マヨラナ質量

ディラック方程式に左手系、右手系の概念を加え、マヨラナ質量の話をします。基本的なガンマ行列の扱いは知っているとしています。
話としては、$\mathcal{L}_{mass}$ が出てくるところまでで十分です。それ以降はついでの話みたいなものです。
ここでの話を物理と結び付けるには、標準模型とニュートリノのまとまった知識が必要になるので、知らない人は取り合えずこんなものもあるんだ程度に見てください (一応簡単には説明しています)。
ニュートリノに興味がある人はざっと見ておくと、詳細に勉強しようとしたときに役に立つかもしれません。

ディラック方程式は

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_D)\psi = 0$$

対応するラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m_D)\psi$$

スピノール ψ は 1×4 行列、ガンマ行列は 4×4 行列で、質量 m_D の項での単位行列は書いていません。ラグランジアン密度の質量項のスピノールの組み合わせは $\overline{\psi}\psi$ はスカラーで、ローレンツ不変です。また、

$$(\overline{\psi}\psi)^\dagger = (\psi^\dagger\gamma_0\psi)^\dagger = \psi^\dagger\gamma_0^\dagger\psi = \psi^\dagger\gamma_0\psi = \overline{\psi}\psi$$

から、エルミートです。しかし、ローレンツ不変ならいいということから、質量項として他の形を考えられます。
まず、ψ の荷電共役 ψ^c を使うことで、簡単にスカラーを作ることが出来ます。荷電共役は荷電共役演算子 C によって

$$\psi^c = C\overline{\psi}^T$$

となっています (相対論的量子力学の「荷電共役」参照)。T は行列の転置を表します。C は

$$C^{-1} = C^\dagger = -C\ ,\ \gamma_\mu = -C\gamma_\mu^T C^{-1}\ ,\ \gamma_5 = C\gamma_5^T C^{-1}$$

$$(\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ ,\ \gamma_5 = \gamma^5\ ,\ \gamma_5^\dagger = \gamma_5\ ,\ \gamma_\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma_\mu = 0)$$

という性質を持っています。γ_5 の場合は

$$C^{-1}\gamma_\mu = -\gamma_\mu^T C^{-1}\ ,\ \gamma_5^T = i\gamma_3^T\gamma_2^T\gamma_1^T\gamma_0^T\ ,\ \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

を使えば

$$\gamma_5^T C^{-1} = i\gamma_3^T\gamma_2^T\gamma_1^T\gamma_0^T C^{-1} = -i\gamma_3^T\gamma_2^T\gamma_1^T C^{-1}\gamma_0 = iC^{-1}\gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0 = iC^{-1}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = C^{-1}\gamma_5$$

というように出てきます。ψ^c のローレンツ変換は下の補足で示してます。

ローレンツ不変になる組み合わせで簡単に思いつくのは $\overline{\psi}^c\psi^c$ で、これはディラック方程式の質量項の荷電共役でしかないので、エルミートであることはすぐに分かります。他に ψ^c を使ってスカラーになるのは、$\overline{\psi}\psi^c, \overline{\psi}^c\psi$ という組み合わせです。これらはお互いがエルミート共役になっていて、それは

$$(\overline{\psi}\psi^c)^\dagger = (\psi^\dagger\gamma_0 C\overline{\psi}^T)^\dagger = (C\overline{\psi}^T)^\dagger\gamma_0\psi = \psi^{c\dagger}\gamma_0\psi = \overline{\psi}^c\psi$$

から分かります。よって

$$\mathcal{L}_M = m_M\overline{\psi}^c\psi^c + m_M\overline{\psi}\psi^c + m_M\overline{\psi}^c\psi$$

としたものはエルミートです。なので、ラグランジアン密度にこれを加えます。このように加えられた質量 m_M のことをマヨラナ質量 (Majorana mass) と呼び、対応する粒子をマヨラナ粒子と呼びます。ただし、第一項はディラック方程式の荷電共役版でしかないので、マヨラナ質量項と言ったときには大体省かれます。

マヨラナ質量についてさらに見ていくために、フェルミオンの左手系、右手系の区別を持ち込みます。左手系、右手系は相対論的量子力学の「ワイル方程式」を見てください。左手系、右手系への射影演算子は

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\ ,\ P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

によって与えられ、スピノールに作用させると

$$P_L\psi = \psi_L\ ,\ P_R\psi = \psi_R$$

となるとします。L が左手系、R が右手系であることを表します。この二つの射影演算子は

$$P_LP_R = 0\ ,\ P_L + P_R = 1\ ,\ P_L^2 = P_R^2 = 1$$

となっています ($\gamma_5^2 = 1$)。このため

$$P_RP_L\psi = P_LP_R\psi = 0$$

$$\psi = (P_L + P_R)\psi = \psi_L + \psi_R$$

そして、γ_5 を ψ_L, ψ_R に作用させると

$$\begin{aligned}
\gamma_5\psi_L &= \frac{1}{2}\gamma_5(1-\gamma_5)\psi = -\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi = -\psi_L\\
\gamma_5\psi_R &= \frac{1}{2}\gamma_5(1+\gamma_5)\psi = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi = \psi_R\\
\overline{\psi}_L\gamma_5 &= \overline{P_L\psi}\gamma_5 = (P_L\psi)^\dagger\gamma_0\gamma_5 = -\psi^\dagger P_L\gamma_5\gamma_0 = \psi^\dagger P_L\gamma_0 = \overline{\psi}_L\\
\overline{\psi}_R\gamma_5 &= (P_R\psi)^\dagger\gamma_0\gamma_5 = -\psi^\dagger P_R\gamma_5\gamma_0 = -\overline{\psi}_R
\end{aligned}$$

となっていて、ψ_L, ψ_R は固有値 ± 1 を持つ γ_5 の固有状態になっています。この ± 1 をカイラリティ(chirality) と呼び、この意味で γ_5 はカイラル演算子と呼ばれます。

左手系のフェルミオンに対して荷電共役を取ってみると

$$
\begin{aligned}
(\psi_L)^c = C\overline{\psi}_L^T &= C((P_L\psi)^\dagger\gamma_0)^T \\
&= \frac{1}{2}C(\psi^\dagger(1-\gamma_5)^\dagger\gamma_0)^T \\
&= \frac{1}{2}C(\psi^\dagger\gamma_0(1+\gamma_5))^T \\
&= \frac{1}{2}C(1+\gamma_5^T)\overline{\psi}^T \\
&= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)C\overline{\psi}^T \\
&= P_R\psi^c \\
&= \psi_R^c
\end{aligned}
$$

となって、左手系と右手系が入れ替わった状態に対応しています。$(\psi_L)^c$ は ψ_L の荷電共役、ψ_R^c は ψ^c の右手系であることを表しています。ψ_R でも同じで

$$
(\psi_R)^c = \psi_L^c
$$

となっています。そして、この関係から

$$
\begin{aligned}
\gamma_5(\psi_L)^c = \gamma_5\psi_R^c = \gamma_5\frac{1}{2}(1+\gamma_5)C\overline{\psi}^T = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)C\overline{\psi}^T = (\psi_L)^c \\
\gamma_5(\psi_R)^c = \gamma_5\psi_L^c = \gamma_5\frac{1}{2}(1-\gamma_5)C\overline{\psi}^T = -\frac{1}{2}(1-\gamma_5)C\overline{\psi}^T = -(\psi_R)^c
\end{aligned}
$$

これより、$\psi_{L,R}$ と $(\psi_{L,R})^c$ のカイラリティが反対になっていることも分かります。

話を戻して、マヨラナ質量項を左手系、右手系のスピノールで書くと

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_M &= m_M\overline{\psi}^c\psi^c + m_M\overline{\psi}\psi^c + m_M\overline{\psi}^c\psi \\
&= m_M(\overline{\psi}_L^c + \overline{\psi}_R^c)(\psi_L^c + \psi_R^c) + m_M(\overline{\psi}_L + \overline{\psi}_R)(\psi_L^c + \psi_R^c) + m_M(\overline{\psi}_L^c + \overline{\psi}_R^c)(\psi_L + \psi_R) \\
&= m_M(\overline{\psi}_L^c + \overline{\psi}_R^c)(\psi_L^c + \psi_R^c) + m_M(\overline{\psi}_L\psi_L^c + \overline{\psi}_R\psi_R^c + \overline{\psi}_L\psi_R^c + \overline{\psi}_R\psi_L^c) + m_M(\overline{\psi}_L^c\psi_L + \overline{\psi}_R^c\psi_R + \overline{\psi}_L^c\psi_R + \overline{\psi}_R^c\psi_L)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\overline{\psi}^c_L \psi^c_L = \overline{P_L\psi^c} P_L \psi^c = (P_L\psi^c)^\dagger \gamma_0 P_L \psi^c = \psi^{c\dagger} P_L \gamma_0 P_L \psi^c = \psi^{c\dagger}\gamma_0 P_R P_L \psi^c = 0 \\
&\overline{\psi}_L \psi^c_L = \overline{P_L\psi} P_L \psi^c = (P_L\psi)^\dagger \gamma_0 P_L \psi^c = \psi^\dagger P_L \gamma_0 P_L \psi^c = 0 \\
&\overline{\psi}^c_L \psi_L = \overline{P_L\psi^c} P_L \psi = (P_L\psi^c)^\dagger \gamma_0 P_L \psi^c = \psi^{c\dagger} P_L \gamma_0 P_L \psi^c = \psi^{c\dagger}\gamma_0 P_R P_L \psi^c = 0 \\
&\overline{\psi}^c_R \psi^c_R = 0 \\
&\overline{\psi}_R \psi^c_R = 0 \\
&\overline{\psi}^c_R \psi_R = 0
\end{aligned}
$$

となることを使えば

$$
\mathcal{L}_M = m_M(\overline{\psi}^c_L \psi^c_R + \overline{\psi}^c_R \psi^c_L) + m_M(\overline{\psi}_L \psi^c_R + \overline{\psi}_R \psi^c_L) + m_M(\overline{\psi}^c_L \psi_R + \overline{\psi}^c_R \psi_L)
$$

エルミート共役を取ってみると

$$
\begin{aligned}
&(\overline{\psi}^c_L \psi^c_R)^\dagger = \psi^{c\dagger}_R \gamma_0 \psi^c_L = \overline{\psi}^c_R \psi^c_L \\
&(\overline{\psi}_L \psi^c_R)^\dagger = \psi^{c\dagger}_R \gamma_0 \psi_L = \overline{\psi}^c_R \psi_L \\
&(\overline{\psi}^c_L \psi^c_R)^\dagger = \overline{\psi}^c_R \psi^c_L \\
&(\overline{\psi}_R \psi^c_L)^\dagger = \overline{\psi}^c_L \psi_R
\end{aligned}
$$

となっているので、エルミート共役同士になっているものを組ませることで $\mathcal{L}_M$ は

$$
\mathcal{L}_D = m_D(\overline{\psi}^c_L \psi^c_R + \overline{\psi}^c_R \psi^c_L)
$$

$$
\mathcal{L}_L = m_L(\overline{\psi}_L \psi^c_R + \overline{\psi}^c_R \psi_L)
$$

$$
\mathcal{L}_R = m_R(\overline{\psi}^c_L \psi_R + \overline{\psi}_R \psi^c_L)
$$

と分離させられます。$\mathcal{L}_D$ はディラック方程式の質量と同じにするために m_D としています。質量の L, R は、L では $\psi^c_R = (\psi_L)^c, \overline{\psi}^c_R = (\overline{\psi}_L)^c$ のように左手系でかけるために左手系の質量という意味で m_L としていて、m_R も同じ意味です。

通常のディラック方程式のラグランジアンの質量項とあわせれば

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{mass} &= m_D\overline{\psi}\psi + m_D(\overline{\psi}^c_L \psi^c_R + \overline{\psi}^c_R \psi^c_L) + m_L(\overline{\psi}_L \psi^c_R + \overline{\psi}^c_R \psi_L) + m_R(\overline{\psi}_L \psi^c_R + \overline{\psi}^c_R \psi_L) \\
&= m_D(\overline{\psi}_L \psi_R + \overline{\psi}_R \psi_L) + m_D(\overline{\psi}^c_L \psi^c_R + \overline{\psi}^c_R \psi^c_L) + m_L(\overline{\psi}_L \psi^c_R + \overline{\psi}^c_R \psi_L) + m_R(\overline{\psi}^c_L \psi_R + \overline{\psi}_R \psi^c_L) \\
&= m_D(\overline{\psi}_L \psi_R + \overline{\psi}^c_L \psi^c_R) + m_L\overline{\psi}_L \psi^c_R + m_R\overline{\psi}^c_L \psi_R + m_D(\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}^c_R \psi^c_L) + m_L\overline{\psi}^c_R \psi_L + m_R\overline{\psi}_R \psi^c_L
\end{aligned}
$$

第四項以降がエルミート共役になっています。これが、左手系、右手系とマヨラナ質量の意味を加えた質量項の形になります。通常のディラック方程式で $m_D=0$ とするワイル方程式ではマヨラナ質量はいないので、左手系、右手系に対応する質量 $m_{L,R}$ は出てきません。

なんでディラック方程式やワイル方程式でマヨラナ質量を考慮しないのかというと、マヨラナ質量項は位相変換に対して不変になっていないからです。ディラック方程式のラグランジアンにおける質量項はただの位相変換 $e^{i\alpha}$ に対して (α は任意定数)

$$\overline{\psi}\psi \ \Rightarrow \ \psi^\dagger e^{-i\alpha}\gamma_0\psi e^{i\alpha}=\overline{\psi}\psi$$

となっていますが、マヨラナ質量項では

$$\overline{\psi}\psi^c=\psi^\dagger\gamma_0 C\overline{\psi}^T=\psi^\dagger\gamma_0 C(\psi^\dagger\gamma_0)^T \ \Rightarrow \ \psi^\dagger e^{-i\alpha}\gamma_0 C(\psi^\dagger e^{-i\alpha}\gamma_0)^T$$

となるので位相変換に対して不変になっていません。左手系、右手系で書いたときでも、例えば

$$\overline{\psi}_L\psi_R^c=\overline{\psi}_L(\psi_L)^c=\overline{\psi}_L C\overline{\psi}_L^T=\psi_L^\dagger\gamma_0 C(\psi^\dagger\gamma_0)^T$$

$$(\psi=\psi_L+\psi_R \ \Rightarrow \ e^{i\alpha}\psi=e^{i\alpha}\psi_L+e^{i\alpha}\psi_R))$$

なので、位相変換に対して不変でないことが分かります。このように、マヨラナ質量項は位相変換に対して不変でないために、粒子数 (電荷) が保存しません (位相変換に対応するネーターカレントの保存量が存在しない)。このため、電荷が保存しないといけない電子とかのフェルミオンを表現するディラック方程式には、マヨラナ質量項をつけることができません。電荷が保存しなくてもいいフェルミオンなんかいるのかですが、ちゃんと存在していて、それがニュートリノ (neutrino) です。ニュートリノはスピン 1/2 なのでフェルミオンですが、中性の粒子です。もしニュートリノが質量 0 なら、何も考えずにディラック方程式の質量を 0 にしたワイル方程式を使えばいいですが、1998 年あたりにニュートリノには質量があるということが実験的に示されたために、現在ではマヨラナ質量を考慮するようになっています。それでも、単にマヨラナ質量項をいれただけでは、ニュートリノ質量が非常に小さいことを自然に説明できなく、さらにひねる必要があります。その発想の一つであるシーソー機構について簡単に見ておきます。

このままの質量項の形だと何がどうなっているのか分からないので、分かりやすい状況に持っていきます。分かりやすいといっても、状況を把握できていると分かりやすいというだけで、そんなに分かりやすくなりませんし、シーソー機構という特殊と言えば特殊な話になるので、興味のない人はこれ以降は気にしないでいいです。

まず、見やすくするために

$$M=\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$$

という行列を定義すれば

$$\mathcal{L}_{mass}=(\overline{\psi}_L \ \overline{\psi}_L^c)\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_R \end{pmatrix}+(\overline{\psi}_R^c \ \overline{\psi}_R)\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_L^c \end{pmatrix}$$

なので

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_L^c \end{pmatrix}, \ \Psi_R^c = \begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

とすれば

$$\mathcal{L}_{mass} = \overline{\Psi}_L M \Psi_R^c + \overline{\Psi}_R^c M \Psi_L$$

M は対角化されていないために状態 (スピノール) の固有値となっていなく、観測可能な質量がどのようになっているのか分かりません (ディラック場の質量項は対角成分のみ)。なので、対角化します。m_L, m_R, m_D は実数とすれば、M はエルミート行列になっているので、対角化はユニタリー行列 U によって

$$M_{diag} = U^{-1} M U$$

とできます (量子力学の「エルミート演算子」参照)。ここで M を

$$M = \frac{1}{2}\mathrm{tr}M + M'$$

と分解すると簡単になります (第一項には 2×2 単位行列がいます)。このとき M' のトレースは 0 で

$$M' = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}(m_R - m_L) & m_D \\ m_D & \dfrac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix}$$

としています。こうすれば

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}M = \frac{1}{2}(m_L + m_R)$$

とあわせることで M と一致します。第一項はすでに対角化されているので、M' を対角化すればいいです。

　これは対称行列の対角化なので、対角化後の行列要素は

$$\det(M' - x) = 0$$

を使って

$$-\frac{1}{4}(m_R - m_L)^2 + x^2 - m_D^2 = 0$$

より

$$\begin{aligned} x =& \pm\frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \\ =& \pm m \end{aligned}$$

と求まります。ここで対角化を行う行列が

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となっているとします。そうすると対角化後の M' を M'_{diag} とすれば

$$\begin{aligned} M' &= UM'_{diag}U^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -m\cos^2\theta + m\sin^2\theta & m\sin\theta\cos\theta + m\sin\theta\cos\theta \\ m\sin\theta\cos\theta + m\sin\theta\cos\theta & -m\sin^2\theta + m\cos^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これと M' を比較すると

$$m\cos^2\theta - m\sin^2\theta = \frac{1}{2}(m_R - m_L)\ ,\ 2m\sin\theta\cos\theta = m_D$$

なので、$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ を使うことで

$$\cos 2\theta = \frac{m_R - m_L}{\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}}\ ,\ \sin 2\theta = \frac{2m_D}{\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}}$$

このように角度 θ を $m_D, m_{L,R}$ によって表現されます。よって、対角化された M_{diag} は

$$\begin{aligned} M_{diag} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}M + M'_{diag} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m_R + m_L) - \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(m_R + m_L) + \frac{1}{2}\sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これがマヨラナ粒子の質量になりますが、m_1 にはマイナス符号がいるために、このままでは正なのか負なのか判別できないので、正の質量を定義するために $m'_i = |m_i|,\ m_i = \epsilon_i m'_i,\ \epsilon_i = \pm 1\ (i = 1, 2)$ というのを定義しておきます。

ここで出てきた角度 θ が何かは、例えば $\overline{\Psi}_L M \Psi_R^c$ の M を対角化したときの固有状態を見るとわかります。変形して

$$\overline{\Psi}_L M \Psi_R^c = \overline{\Psi}_L U U^{-1} M U U^{-1} \Psi_R^c = \overline{\Psi}_L U M_{diag} U^{-1} \Psi_R^c$$

そうすると、対角化された M_{diag} の固有状態は

$$U^{-1}\Psi_R^c = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_R^c \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R^c\cos\theta - \psi_R\sin\theta \\ \psi_R^c\sin\theta + \psi_R\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\overline{\Psi}_L U = (\overline{\psi}_L\ \overline{\psi}_L^c)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (\overline{\psi}_L\cos\theta - \overline{\psi}_L^c\sin\theta\ \ \overline{\psi}_L\sin\theta + \overline{\psi}_L^c\cos\theta)$$

となることから、$\psi_{L,R}$ と $\psi_{L,R}^c$ を混ぜる角度になっています。さらに、θ は $m_D, m_{L,R}$ によって決定されます。質量によって角度 θ や状況が変わるので、それも見ておきます。

$m_L = m_R = 0$ のとき、$\theta = \pi/4$ となって、$m'_{1,2} = m_D$ $(\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = +1)$ なのでディラック方程式の質量項のみが生き残ります。よって、この場合はただのディラック方程式の質量項を作り出します。$m_D = 0$ では、$\theta = 0$ で、$m'_{1,2} = m_{L,R}$ $(\epsilon_{1,2} = +1)$ となるので、マヨナラ質量のみが生き残ります。$m_L = 0$、$m_R \gg m_D$ とすると、$m_D/m_R \ll 1$ なので $\theta \ll 1$ となります。このとき、$m'_{1,2}$ は

$$m'_1 = -\frac{1}{2}m_R + \frac{1}{2}m_R\sqrt{1+4m_D^2/m_R^2} \simeq -\frac{1}{2}m_R + \frac{1}{2}m_R(1+\frac{2m_D^2}{m_R^2}) = \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D \quad (\epsilon_1 = -1) \tag{1}$$

$$m'_2 = \frac{1}{2}m_R + \frac{1}{2}m_R\sqrt{1+4m_D^2/m_R^2} \simeq \frac{1}{2}m_R + \frac{1}{2}m_R(1+\frac{2m_D^2}{m_R^2}) \simeq m_R \gg m_D \quad (\epsilon_2 = +1) \tag{2}$$

となります。

これで何が表現できたのかを簡単に説明します。物理と結び付けるには必要な知識が多いので、大雑把にしか説明しません。ここでの話は簡単に言ってしまえば、マヨラナ粒子 (ここで使ってきたスピノール) をニュートリノと思うことで、そのままニュートリノの記述になります (ニュートリノでは $\psi = \psi^c$ であることを組み込む必要がありますが)。そのため、この表現において、ニュートリノはマヨラナ粒子と呼ばれます。そして、最後に見た (1),(2) がニュートリノ質量でのシーソー (seesaw) 機構の入り口です。m_D はクォークかレプトン (ニュートリノを除く) の質量とみなされ、ヒッグス機構によって作られると仮定されています。m_R を m_D より大きく取っているのは、電弱相互作用の典型的なエネルギースケールよりも大きな領域でおきる現象と考えられているからです (m_R はレプトン数の保存を壊しますが、それが起きるのは電弱相互作用よりも大きなエネルギースケールと考えるから)。そして、ニュートリノはクォークやレプトンよりも軽いはずなので、m'_1 がニュートリノ質量で、重いマヨラナ粒子の質量 m_R はニュートリノ質量ではないです (大まかには m_R は 10^{15}GeV 程度、トップクォークは約 170GeV)。しかし、シーソー機構を考えるときには必要な粒子です。つまり、シーソー機構が正当だと言うには、ニュートリノがマヨラナ粒子、ニュートリノは軽い、かなり重いマヨラナ粒子がいるという条件が必要になっています。ちなみにシーソーという名前は、m'_2 (m_R) を重くすれば m'_1 が小さくなるという構造になっていることから来ています。

・補足

スピノールに対して

$$\psi = \psi^c \tag{3}$$

という条件を付ける場合があります。これは荷電共役をとっても元のスピノールと変わらないことから、粒子と反粒子が同じという条件です。そして、この条件は

$$\psi = \psi^* \tag{4}$$

と同じ意味になっています。これは簡単に分かります。この実数の条件を満たすスピノールを ψ' とし、これはユニタリー行列 U によるユニタリー変換によって

$$\psi' = U_1\psi\ ,\ \psi'^\dagger = \psi^\dagger U_1^\dagger \tag{5}$$

これはガンマ行列の変換

$$\gamma'_\mu = U_1\gamma_\mu U_1^\dagger$$

と合わせることで、ラグランジアンは

$$\begin{aligned}\overline{\psi}'(i\gamma'_\mu\partial^\mu - m)\psi' = \psi'^\dagger\gamma'_0(i\gamma'_\mu\partial^\mu - m)\psi' &= \psi^\dagger U_1^\dagger U_1\gamma_0 U_1^\dagger(iU_1\gamma_\mu U_1^\dagger\partial^\mu - m)U_1\psi\\ &= \psi^\dagger\gamma_0(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi\\ &= \overline{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi\end{aligned}$$

となって不変です。言い換えると、ガンマ行列を U によって別のガンマ行列に変換するとスピノールが変換 (5) を受けるということです。ψ^c は

$$\psi^c = C\overline{\psi}^T = C(\psi^\dagger\gamma_0)^T = C\gamma_0\psi^* = U\psi^* \quad (\gamma_0^T = \gamma_0)$$

U はユニタリー行列です ($(C\gamma_0)^\dagger = \gamma_0 C^\dagger = -\gamma_0 C = C\gamma_0$)。これを条件 (3) に入れると

$$\psi = U\psi^*$$

U がユニタリー行列 U_1 とその転置 U_1^T によって $U = U_1U_1^T$ となっているとして (ユニタリー行列の積はユニタリー行列)

$$\begin{aligned}\psi &= U_1U_1^T\psi^*\\ \psi &= U_1(U_1^\dagger\psi)^*\\ U_1^\dagger\psi &= (U_1^\dagger\psi)^*\\ \psi' &= \psi'^*\end{aligned}$$

となって実数の条件 (4) が出てきます。この条件をマヨラナ条件 (Majorana condition) と言ったりもします。

スピノールが実数であるためにはディラック方程式が実数によって構成されている必要があるので、ディラック方程式

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = 0$$

での第一項が実数になるようにガンマ行列は選ばれます (元のディラック方程式と実数のディラック方程式はユニタリー変換で繋がっている)。つまり、ガンマ行列が純虚数であることになり、純虚数によるガンマ行列

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}$$

のことをマヨラナ表現と言います。σ_i はパウリ行列です。

ついでに、荷電共役を取ったスピノールのローレンツ変換も見ておきます (ローレンツ変換については相対論的量子力学の「ローレンツ変換」と「ディラック方程式の共変性」を見てください)。無限小のローレンツ変換

$$x^\mu \ \Rightarrow\ \tilde{x} = x^\mu + \omega^{\mu\nu}x_\nu$$

に対するスピノールの変換は

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) = S\psi(x) = \exp[-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}]\psi(x) \quad (\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu])$$

となっています。これの複素共役を取って

$$\tilde{\psi}^*(\tilde{x}) = \exp[\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma^*_{\mu\nu}]\psi^*(x)$$

荷電共役にするために $C\gamma_0$ をかけて

$$C\gamma_0\tilde{\psi}^*(\tilde{x}) = C\gamma_0\exp[\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma^*_{\mu\nu}]\psi^*(x)$$
$$\tilde{\psi}^c(\tilde{x}) = C\gamma_0\exp[\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma^*_{\mu\nu}]\gamma_0 C^{-1}\psi^c(x)$$

$\gamma_\mu = -C\gamma_\mu^T C^{-1}$ を使うと γ^*_μ は

$$\gamma^*_\mu = (\gamma^\dagger)^T = (\gamma_0\gamma_\mu\gamma_0)^T = \gamma_0\gamma_\mu^T\gamma_0 = \gamma_0 C^{-1}C\gamma_\mu^T C^{-1}C\gamma_0 = -\gamma_0 C^{-1}\gamma_\mu C\gamma_0$$

なので

$$\gamma^*_\mu\gamma^*_\nu = \gamma_0 C^{-1}\gamma_\mu C\gamma_0\gamma_0 C^{-1}\gamma_\nu C\gamma_0 = \gamma_0 C^{-1}\gamma_\mu\gamma_\nu C\gamma_0$$

となることから、$\sigma^*_{\mu\nu}$ は

$$\sigma^*_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}[\gamma^*_\mu, \gamma^*_\nu] = -\frac{i}{2}(\gamma^*_\mu\gamma^*_\nu - \gamma^*_\nu\gamma^*_\mu) = -\gamma_0 C^{-1}\sigma_{\mu\nu}C\gamma_0$$

これを exp の展開を踏まえることで

$$\tilde{\psi}^c(\tilde{x}) = C\gamma_0\gamma_0 C^{-1}\exp[-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}]C\gamma_0\gamma_0 C^{-1}\psi^c(x) = \exp[-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}]\psi^c(x)$$

よって、ψ_c も通常のスピノールと同じ変換をします。このため、条件 (3) はローレンツ不変で (ψ と ψ^c が同じ変換を受けるから)、そこから派生する (4) も不変です。実際に、マヨラナ表現ではガンマ行列が純虚数なので $\sigma^*_{\mu\nu} = -\sigma_{\mu\nu}$ となることから、ψ^* は ψ と同じ変換をします。