$$

2 項定理を使えば

$$\begin{aligned}&(\alpha^* z_1 - \beta z_2)^{n-k} (\beta^* z_1 + \alpha z_2)^k \\ &\quad = \sum_{s=0}^{n-k} \frac{(n-k)!}{s!(n-k-s)!} (\alpha^* z_1)^{n-k-s} (-\beta z_2)^s \sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} (\beta^* z_1)^{k-r} (\alpha z_2)^r \\ &\quad = \sum_{s=0}^{n-k} \sum_{r=0}^{k} \frac{(n-k)!}{s!(n-k-s)!} \frac{k!}{r!(k-r)!} \alpha^r (\alpha^*)^{n-k-s} (-\beta)^s (\beta^*)^{k-r} z_1^{n-(s+r)} z_2^{s+r} \\ &\quad = \sum_{k'} D^{(n)}_{kk'} z_1^{n-k'} z_2^{k'} \qquad (k' = s + r)\end{aligned}$$

これから、$D^{(n)}_{kk'}$ が今の表現 ($n+1$ 次元複素ベクトル空間) における $(n+1) \times (n+1)$ 行列となります。また、量子力学の本では $n = 2j,\ k = j - m,\ m' = j - s - r$ ($j = 0, 1/2, 1, \ldots,\ m = -j, -j+1, \ldots, +j$) としていることが多いです。

最初に触れたようにリー代数の表現 π は (1) で与えられます。$\mathfrak{su}(2)$ は 3 つの行列なので、それを S_i $(i = 1, 2, 3)$ として (1) に入れれば

$$(\pi_n(S_i)p_n)(v) = \frac{d}{dt}(\Pi_n(e^{tS_i})p_n)(v)|_{t=0} = \frac{d}{dt} p_n(e^{-tS_i}v)|_{t=0}$$

最右辺へは恒等変換だからです。ベクトル $v=(z_1,z_2)$ の成分を v_a $(a=1,2)$ として、a に対しては和をとるようにして

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_n(e^{-tS_i}v)\big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(e^{-tS_i}v)_a\frac{\partial p_n(v')}{\partial v'_a}\big|_{t=0} \quad (v'_a=(e^{-tS_i}v)_a) \\
&= (-S_ie^{-tS_i}v)_a\frac{\partial p_n(v')}{\partial v'_a}\big|_{t=0} \\
&= -(S_iv)_a\frac{\partial p_n}{\partial v_a}(v) \quad \big(\frac{\partial p_n}{\partial v_a}(v)=\frac{\partial p_n(v')}{\partial v'_a}\big|_{t=0}\big) \\
&= -(S_i)_{ab}v_b\frac{\partial p_n}{\partial v_a}(v)
\end{aligned}$$

よって、p_n と (v) を省いて

$$\pi_n(S_i)=-(S_i)_{ab}v_b\frac{\partial}{\partial v_a}$$

S_i は

$$S_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\ ,\ S_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ ,\ S_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

なので、リー代数の表現は

$$\pi_n(S_1)=-(S_1)_{ab}v_b\frac{\partial}{\partial v_a}=-(S_1)_{12}v_2\frac{\partial}{\partial v_1}-(S_1)_{21}v_1\frac{\partial}{\partial v_2}=\frac{i}{2}(z_2\frac{\partial}{\partial z_1}+z_1\frac{\partial}{\partial z_2}) \tag{2a}$$

$$\pi_n(S_2)=-(S_2)_{ab}v_b\frac{\partial}{\partial v_a}=-(S_2)_{12}v_2\frac{\partial}{\partial v_1}-(S_2)_{21}v_1\frac{\partial}{\partial v_2}=\frac{1}{2}(z_2\frac{\partial}{\partial z_1}-z_1\frac{\partial}{\partial z_2}) \tag{2b}$$

$$\pi_n(S_3)=-(S_3)_{ab}v_b\frac{\partial}{\partial v_a}=-(S_3)_{11}v_1\frac{\partial}{\partial v_1}-(S_2)_{22}v_2\frac{\partial}{\partial v_2}=\frac{i}{2}(z_1\frac{\partial}{\partial z_1}-z_2\frac{\partial}{\partial z_2}) \tag{2c}$$

このときも、当然

$$\begin{aligned}
&[\pi_n(S_1),\pi_n(S_2)] \\
&=\frac{i}{4}(z_2\frac{\partial}{\partial z_1}+z_1\frac{\partial}{\partial z_2})(z_2\frac{\partial}{\partial z_1}-z_1\frac{\partial}{\partial z_2})-\frac{i}{4}(z_2\frac{\partial}{\partial z_1}-z_1\frac{\partial}{\partial z_2})(z_2\frac{\partial}{\partial z_1}+z_1\frac{\partial}{\partial z_2}) \\
&=\frac{i}{4}(z_2^2\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}-z_2\frac{\partial}{\partial z_2}+z_1\frac{\partial}{\partial z_1}-z_1^2\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2})-\frac{i}{4}(z_2^2\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial}{\partial z_2}-z_1\frac{\partial}{\partial z_1}-z_1^2\frac{\partial}{\partial z_2}\frac{\partial}{\partial z_2}) \\
&=\frac{i}{2}(-z_2\frac{\partial}{\partial z_2}+z_1\frac{\partial}{\partial z_1}) \\
&=\pi_n(S_3)
\end{aligned}$$

のようになっていて、リー代数の交換関係は変更されません。

この $P_n(C^2)$ での $\mathfrak{su}(2)$ の表現が何を表しているのかは $\pi(S_3)$ を見れば分かります (π_n は n と無関係なので π と書いていきます)。この $\pi(S_3)$ は $z_1^{n-k}z_2^k$ を固有ベクトルにします。実際に

$$\begin{aligned}\pi(S_3)z_1^{n-k}z_2^k &= \frac{i}{2}z_1z_2^k\frac{\partial z_1^{n-k}}{\partial z_1} - \frac{i}{2}z_1^{n-k}z_2\frac{\partial z_2^k}{\partial z_2}\\ &= \frac{i}{2}(n-k)z_1^{n-k}z_2^k - \frac{i}{2}kz_1^{n-k}z_2^k\\ &= i(\frac{n}{2}-k)z_1^{n-k}z_2^k\end{aligned}$$

$n/2$ をスピンの s とすれば固有値は $s, s-1, s-2, \dots, -s$ $(0 \leq k \leq n)$ というスピンの話でよく出てくるものになります。なので、これは $\mathfrak{su}(2)$ の $P_n(C^2)$ でのスピン表現と呼ばれます。

スピンが出てきたところで、量子力学での角運動量の話と同じようなことをしてみます。$P_n(C^2)$ に限定する必要がないので、一旦リー代数の表現を (π, V) として、ベクトル空間を $P_n(C^2)$ にせずベクトル空間 V とします。$\pi(S_i)$ から

$$\begin{aligned}&J_3 = i\pi(S_3)\\ &J_+ = i\pi(S_1) - \pi(S_2)\\ &J_- = i\pi(S_1) + \pi(S_2)\end{aligned}$$

$\pi(S_i)$ は S_i の交換関係に従っているので J_+ と J_- の交換関係は

$$\begin{aligned}[J_+, J_-] &= (i\pi(S_1) - \pi(S_2))(i\pi(S_1) + \pi(S_2)) - (i\pi(S_1) + \pi(S_2))(i\pi(S_1) - \pi(S_2))\\ &= -\pi^2(S_1) - \pi^2(S_2) + i\pi(S_1)\pi(S_2) - i\pi(S_2)\pi(S_1)\\ &\quad - (-\pi^2(S_1) - \pi^2(S_2) - i\pi(S_1)\pi(S_2) + i\pi(S_2)\pi(S_1))\\ &= 2i\pi(S_1)\pi(S_2) - 2i\pi(S_2)\pi(S_1)\\ &= 2i[\pi(S_1), \pi(S_2)]\\ &= 2i\pi(S_3)\\ &= 2J_3\end{aligned}$$

同様に

$$[J_3, J_+] = J_+ \ ,\ [J_3, J_-] = -J_-$$

これらは量子力学での角運動量演算子の話で出てくるものと同じ形です。なので、似た手順を行っていきます。

$J_3 = i\pi(S_3)$ で、$\pi(S_3)$ は定義から V 上での線形変換です。ベクトル空間には線形変換に対する固有ベクトルが存在するはずなので、それを ψ、その固有値を b とします ($J_3\psi = b\psi$)。そして、$J_3(J_\pm\psi)$ を見ると

$$J_3(J_\pm\psi) = [J_3, J_\pm]\psi + J_\pm J_3\psi = \pm J_\pm\psi + bJ_\pm\psi = (b\pm 1)J_\pm\psi$$

となって、$J_\pm\psi$ が $(b\pm 1)$ の固有値を持つ固有ベクトルになります。そして、J_+ を N 回作用させた場合では

$$\begin{aligned}
J_3(J_+^N\psi) = [J_3, J_+^N]\psi + J_+^N J_3\psi &= J_+[J_3, J_+^{N-1}]\psi + [J_3, J_+]J_+^{N-1}\psi + bJ_\pm^N\psi \\
&= J_+[J_3, J_+^{N-1}]\psi + J_+^N\psi + bJ_\pm^N\psi \\
&= J_+^2[J_3, J_+^{N-2}]\psi + J_+[J_3, J_+]J_+^{N-1}\psi + (b+1)J_+^N\psi \\
&= J_+^2[J_3, J_+^{N-2}]\psi + (b+2)J_\pm^N\psi
\end{aligned}$$

つまり、J_+ の作用で J_3 の固有値は $+1$ ずつ大きくなっていきます。なので、J_+ は上昇 (raising) 演算子と呼ばれます。そして、線形代数の話から、異なる固有値を持つ固有ベクトルは線形独立なので、基底ベクトルとすることができます。そうすると、固有ベクトルの数はそのベクトル空間 V の次元より多くならないので、この J_+ を作用させる回数には上限があり、それが固有値の上限になります。今の場合で言えば、N を最大とすれば、固有ベクトル $J_+^N\psi$ の固有値 $j = b+N$ です。そして、上限の固有ベクトルより上はいないので

$$J_+J_\pm^N\psi = 0$$

とします。上昇演算子が作用して 0 になる固有ベクトルを、表現における最高ウェイト (highest weight) ベクトルと言います。これだと上限が与えられただけなので、今度は下限を与えます。

J_- では 1 ずつ減っていくので、同様に考えて、最大の固有値の固有ベクトル $J_+^N\psi$ に J_- を k 回作用させた固有ベクトルとして、$J_-^kJ_+^N\psi$ を与えられます。k は最大の固有値 $j = b+N$ から 0 になる 1 個前までの回数とすれば、$j-k$ が $J_-^kJ_+^N\psi$ の固有値で、J_-^{k+1} では

$$J_-^{k+1}(J_+^N\psi) = 0$$

となります。J_- は下降 (lowering) 演算子と呼ばれます。

J_- の作用する回数に対応するように固有ベクトルを

$$\begin{aligned}
&\psi_0 = J_+^N\psi \\
&\psi_l = J_-^l(J_+^N\psi) = J_-^l\psi_0 \\
&\psi_{l+1} = J_-^{l+1}(J_+^N\psi) = J_-^{l+1}\psi_0 \\
&\psi_{k+1} = J_-^{k+1}(J_+^N\psi) = J_-^{k+1}\psi_0 = 0
\end{aligned}$$

と書きます。ψ_l の J_3 の固有値は

$$J_3\psi_l = J_3J_-^l(J_+^N\psi) = (j-l)\psi_l \qquad (j = b+N)$$

ψ_l に J_- が作用すれば

$$J_-\psi_l = \psi_{l+1}$$

J_+ が作用すれば

$$\begin{aligned}
J_+\psi_l = J_+J_-^l\psi_0 &= [J_+, J_-^l]\psi_0 + J_-^l J_+\psi_0 \\
&= \big(J_-[J_+, J_-^{l-1}] + [J_+, J_-]J_-^{l-1}\big)\psi_0 \qquad (J_+\psi_0 = 0) \\
&= \big(J_-[J_+, J_-^{l-1}] + 2J_3J_-^{l-1}\big)\psi_0 \\
&= \big(J_-^2[J_+, J_-^{l-2}] + J_-[J_+, J_-]J_-^{l-2} + 2J_3J_-^{l-1}\big)\psi_0 \\
&= \big(J_-^2[J_+, J_-^{l-2}] + 2J_-J_3J_-^{l-2} + 2J_3J_-^{l-1}\big)\psi_0 \\
&= \big(J_-^2[J_+, J_-^{l-2}] + 2[J_-, J_3]J_-^{l-2} + 2J_3J_-^{l-1} + 2J_3J_-^{l-1}\big)\psi_0 \\
&= \big(J_-^2[J_+, J_-^{l-2}] + 2J_-^{l-1} + 4J_3J_-^{l-1}\big)\psi_0 \\
&= J_-^2[J_+, J_-^{l-2}]\psi_0 + \big(2 + 4(j - l + 1)\big)J_-^{l-1}\psi_0 \\
&= J_-^3[J_+, J_-^{l-3}]\psi_0 + J_-^2[J_+, J_-]J_-^{l-3}\psi_0 + \big(2 + 4(j - l + 1)\big)J_-^{l-1}\psi_0 \\
&= J_-^3[J_+, J_-^{l-3}]\psi_0 + 2J_-^2J_3J_-^{l-3}\psi_0 + \big(2 + 4(j - l + 1)\big)J_-^{l-1}\psi_0 \\
&= J_-^3[J_+, J_-^{l-3}]\psi_0 + 2([J_-^2, J_3] + J_3J_-^2)J_-^{l-3}(J_+^N\psi) + \big(2 + 4(j - l + 1)\big)J_-^{l-1}\psi_0 \\
&= J_-^3[J_+, J_-^{l-3}]\psi_0 + 2(2 + J_3)J_-^{l-1}(J_+^N\psi) + \big(2 + 4(j - l + 1)\big)J_-^{l-1}\psi_0 \\
&= J_-^3[J_+, J_-^{l-3}]\psi_0 + 2(2 + j - l + 1)J_-^{l-1}\psi_0 + \big(2 + 4(j - l + 1)\big)J_-^{l-1}\psi_0
\end{aligned}$$

と続いていきます。これを続けていくと l に対して

$$\begin{aligned}
&J_+\psi_1 = 2J_3(J_+^N\psi) = 2j\psi_0 \\
&J_+\psi_2 = (2 + 4(j - 2 + 1))J_-(J_+^N\psi) = (4j - 2)\psi_1 \\
&J_+\psi_3 = (2(2 + j - 3 + 1) + (2 + 4(j - 3 + 1))J_-(J_+^N\psi) = (6j - 6)\psi_1
\end{aligned}$$

と求まっていきます。これは $l = 1$ で $2j$、$l = 2$ で $4j - 2$、$l = 3$ で $6j - 6$ なので

$$J_+\psi_l = (2jl - l(l - 1))\psi_{l-1}$$

これに l が $k + 1$ とすれば、$\psi_{k+1} = 0$ から

$$0 = J_+\psi_{k+1} = (2j(k + 1) - (k + 1)k)\psi_k$$

よって、j と k の関係は

$$j = \frac{1}{2}k$$

k は整数として与えているので、$2j$ が整数です。このため $\mathfrak{su}(2)$ でのスピンに対応する量になります。そして、J_3 の固有値 $j-l$ の固有ベクトル ψ_l は $0 \leq l \leq 2j$ で与えられます。固有ベクトル ψ_l はそれぞれが線形独立なので、これらによってベクトル空間の基底にできます。よって、固有ベクトルの数 $2j+1$ が今の表現におけるベクトル空間 V の次元になり、表現は (π_j, V_j) となります。

具体的に $P_n(C^2)$ を当てはめてみます。$(\pi, P_n(C^2))$ での $\pi(S_i)$ の (2a)〜(2c) から

$$\pi^-(S) = i\pi(S_1) + \pi(S_2) = -z_1\frac{\partial}{\partial z_2} \tag{3a}$$

$$\pi^+(S) = i\pi(S_1) - \pi(S_2) = -z_2\frac{\partial}{\partial z_1} \tag{3b}$$

というのを作ります。$\pi^{\pm}$ の符号を揃えるために J^+ の符号を反転させています。これらを $z_1^n z_2^m$ に作用させると

$$-z_1\frac{\partial}{\partial z_2}z_1^n z_2^m = -z_1^{n+1}z_2^{m-1} \tag{4a}$$

$$-z_2\frac{\partial}{\partial z_1}z_1^n z_2^m = -z_1^{n-1}z_2^{m+1} \tag{4b}$$

そうすると、ψ_l にあたるのは $\pi^-(S)$ を作用させる対象なので z_2^l です。z_2^n より上の項はいないとして、n が上限とします (z_2^n が ψ_0)。上限が n なので、$0 \leq l \leq 2j$ から、$n = 2j$ です (上での $k = 2j$)。そうすると、z_2^n に $\pi^-(S)$ を l 回作用させたものが基底を構成するので (l の範囲は $0 \leq l \leq n$)

$$(\pi^-(S))^l z_2^n = (-z_1\frac{\partial}{\partial z_2})^k z_2^n = (-1)^l\frac{n!}{(n-l)!}z_1^l z_2^{n-l}$$

これが $P_n(C^2)$ での ψ_l で、これによって基底が作られます。よって、j を使えば $(\pi, P_n(C^2))$ は $(\pi_{2j}, P_{2j}(C^2))$ となります。これは $(\pi, P_n(C^2))$ で出てきた s が $j = n/2$ として出てきています。ちなみに、$P_n(C^2)$ の次元は $n+1$ です (0 から n までの多項式の $z_1^n z_2^{n-l}$ $(0 \leq l \leq n)$ が基底だから)。

次に群の既約 (irreducible) と完全可約 (completely reducible) の定義を与えます。その前に、ベクトル空間に関する直和の定義を簡単に示しておきます。ベクトル空間 V, V' のデカルト積は $V \times V'$ で、V のベクトルを v、V' のベクトルを v' とすれば、$V \times V'$ に含まれるものは (v, v') と書かれます (V のベクトルと V' のベクトルによる組)。このとき、(v, v') に対して和とスカラー倍の演算を

$$(v_1, v_1') + (v_2, v_2') = (v_1 + v_2, v_1' + v_2')\ ,\ c(v, v') = (cv, cv')$$

として加えたものを、記号「$\oplus$」を使って直和 $V \oplus V'$ と定義します (V と V' の共通部分は 0 のみ)。直和はデカルト積にベクトルの演算規則を加えたものなので、$V \oplus V'$ はデカルト積と同じように (v, v') の組で表します。つまり、$V \oplus V'$ において、V を $(v, 0)$、V' を $(0, v')$ としたとき、演算に従って (v, v') になるということです。そして、$V \oplus V'$ での $(v, 0) + (0, v') = (v, v')$ は、V, V' のベクトルを指定して足したものが $V \oplus V'$ と言っているので、V, V' で見れば $v + v'$ です。なので、直和は $v + v'$ と思えばいいです。

ベクトル空間 V に含まれるベクトルから、$W_1, W_2 \ldots, W_k$ というベクトル空間が作れるとし (W_i は V の部分空間)、直和によって

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$$

と書けるとします。これは V のベクトルを v、W_i のベクトルを w_i とすれば、$v = w_1 + w_2 + \ldots + w_k$ と対応します。

直和の話の分かりやすい例が行列です。実数の $n \times n$ 行列を M として

$$M = \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(M - M^T)$$

と書いたとします (T は転置)。これは

$$(M + M^T)^T = M + M^T \ , \ (M - M^T)^T = -(M - M^T)$$

なので、第一項は対称行列、第二項は反対称行列になります。それぞれを S, T とすれば (1/2 も含ませて)

$$M = S + T$$

これは M は、対称行列 S と反対称行列 T の和で書けることを言っています。

M は実数の行列によるベクトル空間 $M(V)$、S は対称行列によるベクトル空間 $S(V)$、T は反対称行列によるベクトル空間 $T(V)$ に含まれています。そして、M は S と T の和で書けるために、S と T を指定して足せば M が求まる、つまり、$S(V)$ と $T(V)$ の行列 (ベクトル) を指定して和の演算を入れれば $M(V)$ の行列になると言っています。よって、$M(V)$ は $S(V)$ と $A(V)$ の直和

$$M(V) = S(V) \oplus A(V)$$

で書けます。$S(V)$ と $A(V)$ は $M(V)$ の部分空間です。

この話を群に持っていきます。群 G の表現を (Π, V) とします。このとき、ベクトル空間 V に含まれるものによって、ベクトル空間 W (V の部分空間) が作れるとします。この W に含まれるベクトル w は変換 $\Pi(X)w$ によって、また W のベクトルになると定義します。言い換えれば、$\Pi(X)w$ は w の性質を変えないということで、この意味で不変な部分空間と呼ぶことにします。そして、V が不変な部分空間を持つとき、その表現 Π は可約 (reducible) と呼ばれます。可約でないなら既約 (irreducible) と呼ばれます。

不変な部分空間 W_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ があり、W_i の表現 Π_i が既約で、V が

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$$

と書けるとき、V の表現は完全可約 (completely reducible) と言います。V がこのように不変な部分空間の直和でかけないなら (不変な部分空間が V しかないとき)、既約です。なので、完全可約な表現は既約な表現の直和で書ける場合です。また、可約は V が不変な部分空間の直和だけでないときと言えます。この話はそのままリー代数でも言えます。証明はしませんが、群 G が既約なら、そのリー代数 $\mathfrak{g}$ も既約という性質を持っています。

抽象的に既約、可約の定義を与えましたが、行列に限定すると単純な話になります。直和と絡めるために対称行列、反対称行列として分解する話をしましたが、例えば 3×3 行列とすれば

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & b_2 \\
0 & 0 & b_3
\end{pmatrix}
$$

という形になっているなら可約、さらに

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 \\
0 & 0 & b_3
\end{pmatrix}
$$

という形になっているなら完全可約となります。$n\times n$ 行列でも同じ形です。これらが何を意味してるかは単純です。可約では 3 次元ベクトルに対して

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & b_2 \\
0 & 0 & b_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x \\ y \\ 0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ 0
\end{pmatrix}
\ ,\ \
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & b_2 \\
0 & 0 & b_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ z
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 z \\ b_2 z \\ b_3 z
\end{pmatrix}
$$

となっており、$(x, y, 0)$ に対しては $(x', y', 0)$ なので 2 次元ベクトルの形が維持され、$(0, 0, z)$ では 1 次元ベクトルの形が維持されなくなっています。つまり、3 次元ベクトル空間での 3×3 行列において、左上の 2×2 行列部分は 2 次元ベクトル空間の計算として成立し、1×1 行列部分は 1 次元ベクトル空間の計算として成立していません。この 2 次元ベクトル空間が不変な部分空間です。このように、$n\times n$ 行列の中に $m\times m$ 行列 $(m < n)$ があり、それが m 次元ベクトル空間の計算として成立しているなら可約、そうでないなら既約となります。

完全可約は

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 \\
0 & 0 & b_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x \\ y \\ 0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ 0
\end{pmatrix}
\ ,\ \
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 \\
0 & 0 & b_3
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ z
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ b_3 z
\end{pmatrix}
$$

として、行列内の 2×2 行列と 1×1 行列がどちらも不変な部分空間を作ります。このため、完全可約な 3×3 行列では $3 = 2\oplus 1$ (3 次元=2 次元+1 次元) と書きます。

$\mathfrak{su}(2)$ での表現 $(\pi, P_n(C^2))$ が既約なのか完全可約なのか調べます。知りたいのは多項式のベクトル空間 $P_n(C^2)$ が不変な部分空間 W による直和に分解できるかです。$P_n(C^2)$ は多項式の集まりなので、その部分空間も多項式です。なので、部分空間 W のベクトル w は、a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ のどれかが 0 でないとして

$$
w = a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} z_2 + a_2 z_1^{n-2} z_2^2 + \cdots + a_n z_2^n
$$

と書けます。部分空間 W は $\pi(S_i)$ に対して不変です。

$\pi(S_i)$ による (3a),(3b) を使います。$a_i \neq 0$ $(i \leq k_0)$ での w に $\pi^+(S)$ を k_0 回作用させると、(4b) から、$(\pi^+(S))^{k_0}$ は z_1^n を $z_1^{n-k_0}$ に下げるので、作用させたとき消えないのは z_1, z_2 が

$$
a_{k_0} z_1^{k_0} z_2^{n-k_0}
$$

の項だけで

$$(\pi^+(S))^{k_0}w = (-1)^{k_0}(k_0!)a_{k_0}z_2^{n-k_0+k_0} = (-1)^{k_0}(k_0!)a_{k_0}z_2^n$$

これは、$a_{k_0} \neq 0$ なので、$(\pi^+(S))^{k_0}w$ は z_2^n の 0 でない係数を作ることを言っています (z_2^n の項がある)。今知りたい部分空間は表現での変換に対して不変としたものなので、$(\pi^+(S))^{k_0}w$ によって z_2^n になることから、W には z_2^n がいなければいけません。

z_2^n がいることが分かったので、今度は $\pi^-(S)$ を z_2^n に k 回作用させます。そうすると

$$(\pi^-(S))^k z_2^n = (-1)^k n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)z_1^k z_2^{n-k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}$$

となって $(\pi^-(S))^k z_2^n$ は 0 でない $z_1^k z_2^{n-k}$ の係数を作ります。これは W に $z_1^k z_2^{n-k}$ がいることを言っています。この結果から、W には $0 \leq k \leq n$ に対して $z_1^k z_2^{n-k}$ がいることになります。これは元の $P_n(C^2)$ の基底と同じなので、部分空間 W は $P_n(C^2)$ そのものです。よって、$P_n(C^2)$ は不変な部分空間の直和に分解できないので、$\mathfrak{su}(2)$ の表現 $(\pi(S), P_n(C^2))$ は既約です。

ついでに証明なしに Schur の補題を示しておきます。群 G の 2 つの表現を (Π_1, V_1)、(Π_2, V_2) とし、両方とも既約とします。群 G に含まれるものは A とします。このとき、V_1 から V_2 への写像 ϕ が

$$\phi\Pi_1(A) = \Pi_2(A)\phi$$

を満たすとき (このとき ϕ は interwiner と呼ばれる)、ϕ は 0 か $\phi(V_1) = V_2$(同型写像) です。そして、$(\Pi_1, V_1) = (\Pi_2, V_2) = (\Pi, V)$ なら ϕ は線形変換であり (V 上での変換だから)、$\phi = cI$ (c は複素数) になります。これを Schur の補題と言います。

Schur の補題を使うことで、可換群の既約な表現は 1 次元というのが導けます。これは簡単です。可換群 A の元を a, b、その表現を (Π, V) として、表現の定義から

$$\Pi(a)\Pi(b) = \Pi(ab) = \Pi(ba) = \Pi(b)\Pi(a)$$

これを Schur の補題に合わせれば $\Pi(a) = \phi = cI$ です。そうすると、$v \in V$ に作用させれば

$$\Pi(A)v = cv$$

右辺は定数倍なので、v を適当な V の部分空間 V_1, V_2 で分割し、$\Pi_1 v_1 = cv_1 \in V_1,\ \Pi_2 v_2 = cv_2 \in V_2$ とできます。このため、V の部分空間は不変な部分空間です。しかし、Π が既約表現なら、不変な部分空間としては V そのものしか使えません (もしくは $\{0\}$)。このため、部分空間（自分自身と $\{0\}$ 以外の部分空間）を持てる 2 次元以上のベクトル空間は使えないので、可換群の既約表現は 1 次元です。

Schur の補題によって $\mathfrak{su}(2)$ での表現 (π_j, V_j) は既約で、$\mathfrak{su}(2)$ の全ての既約な複素表現 (有限次元での) は (π_j, V_j) と同値であることも分かります。

最後にリー代数の複素化 (complexification) を示します。ここで言う実数と複素数はリー代数によるベクトル空間が実ベクトル空間なのか複素ベクトル空間なのかです。ただし、線形リー群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ は、スカラー倍が実数で与えられているので、実ベクトル空間になっています。

先に実ベクトル空間の複素化を見ておきます。複素化は実ベクトル空間 V から、V でのベクトル v_1, v_2 による線形結合 $v_1 + iv_2$ をベクトルとするベクトル空間 V_C を作ることです。記号的にはテンソル積 $\otimes$ によって $V_C = C \otimes V$ と書かれます。C は複素空間で、基底が $1, i$ の 2 次元実ベクトル空間です (複素平面は $1, i$ を基底とする 2 次元実

ベクトル空間だから)。

V_C が複素ベクトル空間になっていることを簡単に示しておきます。線形結合 $v_1 + iv_2$ によるベクトル空間が V_C なので、V_C は直和での $V \oplus V$ に積の演算 (複素数によるスカラー倍) として $(a+ib)(v_1, v_2) = (av_1 - bv_2, bv_1 + av_2)$ を与えたものと同じです (a, b は実数)。実際に $V \oplus V$ の組 (v_1, v_2) を $v_1 + iv_2$ として計算すれば

$$(a+ib)(v_1+iv_2) = av_1 + iav_2 + ibv_1 - bv_2 = av_1 - bv_2 + i(bv_1 + av_2) = (av_1 - bv_2, bv_1 + av_2)$$

$$i(v_1, v_2) = i(v_1 + iv_2) = -v_2 + iv_1 = (-v_2, v_1)$$

このように (v_1, v_2) に複素数の計算が与えられます (他にも複素共役とかも与えなければいけませんが省きます)。なので、V_C は複素ベクトル空間です。

同じようにリー代数にも複素化を定義します。これは、実ベクトル空間でのリー代数 $\mathfrak{g}$ の X, Y による組 $(X, Y) = X + iY$ を用意して、

$$(a+ib)(X+iY) = aX - bY + i(bX + aY)$$

$$(X+iY) + (X'+iY') = (X+X') + i(Y+Y')$$

$$[X+iY, X'+iY'] = [X, X'] - [Y, Y'] + i([X, Y'] + [Y, X'])$$

というように演算規則を与えればいいです (a, b は実数)。この (X, Y) によるリー代数 $\mathfrak{g}_C$ が、リー代数 $\mathfrak{g}$ の複素化です。

表現の複素化もあります。リー代数 $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への準同型写像 π があるとします。このとき、$\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_C$ から $\mathfrak{gl}(V)$ への準同型写像 π_C があって、この π_C が $\mathfrak{g}$ の X, Y に対して

$$\pi_C(X+iY) = \pi(X) + i\pi(Y)$$

を満たすとき、π_C を π の複素化と言います。