

ローレンツ群と $SL(2, C)$

ローレンツ変換による群であるローレンツ群を見ていきます。

ローレンツ変換については相対論的量子力学の「ローレンツ変換」を見てください。

ここでのローレンツ変換は proper と orthochronous に分類されるものです。この場合は無限小変換で書けるので、相対論的量子力学の「ローレンツ変換」での結果を見ればなんとなく分かるように、ローレンツ変換はリー群を構成し、ローレンツ群と呼ばれます。

ローレンツ変換の生成子を求めます。ローレンツ変換は 6 個のパラメータ α_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) を持つことから、6 個の生成子 T_i を使ってローレンツ変換を

$$\exp\left[\sum_{i=1}^6 \alpha_i T_i\right]$$

と書けるようにします。まず、6 個のパラメータは反対称な $\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu}$ で表すとし（反対称なので独立なのは 6 個）。生成子も $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ で与えます。これらによって、ローレンツ変換を

$$x'^\alpha = x^\alpha + \alpha_{\mu\nu} (M^{\mu\nu})^\alpha_\beta x^\beta$$

μ, ν で 6 個の生成子を指定し ($M^{\mu\nu}$ は 6 個の行列を表す)、 α, β が生成子の行列成分を指定しています。ローレンツ変換の行列は反対称なので、 α, β の入れ替えで $(M^{\mu\nu})^\alpha_\beta$ も反対称です。4 元ベクトルのローレンツ変換は

$$x'^\alpha = x^\alpha + \omega^\alpha_\beta x^\beta \quad (\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha})$$

と書けるので

$$\alpha_{\mu\nu} (M^{\mu\nu})^\alpha_\beta = -\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} (M^{\mu\nu})^\alpha_\beta$$

とすれば、 $M^{\mu\nu}$ は $\omega_{\mu\nu} x^\beta$ を $\omega^\alpha_\beta x^\beta$ にするようになっていけばいいので

$$(M^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i(g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\mu_\beta g^\nu_\alpha) \quad (g^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta) \quad (1)$$

実際に

$$\begin{aligned} -i\omega_{\mu\nu} (M^{\mu\nu})^\alpha_\beta x^\beta &= \omega_{\mu\nu} (g^{\mu\alpha} g^\nu_\beta - g^\mu_\beta g^{\nu\alpha}) x^\beta = \omega_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^\nu_\beta x^\beta - \omega_{\mu\nu} g^\mu_\beta g^{\nu\alpha} x^\beta \\ &= \omega^\alpha_\beta x^\beta - \omega_\beta^\alpha x^\beta \\ &= \omega^\alpha_\beta x^\beta + \omega^\alpha_\beta x^\beta \\ &= 2\omega^\alpha_\beta x^\beta \end{aligned}$$

となっています。また、無限小変換の繰り返しとしての有限変換の形は

$$U = \exp\left[-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right]$$

となります。

$M^{\mu\nu}$ の交換関係を求めます。(1) を見ればわかるように、行列成分も計量で上げ下げできるので

$$\begin{aligned}[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}]^\rho{}_\lambda &= (M^{\mu\nu})^\rho{}_\sigma (M^{\alpha\beta})^\sigma{}_\lambda - (M^{\alpha\beta})^\rho{}_\sigma (M^{\mu\nu})^\sigma{}_\lambda \\ &= i(g^{\mu\rho}g^\nu{}_\sigma - g^\mu{}_\sigma g^{\nu\rho})(M^{\alpha\beta})^\sigma{}_\lambda - i(M^{\alpha\beta})^\rho{}_\sigma (g^{\mu\sigma}g^\nu{}_\lambda - g^\mu{}_\lambda g^{\nu\sigma}) \\ &= i(g^{\mu\rho}(M^{\alpha\beta})^\nu{}_\lambda - g^{\nu\rho}(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\lambda - g^\nu{}_\lambda (M^{\alpha\beta})^{\rho\mu} + g^\mu{}_\lambda (M^{\alpha\beta})^{\rho\nu})\end{aligned}$$

各項は

$$\begin{aligned}g^{\mu\rho}(M^{\alpha\beta})^\nu{}_\lambda &= ig^{\mu\rho}(g^{\alpha\nu}g^\beta{}_\lambda - g^\alpha{}_\lambda g^{\beta\nu}) = i(g^{\rho\mu}g^\beta{}_\lambda g^{\alpha\nu} - g^{\rho\mu}g^\alpha{}_\lambda g^{\beta\nu}) \\ g^{\nu\rho}(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\lambda &= ig^{\nu\rho}(g^{\alpha\mu}g^\beta{}_\lambda - g^\alpha{}_\lambda g^{\beta\mu}) = i(g^{\nu\rho}g^\beta{}_\lambda g^{\alpha\mu} - g^{\nu\rho}g^\alpha{}_\lambda g^{\beta\mu}) \\ g^\nu{}_\lambda (M^{\alpha\beta})^{\rho\mu} &= ig^\nu{}_\lambda (g^{\alpha\rho}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\rho}) = i(g^{\alpha\rho}g^\nu{}_\lambda g^{\beta\mu} - g^{\beta\rho}g^\nu{}_\lambda g^{\alpha\mu}) \\ g^\mu{}_\lambda (M^{\alpha\beta})^{\rho\nu} &= ig^\mu{}_\lambda (g^{\alpha\rho}g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu}g^{\beta\rho}) = i(g^{\alpha\rho}g^\mu{}_\lambda g^{\beta\nu} - g^{\beta\rho}g^\mu{}_\lambda g^{\alpha\nu})\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}&g^{\mu\rho}(M^{\alpha\beta})^\nu{}_\lambda - g^{\nu\rho}(M^{\alpha\beta})^\mu{}_\lambda - g^\nu{}_\lambda (M^{\alpha\beta})^{\rho\mu} + g^\mu{}_\lambda (M^{\alpha\beta})^{\rho\nu} \\ &= i(g^{\rho\mu}g^\beta{}_\lambda g^{\alpha\nu} - g^{\rho\mu}g^\alpha{}_\lambda g^{\beta\nu} - g^{\nu\rho}g^\beta{}_\lambda g^{\alpha\mu} + g^{\nu\rho}g^\alpha{}_\lambda g^{\beta\mu} \\ &\quad - g^{\alpha\rho}g^\nu{}_\lambda g^{\beta\mu} + g^{\beta\rho}g^\nu{}_\lambda g^{\alpha\mu} + g^{\alpha\rho}g^\mu{}_\lambda g^{\beta\nu} - g^{\beta\rho}g^\mu{}_\lambda g^{\alpha\nu}) \\ &= i(g^{\rho\mu}g^\beta{}_\lambda g^{\alpha\nu} - g^{\beta\rho}g^\mu{}_\lambda g^{\alpha\nu} + g^{\alpha\rho}g^\mu{}_\lambda g^{\beta\nu} - g^{\rho\mu}g^\alpha{}_\lambda g^{\beta\nu} \\ &\quad + g^{\beta\rho}g^\nu{}_\lambda g^{\alpha\mu} - g^{\nu\rho}g^\beta{}_\lambda g^{\alpha\mu} + g^{\nu\rho}g^\alpha{}_\lambda g^{\beta\mu} - g^{\alpha\rho}g^\nu{}_\lambda g^{\beta\mu}) \\ &= i((g^{\rho\mu}g^\beta{}_\lambda - g^{\beta\rho}g^\mu{}_\lambda)g^{\alpha\nu} + (g^{\alpha\rho}g^\mu{}_\lambda - g^{\rho\mu}g^\alpha{}_\lambda)g^{\beta\nu} \\ &\quad + (g^{\beta\rho}g^\nu{}_\lambda - g^{\nu\rho}g^\beta{}_\lambda)g^{\alpha\mu} + (g^{\nu\rho}g^\alpha{}_\lambda - g^{\alpha\rho}g^\nu{}_\lambda)g^{\beta\mu}) \\ &= i(g^{\mu\rho}g^\beta{}_\lambda - g^{\beta\rho}g^\mu{}_\lambda)g^{\alpha\nu} + i(g^{\alpha\rho}g^\mu{}_\lambda - g^{\rho\mu}g^\alpha{}_\lambda)g^{\beta\nu} \\ &\quad + i(g^{\beta\rho}g^\nu{}_\lambda - g^{\nu\rho}g^\beta{}_\lambda)g^{\alpha\mu} + i(g^{\nu\rho}g^\alpha{}_\lambda - g^{\alpha\rho}g^\nu{}_\lambda)g^{\beta\mu} \\ &= g^{\alpha\nu}(M^{\mu\beta})^\rho{}_\lambda + g^{\beta\nu}(M^{\alpha\mu})^\rho{}_\lambda + g^{\alpha\mu}(M^{\beta\nu})^\rho{}_\lambda + g^{\beta\mu}(M^{\nu\alpha})^\rho{}_\lambda\end{aligned}$$

行列成分を省いて書けば

$$\begin{aligned}
[M^{\mu\nu}, M^{\alpha\beta}] &= i(g^{\alpha\nu} M^{\mu\beta} + g^{\beta\nu} M^{\alpha\mu} + g^{\alpha\mu} M^{\beta\nu} + g^{\beta\mu} M^{\nu\alpha}) \\
&= i(g^{\beta\nu} M^{\alpha\mu} - g^{\alpha\nu} M^{\beta\mu} - g^{\beta\mu} M^{\alpha\nu} + g^{\alpha\mu} M^{\beta\nu})
\end{aligned}$$

最後は M の添え字の左側に α, β がくるように入れ替えてるだけです。

$M^{\mu\nu}$ がどの変換を作っているのか見ます。 U の無限小変換

$$U = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (2)$$

に対して $\omega_{01} = -\omega_{10} \neq 0$ 、他は 0 として V_μ を変換すると

$$\begin{aligned}
V'^\alpha &= U^\alpha_\beta V^\beta = V^\alpha - \frac{i}{2} \omega_{01} (M^{01})^\alpha_\beta V^\beta - \frac{i}{2} \omega_{10} (M^{10})^\alpha_\beta V^\beta \\
&= V^\alpha - i \omega_{01} (M^{01})^\alpha_\beta V^\beta \\
&= V^\alpha + \omega_{01} (g^{0\alpha} \delta^1_\beta - \delta^0_\beta g^{1\alpha}) V^\beta \\
&= V^\alpha + \omega_{01} (g^{0\alpha} V^1 - g^{1\alpha} V^0)
\end{aligned}$$

成分は

$$V'^0 = V^0 + \omega_{01} V^1, \quad V'^1 = V^1 + \omega_{01} V^0, \quad V'^2 = V^2, \quad V'^3 = V^3$$

なので、行列で書けば

$$\begin{aligned}
V' &= V + \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & 0 & 0 \\ \omega_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V \\
(M^{01})^\alpha_\beta &= i(g^{0\alpha} g^1_\beta - g^0_\beta g^{1\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これは有限でのブースト

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

での無限小変換に対応し (相対論的力学の「ローレンツ変換」での $-iL_1$ がここでの M^{01})、 ω_{02}, ω_{03} でも同様に

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{02} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega_{03} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{03} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、 y, z 軸でのブーストになります。このことから、 $\omega_i = \omega_{0i}$, $K_i = M^{0i}$ ($i = 1, 2, 3$) とすれば、ブーストは

$$U = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = 1 - i\omega_{01} M^{01} - i\omega_{02} M^{02} - i\omega_{03} M^{03} = 1 - i\omega_i K_i \Rightarrow U = \exp[-i\omega_i K_i]$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と書いて、 K_i がブーストの生成子となります。位置が揃っているローマ文字の添え字でも 1 から 3 で和を取ります。

今度は $\omega_{12} = -\omega_{21} \neq 0$ 、他は 0 とした場合では

$$\begin{aligned} V'^\alpha &= V^\alpha - \frac{i}{2} \omega_{12} (M^{12})^\alpha{}_\beta V^\beta - \frac{i}{2} \omega_{21} (M^{21})^\alpha{}_\beta V^\beta \\ &= V^\alpha + \frac{1}{2} \omega_{12} (g^{1\alpha} g^2{}_\beta - g^1{}_\beta g^{2\alpha}) V^\beta - \frac{1}{2} \omega_{12} (g^{2\alpha} g^1{}_\beta - g^2{}_\beta g^{1\alpha}) V^\beta \\ &= V^\alpha + \frac{1}{2} \omega_{12} (g^{1\alpha} V^2 - g^{2\alpha} V^1) - \frac{1}{2} \omega_{12} (g^{2\alpha} V^1 - g^{1\alpha} V^2) \\ &= V^\alpha + \omega_{12} (g^{1\alpha} V^2 - g^{2\alpha} V^1) \end{aligned}$$

成分は

$$V'^0 = V^0, V'^1 = V^1 - \omega_{12} V^2, V'^2 = V^2 + \omega_{12} V^1, V'^3 = V^3$$

なので、行列で書くと

$$V' = V + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_{12} & 0 \\ 0 & \omega_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V$$

となって、 $\theta_3 = \omega_{12}$ とすれば

$$V'^{\alpha} = V^{\alpha} - \frac{i}{2}\theta_3(M^{12})^{\alpha}_{\beta}V^{\beta} + \frac{i}{2}\theta_3(M^{21})^{\alpha}_{\beta}V^{\beta} = V^{\alpha} - \frac{i}{2}\theta_3\epsilon_{3ij}(M^{ij})^{\alpha}_{\beta}V^{\beta}$$

$$(M^{12})^{\alpha}_{\beta} = i(g^{1\alpha}g^{2\beta} - g^1_{\beta}g^{2\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ϵ_{ijk} ($\epsilon_{123} = +1$) はレヴィ・チビタ記号です。 M^{12} は 4 次元での z 軸周りの回転

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

に対する生成子です。同様に、 ω_{23} では x 軸周り、 ω_{13} では y 軸周りになるので

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}$$

として、 $\theta_1 = \omega_{23}$, $\theta_2 = \omega_{13}$ とすれば

$$U = 1 - \frac{i}{2}\theta_1\epsilon_{1ij}M^{ij} - \frac{i}{2}\theta_2\epsilon_{2ij}M^{ij} - \frac{i}{2}\theta_3\epsilon_{3ij}M^{ij} = 1 - i\theta_iJ_i \Rightarrow U = \exp[-i\theta_iJ_i]$$

$$(M^{12})^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (M^{23})^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, (M^{31})^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このように、3 次元回転の生成子 J_i が出てきます。

というわけで、合わせれば

$$U = \exp[i\theta_iJ_i + i\omega_iK_i] \quad (J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk}, K_i = M^{0i}) \quad (5)$$

パラメータの符号を反転させてプラスにしています。 J_i は

$$J_1 = \frac{1}{2}\epsilon_{1jk}M^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{123}M^{23} + \frac{1}{2}\epsilon_{132}M^{32} = M^{23}$$

$$J_2 = M^{31}$$

$$J_3 = M^{12}$$

となっています。ローレンツ変換は3次元回転と3次元のブーストを含んでいるという性質そのままに、生成子として3次元回転の J_i とブーストの K_i が出てきました。

ここでは先にローレンツ変換の具体的な行列を使わずに生成子を求めましたが、生成子 G は変換行列を U 、パラメータを θ として

$$G = i \frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0}$$

として求めるのが手っ取り早いです (生成子の定義によってはマイナスがついたり、 i を省く場合もある)。例えば、(3) を使えば K_1 になります。

ブーストは空間反転で符号を変えます。空間反転 P は $(+1, -1, -1, -1)$ の対角行列なので、例えば PJ_1P^{-1} , PK_1P^{-1} と変換すると

$$PJ_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J_1$$

$$PK_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -K_1$$

となって、 K_1 は符号が反転するのが分かります。ブーストは3次元速度方向で与えられる変換なので、その向きを反転させれば反対向きの変換になるということです。

J_i, K_i の交換関係を求めます。 J_i の交換関係は

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \frac{1}{4} \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} M^{lm} M^{kn} - \frac{1}{4} \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} M^{kn} M^{lm} \\ &= \frac{1}{4} \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} [M^{lm}, M^{kn}] \\ &= \frac{i}{4} \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} (-g^{mn} M^{lk} + g^{ln} M^{mk} + g^{mk} M^{ln} - g^{lk} M^{mn}) \\ &= \frac{i}{4} (-\epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} g^{mn} M^{lk} - \epsilon_{iml} \epsilon_{jkn} g^{ln} M^{mk} - \epsilon_{ilm} \epsilon_{jnk} g^{mk} M^{ln} - \epsilon_{iml} \epsilon_{jnk} g^{lk} M^{mn}) \\ &= -\frac{i}{4} (\epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} g^{mn} M^{lk} + \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} g^{mn} M^{lk} + \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} g^{mn} M^{lk} + \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} g^{mn} M^{lk}) \\ &= i \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkn} \delta^{mn} M^{lk} \\ &= i \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkm} M^{lk} \\ &= i (\delta_{ij} \delta_{lk} - \delta_{ik} \delta_{lj}) M^{lk} \\ &= i M^{ij} \quad (M^{ij} = -M^{ji}, M^{ii} = 0) \\ &= i \epsilon_{ijk} J_k \end{aligned} \tag{6a}$$

最後に

$$\begin{aligned}
J_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk} \\
\epsilon_{mni} J_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{mni} \epsilon_{ijk} M^{jk} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{imn} \epsilon_{ijk} M^{jk} \\
&= \frac{1}{2} (\delta_{mj} \delta_{nk} - \delta_{mk} \delta_{nj}) M^{jk} \\
&= M^{mn}
\end{aligned}$$

を使っています。 K_i の交換関係は

$$\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= [M^{0i}, M^{0j}] \\
&= i(-g^{ij} M^{00} + g^{0j} M^{i0} + g^{i0} M^{0j} - g^{00} M^{ij}) \\
&= -i M^{ij} \\
&= -i \epsilon_{ijk} J_k
\end{aligned} \tag{6b}$$

J_i, K_i の交換関係は結果だけ示せば

$$[J_i, K_j] = i \epsilon_{ijk} K_k \tag{6c}$$

注意として、これらの交換関係の行列は今の表記では $(M^{\mu\nu})^\alpha_\beta$ です。また、行列で交換関係を直接計算するなら、例えば

$$\begin{aligned}
[K_1, K_2] &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i J_3
\end{aligned}$$

となります。

(6a)～(6c) がローレンツ変換のリー代数です。 J_i はエルミート行列ですが、 K_i は反エルミート行列であることに注意してください。そして、この結果で特徴的なのは、ブーストの交換関係が K_i だけで書けないという点です。

このように、ある変換に対する生成子 (今はブースト) が他の変換 (今は回転) の生成子と交換関係において混ざっていると、群を形成できません。なので、ローレンツ変換自体は群を形成し、ローレンツ群と呼ばれますが、その一部であるブースト部分は群を形成できません (ローレンツ群の部分群になっていない)。

ローレンツ群の話は J_i, K_i より、その線形結合である (数学が気になる人は複素数の線形結合な点に注意)

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i)$$

を使うと分かりやすくなります ($B_i = A_i^*$)。 J_i はエルミート行列、 K_i は反エルミート行列なので、 A_i, B_i はエルミート行列です。このときの交換関係は

$$\begin{aligned} [A_x, A_y] &= \frac{1}{4}[J_x + iK_x, J_y + iK_y] \\ &= \frac{1}{4}[J_x, J_y + iK_y] + \frac{1}{4}[iK_x, J_y + iK_y] \\ &= \frac{1}{4}[J_x, J_y] + \frac{1}{4}[J_x, iK_y] + \frac{1}{4}[iK_x, J_y] + \frac{1}{4}[iK_x, iK_y] \\ &= \frac{i}{4}J_z + \frac{-1}{4}K_z + \frac{-1}{4}K_z + \frac{i}{4}J_z \\ &= \frac{i}{2}(J_z + iK_z) \\ &= iA_z \end{aligned}$$

他の場合では

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k$$

$$[B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k$$

$$[A_i, B_j] = 0$$

$A_i, B_i = 0$ としたとき、それぞれ

$$A_i = \frac{1}{2}(J_i + iK_i) \Rightarrow J_i = -iK_i \quad (A_i = 0) \quad (7a)$$

$$B_i = \frac{1}{2}(J_i - iK_i) \Rightarrow J_i = iK_i \quad (B_i = 0) \quad (7b)$$

となり、関係の符号が逆になります。

A_i, B_i の交換関係は角運動量演算子と同じで、群としては $SU(2)$ を作ります (K_i, J_k のトレースは0)。そして、それぞれで交換関係を作り、お互いの交換関係が0なので、 A_i, B_i は無関係に $SU(2)$ を作ります。よって、ローレンツ変換は2つの $SU(2)$ による群 $SU(2) \times SU(2)$ を構成しています。

「 $SU(2)$ と表現」で示しているように、 $SU(2)$ の表現はカシミール演算子の固有値 $j(j+1)$ で区別できます。このことから、ローレンツ群の表現を (j, j') で指定し、 j を A_i 、 j' を B_i に対応させます。 $SU(2)$ の j で指定される表

現は $2j+1$ 次元ベクトル空間に作用するので、2つの $SU(2)$ によるローレンツ群の表現 (j, j') は $(2j+1)(2j'+1)$ 次元ベクトル空間に作用します。 $(0, 0)$ は 1 次元ベクトル空間でのスカラー $e^0 = 1$ (生成子が 0) なので (場で言えばスカラー場の変換 $\phi'(x') = \phi(x)$)、 $(0, 0)$ は変換として意味がないです。

$(1/2, 0)$ は $B_i = 0$ なので (7b)、 $(0, 1/2)$ は $A_i = 0$ なので (7a) で、2次元ベクトル空間です。このときの変換を求めます。簡単に言えば、ミンコフスキー空間での 4 元ベクトルに作用する 4×4 行列による変換だったのを、交換関係を変えずに 2×2 行列による変換にすることです。

$(1/2, 0)$ での K_i の交換関係は

$$[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} K_k \quad (J_i = iK_i)$$

今は 2×2 行列なのでパウリ行列 σ_i を使って

$$(\frac{1}{2}, 0) : K_i = -i\frac{\sigma_i}{2}, \quad J_i = iK_i \quad ([\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k)$$

とすれば

$$[K_i, K_j] = -\frac{1}{4}[\sigma_i, \sigma_j] = -\frac{1}{2}i\epsilon_{ijk}\sigma_k = -\epsilon_{ijk}K_k$$

$(0, 1/2)$ では、(7a) から K_i の符号が反転し

$$(0, \frac{1}{2}) : K_i = i\frac{\sigma_i}{2}, \quad J_i = -iK_i$$

となります。

$(1/2, 0)$ での変換は

$$\exp[i\theta_i J_i + i\omega_i K_i] = \exp[-\theta_i K_i + i\omega_i K_i] = \exp[\frac{i}{2}\theta_i \sigma_i + \frac{1}{2}\omega_i \sigma_i]$$

$(0, 1/2)$ では

$$\exp[i\theta_i J_i + i\omega_i K_i] = \exp[\theta_i K_i + i\omega_i K_i] = \exp[\frac{i}{2}\theta_i \sigma_i - \frac{1}{2}\omega_i \sigma_i]$$

空間反転で K_i は $-K_i$ になるので、 $(1/2, 0)$ と $(0, 1/2)$ は空間反転で繋がっています。

exp のない行列の形にするなら、例えば $i = 1$ として回転部分を展開して

$$\begin{aligned}
\exp[i\frac{\theta_1}{2}\sigma_1] &= 1 + i\frac{\theta_1}{2}\sigma_1 - \frac{1}{2}(\frac{\theta_1}{2})^2\sigma_1^2 - i\frac{1}{3!}(\frac{\theta_1}{2})^3\sigma_1^3 + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\frac{\theta_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(\frac{\theta_1}{2})^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\frac{1}{3!}(\frac{\theta_1}{2})^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\frac{\theta_1}{2})^2 + \dots & i\frac{\theta_1}{2} - i\frac{1}{3!}(\frac{\theta_1}{2})^3 + \dots \\ i\frac{\theta_1}{2} - i\frac{1}{3!}(\frac{\theta_1}{2})^3 + \dots & 1 - \frac{1}{2}(\frac{\theta_1}{2})^2 + \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_1}{2} & i \sin \frac{\theta_1}{2} \\ i \sin \frac{\theta_1}{2} & \cos \frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ブースト部分は

$$\begin{aligned}
\exp[\frac{\omega_1}{2}\sigma_1] &= 1 + \frac{\omega_1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}(\frac{\omega_1}{2})^2\sigma_1^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\omega_1}{2})^3\sigma_1^3 + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\frac{\omega_1}{2})^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}(\frac{\omega_1}{2})^3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}(\frac{\omega_1}{2})^2 + \dots & \frac{\omega_1}{2} + \frac{1}{3!}(\frac{\omega_1}{2})^3 + \dots \\ \frac{\omega_1}{2} + \frac{1}{3!}(\frac{\omega_1}{2})^3 + \dots & 1 + \frac{1}{2}(\frac{\omega_1}{2})^2 + \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh \frac{\theta_1}{2} & \sinh \frac{\theta_1}{2} \\ \sinh \frac{\theta_1}{2} & \cosh \frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

他の成分も同様に求められます。

変換を見てわかるように、行列式は1ですが(パウリ行列のトレースは1)、ユニタリー行列ではありません。行列式が1の行列による群を特殊線形群 (special linear group) と言い、今は 2×2 複素行列なので $SL(2, C)$ と書かれます。2は 2×2 行列、 C は複素数を表します。 2×2 複素行列の自由度は8で ($2 \times 2 = 4$ に、複素数の実部と虚部によってさらに2倍されて8)、行列式が1による $2(2$ 個の実数) を引くことで自由度は6になり、ローレンツ変換のパラメータの数と一致します。

4次元から2次元へ変える今の操作における特徴は、ローレンツ変換から1つの $SL(2, C)$ にいかずに、2つの $SL(2, C)$ が出てくることです (2つの $SL(2, C)$ が同じローレンツ変換に対応している)。より細かいことは「 $SL(2, C)$ の左手系、右手系」で触れています。

(1/2, 0) と (0, 1/2) はローレンツ群の異なる表現なので、作用する対象も異なっています。 $SU(2)$ が作用するベクトルをスピノールと定義することとブースト部分の符号が反転していることから、(1/2, 0) では左手系 (左巻き) のスピノール、(0, 1/2) では右手系 (右巻き) のスピノールと呼ばれます。空間反転で変わらない J_i がスピン 1/2 の変換に対応し、空間反転でブーストの符号が変わることをヘリシティと対応させているためです。簡単に言えば、スピン方向は同じで速度方向が反対なので、左手系と右手系として区別できるからです。左手系、右手系のスピノールはワイルスピノールと呼ばれます。

空間反転との関係を簡単に出しておきます。左手系の2成分スピノールを ξ_L 、右手系を χ_R として、4成分スピノールの空間反転を与えます。4成分スピノールを

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

と作ると、 ξ_L, χ_R の変換から

$$\psi' = \begin{pmatrix} \xi'_L \\ \chi'_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

D_L は $(1/2, 0)$ 、 D_R は $(0, 1/2)$ の変換行列です。空間反転させると

$$P\psi' = P \begin{pmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_R \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \xi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_R & 0 \\ 0 & D_L \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \xi_L \\ \chi_R \end{pmatrix}$$

左手系と右手系の変換が維持されるためには、空間反転に対して

$$P \begin{pmatrix} \xi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_R \\ \xi_L \end{pmatrix}$$

となればいいです。 $(1/2, 0)$ と $(0, 1/2)$ は空間反転で繋がっているために、空間反転で不変な理論を作るには ξ_L, χ_R を両方含むようにする必要があります。このようにしてパリティの話と $SL(2, C)$ が絡んできます。

また、左手系と右手系は複素共役で関係しています。 $D_L \xi_L$ の複素共役を取ると

$$\begin{aligned} D_L \xi_L &= \exp\left[\frac{i}{2}\theta_i \sigma_i + \frac{1}{2}\omega_i \sigma_i\right] \xi_L \\ (D_L \xi_L)^* &= \exp\left[-\frac{i}{2}\theta_i \sigma_i^* + \frac{1}{2}\omega_i \sigma_i^*\right] \xi_L^* \\ &= \exp\left[-\frac{i}{2}\theta_i \sigma_i^* + \frac{1}{2}\omega_i \sigma_i^*\right] \sigma_2 \sigma_2 \xi_L^* \quad (\sigma_i^2 = 1) \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} \sigma_2 \exp[\alpha \sigma_i] \sigma_2 &= \sigma_2 \left(1 + \alpha \sigma_i + \frac{1}{2} \alpha^2 (\sigma_i)^2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 (\sigma_i)^3 + \cdots\right) \sigma_2 \\ &= 1 + \alpha \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \sigma_2 (\sigma_i)^2 \sigma_2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 \sigma_2 (\sigma_i)^3 \sigma_2 + \cdots \\ &= 1 + \alpha \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 + \frac{1}{2} \alpha^2 (\sigma_2 \sigma_i \sigma_2)^2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 (\sigma_2 \sigma_i \sigma_2)^3 + \cdots \\ &= \exp[\alpha \sigma_2 \sigma_i \sigma_2] \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
\sigma_2 D_L^* \xi_L^* &= \sigma_2 D_L^* \sigma_2 \xi_L^* \\
&= \sigma_2 \exp\left[-\frac{i}{2}\theta_i \sigma_i^* + \frac{1}{2}\omega_i \sigma_i^*\right] \sigma_2 \xi_L^* \\
&= \exp\left[-\frac{i}{2}\theta_i \sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 + \frac{1}{2}\omega_i \sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2\right] \sigma_2 \xi_L^* \\
&= \exp\left[\frac{i}{2}\theta_i \sigma_i - \frac{1}{2}\omega_i \sigma_i\right] \sigma_2 \xi_L^* \\
&= D_R \sigma_2 \xi_L^*
\end{aligned}$$

使っているパウリ行列の関係 $\sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 = -\sigma_i$ は

$$\begin{aligned}
\sigma_2 \sigma_1^* \sigma_2 &= \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_2 \sigma_3 = -\sigma_1 \\
\sigma_2 \sigma_2^* \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_2 \sigma_2 = -\sigma_2 \\
\sigma_2 \sigma_3^* \sigma_2 &= \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 = i \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_3
\end{aligned}$$

となっているためです。というわけで、 $i\sigma_2 \xi_L^*$ の変換は

$$i\sigma_2 \xi_L'^* = i\sigma_2 (D_L \xi_L)^* = i\sigma_2 \exp\left[-\frac{i}{2}\theta_i \sigma_i^* + \frac{1}{2}\omega_i \sigma_i^*\right] \sigma_2 \xi_L^* = D_R i\sigma_2 \xi_L^*$$

となって、右手系の変換です。 $i\sigma_2 \eta_R^*$ では左手系の変換になります。この意味で、 D_L, D_R の複素共役の表現は D_R, D_L です。より詳しくは「ワイルスピノールの変換と表記」をご覧ください。

・補足

別の手順で $M^{\mu\nu}$ の交換関係を求めます。無限小ローレンツ変換を

$$\begin{aligned}
x^{\mu'} &= \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu, \quad \Lambda^\mu_{\nu} = \delta^\mu_{\nu} + \omega^\mu_{\nu} \\
U(1 - \omega) &= 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = 1 - \omega \\
U(1 + \omega) &= 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = 1 + \omega
\end{aligned}$$

と表記します。 $U(\Lambda)$ は

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)U(\Lambda') &= (1 - \omega)(1 - \omega') = 1 - \omega - \omega' + \omega\omega' \\
U(\Lambda\Lambda') &= U((1 - \omega)(1 - \omega')) = U(1 - \omega - \omega' + \omega\omega') = 1 - \omega - \omega' + \omega\omega'
\end{aligned}$$

なので、 $U(\Lambda)U(\Lambda') = U(\Lambda\Lambda')$ です。そうすると、 U の3つ積として

$$U(\Lambda)U(1-\omega)U(\Lambda^{-1})=U(1-\Lambda\omega\Lambda^{-1})$$

右辺は、ローレンツ変換はパラメータを変えるので

$$U(1-\omega')=1-\omega'=1-\frac{i}{2}\Lambda^\alpha_\mu\omega^\mu_\nu(\Lambda^{-1})^\nu_\beta M^\beta_\alpha=1-\frac{i}{2}\omega^\mu_\nu\Lambda^\alpha_\mu\Lambda^\nu_\beta M^\beta_\alpha$$

両辺から $\omega_{\mu\nu}$ の項を取り出すと

$$U(\Lambda)\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}U(\Lambda^{-1})=\omega^\mu_\nu\Lambda^\alpha_\mu\Lambda^\nu_\beta M^\beta_\alpha$$

$\omega_{\mu\nu}$ が 1 次の項までを見ることにして、これの右辺は

$$\begin{aligned}\Lambda^\alpha_\mu\Lambda^\nu_\beta M^\beta_\alpha &= (\delta^\alpha_\mu + \omega^\alpha_\mu)(\delta^\nu_\beta + \omega^\nu_\beta)M^\beta_\alpha \\ &= \delta^\alpha_\mu\omega^\nu_\beta M^\beta_\alpha + \delta^\nu_\beta\omega^\alpha_\mu M^\beta_\alpha \\ &= \omega^\nu_\beta M^\beta_\mu + \omega^\alpha_\mu M^\nu_\alpha \\ &= \frac{1}{2}(\omega^\nu_\beta M^\beta_\mu + \omega^\nu_\beta M^\beta_\mu) + \frac{1}{2}(\omega^\alpha_\mu M^\nu_\alpha + \omega^\alpha_\mu M^\nu_\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\omega^\nu_\beta M^\beta_\mu - \omega^\nu_\beta M^\beta_\mu) + \frac{1}{2}(\omega^\alpha_\mu M^\nu_\alpha - \omega^\alpha_\mu M^\nu_\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\alpha\nu}\omega_{\beta\alpha}M^\beta_\mu - g^{\alpha\nu}\omega_{\alpha\beta}M^\beta_\mu) + \frac{1}{2}(g_{\mu\beta}\omega^{\alpha\beta}M^\nu_\alpha - g_{\mu\beta}\omega^{\beta\alpha}M^\nu_\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(g^{\beta\nu}\omega_{\alpha\beta}M^\alpha_\mu - g^{\alpha\nu}\omega_{\alpha\beta}M^\beta_\mu) + \frac{1}{2}(g_{\mu\beta}\omega^{\alpha\beta}M^\nu_\alpha - g_{\mu\alpha}\omega^{\alpha\beta}M^\beta_\nu) \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(g^{\beta\nu}M^\alpha_\mu - g^{\alpha\nu}M^\beta_\mu) + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(g^\beta_\mu M^{\alpha\nu} - g^\alpha_\mu M^{\beta\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(g^{\beta\nu}M^\alpha_\mu - g^{\alpha\nu}M^\beta_\mu + g^\beta_\mu M^{\alpha\nu} - g^\alpha_\mu M^{\beta\nu})\end{aligned}$$

左辺は

$$(1-\omega)M^{\mu\nu}(1+\omega)=M^{\mu\nu}-\omega M^{\mu\nu}+M^{\mu\nu}\omega-\omega M^{\mu\nu}\omega$$

この $\omega_{\mu\nu}$ が 1 次の項は

$$-\omega M^{\mu\nu}+M^{\mu\nu}\omega=-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}M^{\mu\nu}+\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}M^{\mu\nu}M^{\alpha\beta}=-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[M^{\alpha\beta},M^{\mu\nu}]$$

よって、 $M^{\mu\nu}$ の交換関係は

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(g^{\beta\nu}M^{\mu\alpha} - g^{\alpha\nu}M^{\mu\beta} + g^{\mu\beta}M^{\alpha\nu} - g^{\mu\alpha}M^{\beta\nu}) \\
[M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}] &= i(g^{\beta\nu}M^{\mu\alpha} - g^{\alpha\nu}M^{\mu\beta} + g^{\mu\beta}M^{\alpha\nu} - g^{\mu\alpha}M^{\beta\nu}) \\
&= i(-g^{\beta\nu}M^{\alpha\mu} + g^{\alpha\nu}M^{\beta\mu} + g^{\beta\mu}M^{\alpha\nu} - g^{\alpha\mu}M^{\beta\nu})
\end{aligned}$$

これは直接求めた結果と同じです。