ワイルスピノールの変換と表記

4成分スピノールのローレンツ変換から左手系、右手系を求めて、ワイルスピノールの表記法を与えます。最後に $(1/2, 1/2)$ について簡単に触れています。

荷電共役について「 C, P, T 変換」や相対論的量子力学の「荷電共役」を見てください。

ローマ文字の添え字で $i, j, \dots$ は 1 から 3、 $a, b, \dots$ は 1 から 2 としています。

「ローレンツ群と $SL(2, C)$ 」で求めたものを 4成分スピノールから出します。4成分スピノールのローレンツ変換は相対論的量子力学の「ディラック方程式の共変性」で求めているように

$$\psi' = S\psi$$

$$S = \exp\left[\frac{i}{4}\lambda^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right], \quad S^{-1} = \gamma_0 S^\dagger \gamma_0 \quad (\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu])$$

$\lambda^{\mu\nu}$ はローレンツ変換の実数パラメータです ($\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu}$)。 $\sigma_{\mu\nu}$ は 4成分スピノールの行列成分に対応する 4×4 行列です。スピノール成分に関する添え字は省いているので注意してください。

ガンマ行列としてワイル表現を使います。ワイル表現は

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

符号が異なっている場合もあります。パウリ行列による (σ^0 は単位行列)

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^i) = (\sigma^0, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^i)$$

という表記を使えば

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

と書けます。そうすると、ガンマ行列の交換関係は

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\nu \\ \bar{\sigma}^\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\Sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という対角化した形になります。これによってローレンツ変換は

$$S = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}/8} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_{\mu\nu}\bar{\Sigma}^{\mu\nu}/8} \end{pmatrix}$$

となるために、ワイル表現ではスピノール ψ の上 2 成分と下 2 成分に対して別々に異なった変換が作用します。 $\Sigma^{\mu\nu}, \bar{\Sigma}^{\mu\nu}$ は 2×2 行列で、トレースは 0 です。

$\lambda_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}$ をばらしてみると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} &= -\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) \\ &= -\left(\frac{1}{8}\lambda_{00}(\sigma^0\bar{\sigma}^0 - \sigma^0\bar{\sigma}^0) + \frac{1}{8}\lambda_{0i}(\sigma^0\bar{\sigma}^i - \sigma^i\bar{\sigma}^0) + \frac{1}{8}\lambda_{i0}(\sigma^i\bar{\sigma}^0 - \sigma^0\bar{\sigma}^i) + \frac{1}{8}\lambda_{ij}(\sigma^i\bar{\sigma}^j - \sigma^j\bar{\sigma}^i)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{4}\lambda_{0i}(\sigma^0\bar{\sigma}^i - \sigma^i\bar{\sigma}^0) + \frac{1}{8}\lambda_{ij}(\sigma^i\bar{\sigma}^j - \sigma^j\bar{\sigma}^i)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{4}\lambda_{0i}(-\sigma^i - \sigma^i) - \frac{1}{8}\lambda_{ij}(\sigma^i\sigma^j - \sigma^j\sigma^i)\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\lambda_{0i}\sigma^i - \frac{1}{8}\lambda_{ij}[\sigma^i, \sigma^j]\right) \\ &= -\left(-\frac{1}{2}\lambda_{0i}\sigma^i - \frac{1}{8}2i\epsilon^{ijk}\lambda_{ij}\sigma^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\lambda_{0i}\sigma^i + \frac{i}{4}\epsilon^{ijk}\lambda_{ij}\sigma^k \end{aligned}$$

ϵ^{ijk} はレヴィ・チビタ記号です。第 2 項は

$$\begin{aligned} \epsilon^{ij3}\lambda_{ij}\sigma^3 &= \epsilon^{123}\lambda_{12}\sigma^3 + \epsilon^{213}\lambda_{21}\sigma^3 = 2\lambda_{12}\sigma^3 = 2\theta_3\sigma^3 \\ \epsilon^{ij2}\lambda_{ij}\sigma^2 &= \epsilon^{132}\lambda_{13}\sigma^2 + \epsilon^{312}\lambda_{31}\sigma^2 = 2\lambda_{31}\sigma^2 = 2\theta_2\sigma^2 \\ \epsilon^{ij1}\lambda_{ij}\sigma^1 &= \epsilon^{231}\lambda_{23}\sigma^1 + \epsilon^{321}\lambda_{32}\sigma^1 = 2\lambda_{23}\sigma^1 = 2\theta_1\sigma^1 \end{aligned}$$

と書くことにし、 $\lambda_{0i} = \omega_i$ として、3次元のみなので添え字を上にとそろえれば

$$s = \exp\left[-\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\omega^i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta^i\sigma^i\right] \quad (1)$$

これはローレンツ群の表現 $(1/2, 0)$ の変換です。ここでのローマ文字 $i, j, \dots$ の添え字は 1 から 3 で和を取ります。 $\bar{\Sigma}^{\mu\nu}$ では

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}\bar{\Sigma}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu) \\
&= -\left(\frac{1}{4}\lambda_i(\sigma^i + \sigma^i) - \frac{1}{8}\lambda_{ij}[\sigma^i, \sigma^j]\right) \\
&= -\frac{1}{2}\lambda_i\sigma^i + \frac{i}{4}\epsilon^{ijk}\lambda_{ij}\sigma^k \\
&= -\frac{1}{2}\omega^i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta^i\sigma^i
\end{aligned}$$

となり、 $(0, 1/2)$ の変換です。というわけで、ワイル表現において4成分スピノールの上2成分は左手系、下2成分は右手系となります。変換も左手系、右手系と呼んでいきます。

2つの変換は関係しています。左手系の変換は

$$s = \exp\left[-\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right], \quad s^{-1} = \exp\left[\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right]$$

$\lambda_{\mu\nu}\bar{\Sigma}^{\mu\nu}$ のエルミート共役は (ミンコフスキー空間の添え字 μ, ν, i, j に関してではない)

$$\left(\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}\bar{\Sigma}^{\mu\nu}\right)^\dagger = -\left(\frac{1}{2}\omega^i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta^i\sigma^i\right)^\dagger = -\frac{1}{2}\omega^i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta^i\sigma^i \quad (\sigma^i = (\sigma^i)^\dagger)$$

となっているので

$$(s^{-1})^\dagger = \exp\left[-\frac{1}{8}\lambda_{\mu\nu}\bar{\Sigma}^{\mu\nu}\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\omega^i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta^i\sigma^i\right] \quad (2)$$

これは右手系の変換です。よって、4成分の変換行列 S は

$$S = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & (s^{-1})^\dagger \end{pmatrix}$$

また、パウリ行列の関係 $\sigma^2(\sigma^i)^T\sigma^2 = -\sigma^i$ (T は転置) から

$$\begin{aligned}
\sigma^2(s^{-1})^T\sigma^2 &= \sigma^2 \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\omega^i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta^i\sigma^i\right)^T\right]\sigma^2 \\
&= \sigma^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\omega^i(\sigma^i)^T - \frac{i}{2}\theta^i(\sigma^i)^T\right]\sigma^2 \\
&= \exp\left[\frac{1}{2}\omega^i\sigma^i + \frac{i}{2}\theta^i\sigma^i\right] \\
&= s
\end{aligned} \quad (3)$$

となるので、複素共役を取れば

$$\sigma^2 s^* \sigma^2 = (s^{-1})^\dagger \quad (\sigma^{2*} = -\sigma^2) \quad (4)$$

として、左手系の複素共役に σ^2 を挟むことで右手系になるのが分かります。

スピノールの表記を定義します。ワイル表現での4成分スピノールを左手系、右手系のワイルスピノール L, R によって

$$\psi = \begin{pmatrix} L \\ R \end{pmatrix}$$

とします。変換は

$$L' = sL, \quad R' = (s^{-1})^\dagger R$$

これらをもとに上手いことローレンツ不変になる組み合わせを作ります。 sL での s を消したいので、 s^{-1} が出てくる (3) から

$$\sigma^2 L' = \sigma^2 sL = (s^{-1})^T \sigma^2 L$$

これの転置を取れば

$$(\sigma^2 L')^T = (\sigma^2 sL)^T = (\sigma^2 L)^T s^{-1}$$

後のために i をつけて、 $(i\sigma^2 L)^T$ と L の組み合わせは

$$(i\sigma^2 L')^T L' = (\sigma^2 L)^T s^{-1} sL = (i\sigma^2 L)^T L \quad (5)$$

となってローレンツ変換に対して不変になります。

ここで成分の表記を

$$L_a = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$$

とし、スピノールに付いてるローマ文字 $a, b, \dots$ は 1, 2 を指すことにします。ローレンツ変換で不変な形が求めたので、ミンコフスキー空間の表記を真似るために、上付き L^a を

$$i\sigma^2 L = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_2 \\ -L_1 \end{pmatrix}$$

から

$$i\sigma^2 L = \begin{pmatrix} L_2 \\ -L_1 \end{pmatrix} \Rightarrow L^a = \begin{pmatrix} L^1 \\ L^2 \end{pmatrix} \quad (L^1 = L_2, L^2 = -L_1)$$

と定義します。上下に分かれている同じスピノールの添え字では1から2で和を取ることにします。この表記で、(5)は $L^a L_a$ と書けて、4元ベクトルの内積と同じ感覚で使えます。展開すると

$$L^a L_a = L^1 L_1 + L^2 L_2 = L_2 L_1 - L_1 L_2$$

ここで注意すべきなのは

$$\begin{aligned} L^a L_a &= L_2 L_1 - L_1 L_2 = -L_2 L^2 - L_1 L^1 = -L_a L^a \\ L_a L^a &= L_1 L^1 + L_2 L^2 = L_1 L_2 - L_2 L_1 = -L^a L_a \end{aligned}$$

となっている点です。これはミンコフスキー空間の内積にはない性質で、入れ替えで反交換しています。このことは、 $L^a L_a$ は0とは指定されていないので、 L_1, L_2 の入れ替えは

$$L^a L_a = L_2 L_1 - L_1 L_2 = L_1 L_2 - L_1 L_2 = 0$$

となるべきではなく

$$L^a L_a = L_2 L_1 - L_1 L_2 = -L_1 L_2 - L_1 L_2 = -2L_1 L_2$$

となるからです。これは上付きでも同様です。入れ替えに対して反交換するのは明らかにフェルミオンの性質を反映していて、ワイル表現でのスピノールの成分はグラスマン数になっています。

今の内積に対応する計量は

$$\epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と与えられます。もしくは、パウリ行列によって

$$\epsilon^{ab} = (i\sigma^2)^{ab}, \quad \epsilon_{ab} = (-i\sigma^2)^{ab}$$

パウリ行列の添え字は

$$(\sigma^2)^{ab} = -(\sigma^2)_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

としています。これによって、添え字の規則は

$$L_a = \epsilon_{ab} L^b, \quad L^a = \epsilon^{ab} L_b$$

$$L^a L_a = \epsilon^{ab} L_b L_a = \epsilon^{11} L_1 L_1 + \epsilon^{12} L_2 L_1 + \epsilon^{21} L_1 L_2 + \epsilon^{22} L_2 L_2 = -L_2 L_1 - L_1 L_2$$

$$L^a L_a = \epsilon_{ab} L^a L^b = \epsilon_{11} L^1 L^1 + \epsilon_{12} L^1 L^2 + \epsilon_{21} L^2 L^1 + \epsilon_{22} L^2 L^2 = -L^1 L^2 + L^2 L^1$$

s の行列成分は s_a^b として、左手系の変換は

$$L'_a = (sL)_a = s_a^b L_b, \quad L'^a = (sL)^a = s^a_b L^b$$

s_a^b, s^a_b は

$$\begin{aligned} L'_a &= s_a^b L_b \\ &= s_a^b \epsilon_{bc} L^c \\ \epsilon^{da} L'_a &= \epsilon^{da} s_a^b \epsilon_{bc} L^c \\ L'^d &= \epsilon^{da} s_a^b \epsilon_{bc} L^c \end{aligned}$$

から

$$\epsilon^{da} s_a^b \epsilon_{bc} = s^d_c$$

パウリ行列を使えば

$$s^a_b = (\sigma^2 s \sigma^2)^a_b = (s^{-1T})^a_b \quad (6)$$

となり、(3) になります。なので、 L^a の変換は

$$L'^a = (s^{-1T})^a_b L^b$$

と書けます。ちなみに、 L^a の変換が L_a の変換行列 s をユニタリー行列 σ^2 によってユニタリー変換したものになっているために、数学的には L_a, L^a は表現として同値と言われます (同じベクトル空間における基底の違いでしかない)。

次に右手系の表記を与えます。右手系の変換は $R' = (s^{-1})^\dagger R$ なので、不変な内積を作るために $s^\dagger$ が出てくるようにします。 $s^\dagger$ は、(4) から

$$\sigma^2 R' = \sigma^2 (s^{-1})^\dagger R = \sigma^2 (s^{-1})^\dagger \sigma^2 \sigma^2 R = s^* \sigma^2 R$$

転置を取れば

$$(\sigma^2 R')^T = (\sigma^2 R)^T s^\dagger$$

と出てくるので、 $(\sigma^2 R)^T R$ が不変になるのが分かります。

R の成分を

$$R^{\dot{a}} = \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix}$$

と表記します。左手系との区別をつけるために (異なった $SL(2, C)$ の表現であることを表すため)、添え字にドットをつけて区別する慣習になっています。これは Van der Waerden の表記と呼ばれます。 $(\sigma^2 R)^T R$ が不変なので、右手系の下付きは

$$-i\sigma^2 R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2 \\ R^1 \end{pmatrix}$$

となることから

$$-i\sigma^2 R = \begin{pmatrix} -R^2 \\ R^1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_{\dot{a}} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (R_1 = -R^2, R_2 = R^1)$$

と定義します。この場合での計量は

$$\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = (i\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = (-i\sigma^2)_{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となって、 $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ は ϵ^{ab} と同じです。

右手系での変換行列の添え字は $(s^{-1})^{\dot{a}}_{\dot{b}}$ とし

$$R'^{\dot{a}} = (s^{-1})^{\dot{a}}_{\dot{b}} R^{\dot{b}}, \quad R'_{\dot{a}} = (s^{-1})^{\dot{b}}_{\dot{a}} R_{\dot{b}} \quad (7)$$

変換行列の関係は

$$\begin{aligned}
R'^{\dot{a}} &= (s^{-1\dot{\dagger}})_{\dot{b}}^{\dot{a}} R^{\dot{b}} \\
\epsilon_{\dot{c}\dot{a}} R'^{\dot{a}} &= \epsilon_{\dot{c}\dot{a}} (s^{-1\dot{\dagger}})_{\dot{b}}^{\dot{a}} \epsilon^{\dot{b}\dot{d}} R_{\dot{d}} \\
R'_{\dot{c}} &= \epsilon_{\dot{c}\dot{a}} (s^{-1\dot{\dagger}})_{\dot{b}}^{\dot{a}} \epsilon^{\dot{b}\dot{d}} R_{\dot{d}}
\end{aligned}$$

から

$$(s^{-1\dot{\dagger}})_{\dot{a}}^{\dot{b}} = \epsilon_{\dot{c}\dot{a}} (s^{-1\dot{\dagger}})_{\dot{b}}^{\dot{a}} \epsilon^{\dot{b}\dot{d}}$$

と与えられます。(4) から

$$(-i\sigma^2)_{\dot{c}\dot{a}} (s^{-1\dot{\dagger}})_{\dot{b}}^{\dot{a}} (i\sigma^2)^{\dot{b}\dot{d}} = (\sigma^2 s^{-1\dot{\dagger}} \sigma^2)_{\dot{c}}^{\dot{d}} = (s^*)_{\dot{c}}^{\dot{d}}$$

なので

$$R'_{\dot{a}} = (s^*)_{\dot{a}}^{\dot{b}} R_{\dot{b}} \quad (8)$$

R の変換 (7),(8) と L の変換

$$L'_a = s_a^b L_b, \quad L'^a = (s^{-1T})^a_b L^b$$

を比べると

$$L_a = R_a^*, \quad L^a = R^{a*}$$

と対応しています。成分で見れば

$$L_1 = -L^2 = -R^{\dot{2}} = R_1^*, \quad L^1 = L_2 = R_2^* = R^{\dot{1}*}$$

となっています。また、複素共役で対応しているので

$$\chi_a = \epsilon_{ab} L^{b*}$$

として右手系の変換を受ける χ を左手系から作れます。実際に

$$\begin{aligned}
\chi'_a &= \epsilon_{ab} L'^{b*} = \epsilon_{ab} (sL)^{b*} = \epsilon_{ab} (sL)^{b*} = \epsilon_{ab} (s^*)^b L^{a*} \\
&= \epsilon_{ab} (s^*)^b (\sigma^2)^{cd} (\sigma^2)^{de} L^{*e} \\
&= \epsilon_{ab} (s^*)^b (-i\epsilon^{cd})(i\epsilon_{de}) L^{*e} \\
&= i\epsilon_{ab} (s^*)^b (-i\epsilon^{cd}) \chi_d \\
&= (\sigma^2 s^* \sigma^2)_a^d \chi_d \\
&= (s^{-1\dagger})_a^d \chi_d
\end{aligned}$$

となっています。

マヨラナスピノールの定義を与えます。ワイル表現の4成分スピノールは今の表記を使うと

$$\psi = \begin{pmatrix} L_a \\ R^{\dot{a}} \end{pmatrix}$$

$\bar{\psi}$ は

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma_0 = (L_a^* \ R^{\dot{a}*}) \gamma_0 \\
&= (L_a^* \ R^{\dot{a}*}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (R^{\dot{a}*} \ L_a^*)
\end{aligned}$$

$\bar{\psi}^T$ は ψ と L, R の並びが逆になります。これを利用して R, L の並びにします。これは今までの関係からなんとなく予想できるように

$$\psi^C = C \bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} \bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} -i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{\dot{a}*} \\ L_a^* \end{pmatrix}$$

とすれば、パウリ行列 $(\sigma^2)^{ab}$ から

$$\begin{aligned}
i\sigma^2 L_a^* &\Rightarrow (i\sigma^2)^{ab} L_b^* = \epsilon^{ab} L_b^* = L^{a*} = R^{\dot{a}} \\
-i\sigma^2 R^{\dot{a}*} &\Rightarrow -(i\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}} R^{\dot{b}*} = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} R^{\dot{b}*} = R_{\dot{a}}^* = L_a
\end{aligned}$$

となるので

$$\psi^C = \begin{pmatrix} R^{\dot{a}} \\ L_a \end{pmatrix} \tag{9}$$

となり、左手系と右手系の並びがひっくり返ります。C はワイル表現において

$$C = -i\gamma^2\gamma^0 = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}$$

と与えられます。ψ に対して

$$\psi = \psi^C$$

という制限をかけたものをマヨラナ (Majorana、マジヨラナ) スピノールと呼び、これはマヨラナ条件と言われます。2 成分で書けば

$$\begin{pmatrix} L_a \\ R^{\dot{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{\dot{a}} \\ L_a \end{pmatrix}$$

という条件です。ψ^C は ψ の荷電共役なので、マヨラナ条件は粒子と反粒子が同じという制限です。当たり前ですが、マヨラナなら ψ^C と ψ は同じローレンツ変換に従います。

注意ですが、ワイル表現は γ⁰, γⁱ のどちらかの符号を反転させてもいいので、γ⁰ の定義次第では符号が反転します。例えば、γ₀ の符号を反転させると (9) での符号が反転します。

4 成分スピノールの荷電共役はスピノールと同じ変換をすることをついでに見ておきます。4 成分スピノールに対するローレンツ変換 S と荷電共役演算子 C の組み合わせ C(S⁻¹)^T は

$$\begin{aligned} C(S^{-1})^T &= C(\exp[\frac{i}{4}\lambda^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}])^T \\ &= C(\exp[-\frac{1}{8}\lambda^{\mu\nu}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]])^T \\ &= C \exp[-\frac{1}{8}\lambda^{\nu\mu}([\gamma_\mu, \gamma_\nu])^T] \\ &= C \exp[\frac{1}{8}\lambda^{\mu\nu}([\gamma_\mu, \gamma_\nu])^T] \end{aligned}$$

([γ_μ, γ_ν])^T は

$$C\gamma^{\mu T}C^{-1} = -\gamma^\mu \quad (C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T})$$

を使うことで

$$\begin{aligned} ([\gamma_\mu, \gamma_\nu])^T &= (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)^T \\ &= \gamma_\nu^T\gamma_\mu^T - \gamma_\mu^T\gamma_\nu^T \\ &= C^{-1}\gamma_\nu C C^{-1}\gamma_\mu C - C^{-1}\gamma_\mu C C^{-1}\gamma_\nu C \\ &= -C^{-1}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]C \end{aligned}$$

と分かるので

$$\begin{aligned}
C(S^{-1})^T &= C \exp \left[\frac{1}{8} \lambda^{\mu\nu} ([\gamma_\mu, \gamma_\nu])^T \right] \\
&= C \exp \left[-\frac{1}{8} \lambda^{\mu\nu} C^{-1} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] C \right] \\
&= \exp \left[-\frac{1}{8} \lambda^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] C \right] \\
&= \exp \left[-\frac{1}{8} \lambda^{\mu\nu} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right] C \\
&= SC
\end{aligned}$$

この関係を使うと、スピノールの荷電共役は

$$\psi'_C = (C\bar{\psi}^T)' = C(\bar{\psi}')^T = C(\bar{\psi}S^{-1})^T = C(S^{-1})^T\bar{\psi}^T = SC\bar{\psi}^T = S\psi_C$$

となり、スピノールと同じ変換なのが分かります。一方で、 $\bar{\psi}$ の変換は

$$\bar{\psi}' = \psi'^{\dagger} \gamma_0 = (S\psi)^{\dagger} \gamma_0 = \psi^{\dagger} S^{\dagger} \gamma_0 = \psi^{\dagger} \gamma_0 S^{-1} = \bar{\psi} S^{-1}$$

となっていて、 ψ とは違う変換をしています。

最後にローレンツ群の表現 $(1/2, 1/2)$ にも雑に触れておきます。 $(1/2, 1/2)$ は左手系と右手系の変換が同時にいる場合です。そして、それぞれが $SU(2)$ のリー代数を構成する A_i, B_i の交換関係は $[A_i, B_i] = 0$ なので、お互いに干渉しません。つまり、左手系の変換を受ける成分と右手系の変換を受ける成分の両方を持つ量として与えられます。それを今の表記を使って、 2×2 行列 v^{ab} とします。

左手系、右手系の自由度から独立成分は 4 あればいいので (スピンで言えば、上向き、下向きの自由度 2 が 2 つだから)、独立成分は 4 になるエルミート行列とします。任意のエルミート行列はパウリ行列の線形結合で書けるので

$$v_{ab} = \alpha_0(\sigma^0)^{ab} + \alpha_1(\sigma^1)^{ab} + \alpha_2(\sigma^2)^{ab} + \alpha_3(\sigma^3)^{ab} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix}$$

v とパウリ行列の添え字の位置がズレていますが、問題にならないのでこのままにします。左手系、右手系の変換は下付きの添え字に対して

$$L'_a = s_a{}^b L_b, \quad R'_a = (s^*)^b{}_a R_b$$

と定義しているので

$$v'_{ab} = (s)_a{}^c v_{cd} ((s^*)^d{}_b)^T$$

s^* の転置は

$$(s^*)^T = (\exp[\frac{1}{2}\omega^i\sigma^{i*} - \frac{i}{2}\theta^i\sigma^{i*}])^T = \exp[\frac{1}{2}\omega^i\sigma^i - \frac{i}{2}\theta^i\sigma^i]$$

変換部分すべてを見るのは面倒なので、 $i = 3$ 方向のブースト部分を見ることにして

$$\begin{aligned} v' &= \exp[\frac{1}{2}\omega\sigma^3]v\exp[\frac{1}{2}\omega\sigma^3] \quad (\omega = \omega^3) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-\omega/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-\omega/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-\omega/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_0 + \alpha_3)e^{\omega/2} & (\alpha_1 - i\alpha_2)e^{-\omega/2} \\ (\alpha_1 + i\alpha_2)e^{\omega/2} & (\alpha_0 - \alpha_3)e^{-\omega/2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha_0 + \alpha_3)e^\omega & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & (\alpha_0 - \alpha_3)e^{-\omega} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

成分で書けば

$$(1\dot{1}) : \alpha'_0 + \alpha'_3 = (\alpha_0 + \alpha_3)e^\omega$$

$$(1\dot{2}) : \alpha'_1 - i\alpha'_2 = (\alpha_1 - i\alpha_2)e^\omega$$

$$(2\dot{1}) : \alpha'_1 + i\alpha'_2 = \alpha_1 + i\alpha_2$$

$$(2\dot{2}) : \alpha'_0 - \alpha'_3 = (\alpha_0 - \alpha_3)e^{-\omega}$$

双曲線関数によって

$$e^\omega = \cosh \omega + \sinh \omega, \quad e^{-\omega} = \cosh \omega - \sinh \omega$$

とすれば

$$\alpha'_0 = (\alpha_0 + \alpha_3)e^\omega + (\alpha_0 - \alpha_3)e^{-\omega} = \alpha_0 \cosh \omega + \alpha_3 \sinh \omega$$

$$\alpha'_1 = \alpha_1$$

$$\alpha'_2 = \alpha_2$$

$$\alpha'_3 = (\alpha_0 + \alpha_3)e^\omega - (\alpha_0 - \alpha_3)e^{-\omega} = \alpha_0 \sinh \omega + \alpha_3 \cosh \omega$$

これは4元ベクトルのブーストです。このことから、 $(1/2, 1/2)$ は4元ベクトルを 2×2 エルミート行列の形に変えていた表現だとわかります(数学側からすれば今のように 2×2 エルミート行列のほうが先にあり、それを変形

すると4元ベクトルのローレンツ変換になる)。このため、 $(1/2, 1/2)$ はベクトル表現と呼ばれ、この意味でベクトルはスピノールの添え字を2つ持つと言われたりもします。